GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXXIX

NUMĂRUL 1. — SEPTEMVRIE 1933

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAȚIUNII" SIBIIU

SUMARUL

1. Lista Membrilor Societății „Gazeta Matematică".
2. Membrii decedați.
3. Congresul matematicienilor greci . . . . . *I. Ionescu*
4. Concursul „Gazetei Matematice".
5. Premiile și alte dispoziții ale fondurilor „Gazetei Matematice".
6. Note matematice: 1 — 3.
7. Bibliografie.
8. Cereri 226.
9. Probleme rezolvate: 3943, 3949, 4039, 4041, 4113, 4159, 4229, 4260, 4262.
10. Exerciții: 1 — 3.
11. Probleme propuse: 4291 — 4300.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREȘTI

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAȚIONALĂ
1933

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: Colonel **Gh. Buicliu** din Ministerul Apărării Naţionale; **C. D. Orăşanu,** Inginer, Licenţiat în Matematici, Conferenţiar la Şcoala Politechnică «Regele Carol II» din Bucureşti, Profesor la Şcoalele Aeronautice; **Al. D. Bunescu,** Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice" se vor trimite D-lui Inginer-Şef GH. ILIESCU, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret, Bucureşti 6.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijà în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procurà dela „*Gazeta Matematică*" („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29 Bucureşti 1) în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 691, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 214, 36, 70, 71, 97, 99, 310, 33, 67, 84, 86, 99, 412, 50, 553, 650, 79, 711, 29, 64, 876, 906, 14, 29, 59, 87, 2003, 04, 17, 70, 74, 111, 70, 338, 405, 30, 39, 66, 77, 502, 03, 56, 77, 87, 607, 09, 23, 38, 55, 65, 84, 92, 709, 13, 17, 35, 69, 80, 814, 65, 86, 89, 909, 12, 26, 36, 47, 3005, 45, 69, 81, 127, 61, 69, 208, 30, 55, 60, 98, 300. 04, 09, 10, 16, 18, 50, 405, 12, 24, 25, 45, 72, 89, 93, 522, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 88, 608, 20, 22, 27, 32, 46, 47, 57, 65, 81, 82, 84, 99, 700, 03, 33, 36, 93, 804, 08, 29, 36, 44, 45, 53, 64, 80, 96, 909, 13, 15, 16, 18, 20, 33, 44, 83, 87, 4010, 13, 30, 34, 45, 53, 59, 62, 68, 70, 73, 85, 102, 03, 11, 12, 18, 19, 23, 26, 32, 47, 48, 50, 51, 55, 63, 67, 69, 91, 92, 201, 03, 06, 09, 10, 13, 24, 25, 26, 30, 35, 36, 37, 40, 43, 46, 47, 48, 49, 52, 56, 57, 69, 73, 74, 75, 77, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 300.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procurà dela „*Gazeta Matematică*" („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29. Bucureşti 1), cu preţul de 12 lei.

GAZETA MATEMATICA

GAZETA MATEMATICA

FOAE LUNARA

DE

MATEMATICI ELEMENTARE ŞI SPECIALE

PENTRU UZUL

ŞCOALELOR SECUNDARE, SPECIALE ŞI SUPERIOARE

VOLUMUL XXXIX

15 SEPTEMVRIE 1933 — 15 AUGUST 1934

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1933

GAZETA MATEMATICA

FOAE LUNARA

DE

MATEMATICI ELEMENTARE SI SPECIALE

PENTRU UZUL

SCOALELOR SECUNDARE, SPECIALE SI SUPERIOARE

VOLUMUL XXXIX

15 SEPTEMBRIE 1933 — 15 AUGUST 1934

BUCURESTI

MONITORUL OFICIAL SI IMPRIMERIILE STATULUI

IMPRIMERIA NATIONALA

1934

LISTA MEMBRILOR
SOCIETĂȚII „GAZETA MATEMATICĂ”

DELEGAȚIUNEA PENTRU ANUL 1933*)

COLONEL GH. BUICLIU, C. D. ORĂȘANU și AL. D. BUNESCU (Cassier)

PERSONALUL REDACȚIUNII

I. IONESCU. Membru delegat pentru schimburi de reviste, primirea lor, cereri, recreațiuni, diverse și reclamațiuni privitoare la tipărire.

G. ȚIȚEICA. Raportor.

GH. ILIESCU. Membru delegat pentru convocările lunare, pentru primirea și repartizarea manuscriselor destinate *Gazetei Matematice*.

Z. CONSTANTINESCU, GH. ILIESCU, C. H. NICOLAU și D. VASILIU. Membri delegați pentru corecturi și imprimarea revistei.

COLONEL GH. BUICLIU și LT.-COMANDOR AV. GR. ZAPAN. Membri delegați pentru aritmetică elementară.

N. BOTEA, C. IONESCU-BUJOR și CĂPITAN GH. NICULESCU. Membri delegați pentru geometrie elementară.

GH. TH. GHEORGHIU și COL. GH. LITEANU. Membri delegați pentru trigonometrie.

TH. ANGHELUȚĂ, GH. TH. GHEORGHIU, CĂPITAN GH. NICULESCU și M. SARIAN. Membri delegați pentru algebră elementară.

C. ORĂȘANU. Membru delegat pentru geometria descriptivă.

CR. MATEESCU și A. PÂRVU. Membri delegați pentru mecanica elementară.

COLONEL GH. BUICLIU și O. ȚINO. Membri delegați pentru geometria analitică.

C. ORĂȘANU. Membru delegat pentru cosmografie.

M. GHERMĂNESCU. Membru delegat pentru probleme și note de matematici superioare.

TH. ANGHELUȚĂ, GH. TH. GHEORGHIU și P. SERGESCU. Membri delegați pentru probleme propuse de matematici superioare.

O. ȚINO. Membru delegat pentru clasarea problemelor propuse.

GH. VASILIU. Membru delegat pentru exerciții.

E. ABASON, N. ABRAMESCU, V. ALACI, N. BOTEA, COLONEL GH. LITEANU, MIRON NICULESCU și M. SARIAN. Membri delegați pentru chestiuni de examen.

GH. TH. GHEORGHIU și C. IONESCU-BUJOR. Membri delegați pentru alcătuirea tablei de materii.

CĂPITAN GH. NICULESCU și M. SARIAN. Membri delegați pentru cercetarea prealabilă a problemelor redijate.

I. S. ANTONIU, N. BOTEA, COL. GH. BUICLIU, N. CIORĂNESCU, GH. I. DUMITRESCU, GH. TH. GHEORGHIU, M. GHERMĂNESCU, C. IONESCU-BUJOR, MAIOR I. LINTEȘ, COLONEL GH. LITEANU, CĂPITAN GH. NICULESCU, O. ORĂNESCU, AL. PANTAZI, A. PÂRVU, COL. GH. POTOPEANU, AL. ROȘU, M. SARIAN, O. ȚINO și LT.-COMANDOR AV. GR. ZAPAN. Membri delegați pentru cercetarea și redactarea problemelor rezolvate.

*) Societatea este administrată și reprezentată de o delegație alcătuită din doi membri și un cassier. (Art. 14 din Statute).

MEMBRII

1	1922, Mart. 1*	ABASON ERNEST. Inginer-Şef. Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele din Bucureşti. Doctor în Matematici. — Conferenţiar şi Subdirector la Şcoala Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Mateiu Voevod, 25. Bucureşti 4.
2	1907, Iulie 1	ABRAMESCU N. Doctor în Matematici. — Profesor la Universitatea din Cluj.
3	1913, Oct. 7	ALACI V. Doctor în Matematici. — Profesor la Şcoala Politechnică din Timişoara şi Şcoala Militară de Artilerie. — Str. General Foch, 27. Timişoara.
4	1919, Sept. 12	ANGELESCU A. Doctor în Matematici. — Profesor Universitar. — Str. Frumoasă, 12. Bucureşti 2.
5	1922, Noem. 4	ANGHELUŢĂ TH. Doctor în Matematici. — Profesor la Universitatea din Cluj. — Str. Iuliu Maniu, 2. Cluj.
6	1928, Aug. 29	ANTONIU S. ION. Inginer Electromecanic, Diplomat de Şcoala Politechnică din Bucureşti. Inginer Electrician, Diplomat de Şcoala Superioară de Electricitate din Paris. — Inginer la Societatea de Gaz şi Electricitate din Bucureşti. — Str. Edgar Quinet, 6. Bucureşti 1. Telefon 302/21.
7	1931, Mart. 11	ARGHIRIADE EM. Licenţiat în Matematici. — Profesor secundar.
8	1921, Febr. 5	AVRAMESCU C. Inginer. — Str. Porumbaru, 56. Bucureşti 2.
9	1929, Aug. 28	BĂDESCU A. LUCA. Inginer. Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele. — Director technic al Societăţii Comunale a Tramvaielor Bucureşti. Asistent la Şcoala Politechnică din Bucureşti. — Str. Olari, 15. Bucureşti 4.
10	1924, Aug. 29	BAIDAFF IG. BERNARDO. Doctor în Matematici. — Buenos-Aires. Belgrano 975. Republica Argentina.
11	1911, Febr. 20	BANCIU I. Licenţiat în Matematici. — Directorul General al Contabilităţii Generale a Statului şi a Finanţelor Publice. — Str. Lucaci, 95. Bucureşti 3.
12	1927, Mai 11	BARBILIAN DAN. Doctor în Matematici. — Asistent Universitar. — Str. Carol Davila, 60. Bucureşti.
13	1920, Ian. 10	BORNEANU GEORGE. Inginer. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Academia de Arhitectură. Directorul Societăţii „Uzinele Chimice Române". — Str. Basarabia, 45. Bucureşti 2.
14	1932, Apr. 20	BOTEA NICULAE. Licenţiat în Matematici. — Calea Floreasca, 46. Bucureşti 3.
15	1920, Ian. 10	BRATU GH. Doctor în Matematici dela Facultatea de Ştiinţe din Paris. — Profesor de Astronomie şi de Calcul diferenţial şi integral la Facultatea de Ştiinţe din Cluj. Directorul Observatorului Astronomic din Cluj. — Str. Brătianu, 29 Cluj.
16	1926, Iunie 38	BRENER M. AVRAM. Inginer — Bulevardul Dacia, 15. Bucureşti 3.
17	1910, Iunie 21	BRUCKNER VICTOR. Inginer Inspector General. — Director Superior C. F. R. — Str. Ing. Pandele Ţăruşanu, 7. Bucureşti 2.

*) Data admiterii

18	1920, Aug. 15	Budeanu I. C. Inginer. — Profesor la Şcoala Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Parcul Bonaparte. Str. Washington, 32. Bucureşti 3.
19	1910, Apr. 3	Buicliu Gh. Colonel de brigadă, din Artilerie. — Directorul Direcţiei Chimice Militare din Ministerul Apărării Naţionale. — Str. Dr. Lister, 5. Bucureşti 6.
20	1928, Mai 9	Bujoreanu N. Inginer-Şef. — Inspector principal C. F. R. — Str. Justinian, 17. Bucureşti 3.
21	1924, Ian 30	Bunescu D. Al. Inginer S. N. P. S. — Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului. — Str. Fabrica de Chibrituri, 22. Telefon 300/79. Bucureşti 6.
22	1930, Aug. 31	Bungescu Ion. Ofiţer de Artilerie. Absolvent al Şcoalei de Art. A. A. din Franţa (Metz). Căpitan în Regt. 1 Art. A. A. Profesor la Şcoalele Militare de Aeronautică. — Str. Elena Matei Voevod, 7. Bucureşti 4.
23	1920, Ian. 10	Buradescu Traian. Inginer-Şef. — Inspector principal technic. Conducătorul Inspecţiei a 7-a M. Cluj. — Calea Victoriei, 51 a. Cluj.
24	1930, Aug. 31	Bușilă Adrian. Inginer. — Inginer în Direcţiunea Întreţinerii şi Lucrărilor Noi C. F. R. — Str. Vaselor, 40 B. Bucureşti 4.
25	1910, Oct. 25	Bușilă D. C. Inginer de Poduri şi Şosele. Inginer Electrician. — Profesor la Şcoala Politechnică din Bucureşti. — Aleea Modrogan, 1. Bucureşti 3. Telefon 246/61.
26	1921, Mai 4	Bușilă I. Inginer. — Inginer în Ministerul Lucrărilor Publice. — Str. Dr. Lueger, 6 bis. Bucureşti 2.
27	1914, Iulie 12	Cambureanu V. Inginer. — Subdirector General al Casei Muncii C. F. R. — Str. Vasile Lupu, 24. Bucureşti 2.
28	1926, Iunie 28	Cambureanu V. D. Inginer. — Inginer la Casa Autonomă a Drumurilor de Stat. — Str. Cobălcescu, 31. Bucureşti.
29	1922, Noem. 4	Capriel I. Inginer-Şef. Inginer diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele din Bucureşti. — Administrator-Delegat al Societăţii „România Carboniferă", al Societăţii „Construcţiunea". — Str. Visarion, 5. Bucureşti 3.
30	1920, Mart. 1	Caraman E. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul „V. Alexandri" din Galaţi. — Str. Lascar Catargi, 40. Galaţi.
31	1928, Aug. 29	Cassian Gh. Maior. — Membru în Comisia militară de recepţie la Uzinele Skoda. — Hotel Skoda-Lohotin. Pilzen. Cehoslovacia.
32	1920, Ian. 10	Cazacu N. C. Inginer-Şef. — Inspector de Mişcare C. F. R. — Str. Sf. Ilie, 2 bis. Galaţi.
33	1914, Dec. 20	Chiricuţă A. Inginer Inspector General. — Regia Autonomă a porturilor şi căilor de comunicaţie pe apă. — Bulevardul Elisabeta, 89. Bucureşti 2.
34	1920, Mart. 1	Chiţulescu I. Ioan. Inginer. — Direcţia Specială a Atelierelor C. F. R. Asistent la Şcoala Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. I. Căpitanu, 44. Bucureşti.

35	1921, Febr. 5	Cioc M. Inginer. — Str. Gr. Cantacuzino, 14. Bucureşti 1.
36	1930, Aug. 31	Ciorănescu Nicolae. Doctor în Matematici din Paris. Licenţiat în Fizico-Chimice. — Conferenţiar la Şcoala Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Pomul Verde, 12. Bucureşti 2.
37	1933, Aug. 31	Constantinescu Gh. Inginer. Diplomat al Şcoalei Politechnice din Bucureşti.—Inginer la Societatea A. E. G.—Str. Donici, 38. Bucureşti 3.
38	1995,Sept·15* (fondator)	Constantinescu Tancred. Inginer Inspector General. — Senator. Fost Ministru.—Aleea Vulpache, 7 (Parcul Filipescu). Bucureşti 3.
39	1932, Apr. 20	Constantinescu Zaharia. Inginer diplomat dela Şcoala Politechnică din Bucureşti. — Şeful Serviciului Exploatării din Imprimeria Naţională M. O. — Calea Şerban Vodă, 133. Bucureşti 5.
40	1910, Apr. 3	Costinescu Dan. Inginer. — Director General al Fabricii de Hârtie „Letea". — Fabrica de Hârtie „Letea". Bacău.
41	1922, Mart. 1	Dumitrescu Arg. D. Inginer. — Şeful Secţiei L3. C. F. R. — Str. Principele Nicolae, 32. Craiova.
42	1922, Noem 1	Dumitrescu I. Gh. Licenţiat în Matematici. — Profesor secundar, dataşat la liceul „Mihai Viteazul" Bucureşti şi profesor la liceul episcopal „Sf. Josif" Bucureşti. — Str. Sf. Elefterie, 52. Bucureşti 4.
43	1918, Ian 28	Felix Corneliu. General de Brigadă în rezervă. — Str. G. D. Palade, 72. Bucureşti 3.
44	1909, Iulie 1	Filipescu Em. Gh. Inginer. — Director General al Societăţii Comunale a Tramvaielor Bucureşti. Profesor la Şcoala Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Vasile Lascăr, 216. Bucureşti 3
45	1929, Ian 31	Focşeneanu I. Mihail. Locotenent de Artilerie. Licenţiat în Matematici. — Ofiţer instructor şi Profesor la Şcoala pregătitoare de Artilerie. — Şcoala Militară de Artilerie. Timişoara.
46	1928, Mai 9	Fundăţeanu C. Ion. Inginer-Şef. — Subdirectorul General al Energiei din Ministerul Industriei şi Comerţului. — Aleea N. Ionescu, 3 (Parcul Delavrancea). Bucureşti 2.
47	1921, Mai 4	Gabrielesco Ramiro. Inginer. — Str. Dionisie, 19. Bucureşti 1.
48	1914, Dec. 20	Gâlcă I. Toma. Inginer-Şef. — Str. Luigi Cazzavilan, 8. Bucureşti 2.
49	1906, Mart. 4	Georgescu I. N. Inginer Inspector General. — Directorul General al Serviciului de Indiguiri şi Desecări. — Str. G. D. Palade, 35. Bucureşti 3.
50	1921, Febr. 5	Georgescu N. N. Inginer. — B-dul Elisabeta, 24. Bucureşti 1.
51	1917, Mai 11	Georgescu-Roegen N. Licenţiat în Matematici. Diplomat al Institutului de Statistică din Paris. — Profesor de Matematici la Liceul din Constanţa. — B-dul Pache, 83. Bucureşti.
52	1921, Aug. 31	Ghermănescu N. Mihail. Doctor în Matematici. — Profesor de Analiză Matematică la Şcoala de Ofiţeri de Geniu. Profesor Secundar. — Str. Popa Nan, 79. Bucureşti 4.

*) Data fondării revistei „*Gazeta Matematică*". Societatea Gazeta Matematică a fost constituită la 1 Septemvrie 1909.

53	1922, Apr. 20	Gheorghiu Th. Gh. Licenţiat în Matematici. — Parcul Ianculuí. Str. D, 9. Bucureşti.
54	1913, Aug. 30	Gheorghiu A. Mircea. Inginer Inspector General. Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele. — Inginer la Regia Autonomă a Porturilor. — Serviciul N. F. R. Galaţi.
55	1929, Aug. 28	Gheorghiu A. Şerban. Doctor în Ştiinţele Matematice. Statistician. — Subdirector în Ministerul de Finanţe. — Str. Robert de Flers, 3. Bucureşti.
56	1913, Aug. 30	Gheorghiu S. I. Inginer-Şef. — Profesor la Şcoala Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Lahovary, 3. Bucureşti 3.
57	1921, Mai 4	Ghimuş D. A. Căpitan. Inginer Radio. E. S. E. — Directorul Şc. Radio-ofiţeri. Profesor la Şcoalele Militare de Geniu şi la Şcoalele Aeronauticei. — Regimentul Transmisiuni. Telefon 313/37. Bucureşti.
58	1931, Mart. 11	Ghiţescu Virgil. Licenţiat în Matematici. — Profesor secundar titular. — Calea Moşilor, 234. Bucureşti 4.
59	1910, Iunie 2	Grigorescu C. Inginer. — Antreprenor de Lucrări Publice. — Str. Plantelor, 40. Bucureşti 4.
60	1920, Ian. 10	Gutzu Victor. Inginer. — Directorul Manufacturei de Tutun Iaşi. — Str. G-ral Lahovary, 60. Bucureşti.
61	1927, Ian. 28	Hanganu D. M. Inginer diplomat al Şcoalei Politechnice din Bucureşti şi al Şcoalei superioare de Electricitate din Paris. — Inginer la Soc. „Edilitatea". Asistent la Şc. Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Logofătul Nestor, 2. Bucureşti.
62	1924, Ian. 30	Ianculescu Romulus. Inginer-Şef. Licenţiat în Matematici. — Conducătorul Inspecţiei I de Mişcare C. F. R. — Gara de Nord. Bucureşti 2.
63	1922, Mai 10	Iliescu Gh. Inginer-Şef. — Directorul Fabricei de Chibrituri-Filaret. — Fabrica de Chibrituri-Filaret. Bucureşti 6.
64	1928, Aug. 29	Iliescu Traian. Locot.-Colonel de Artilerie. — Comandantul Reg. 2 Artilerie Antiaeriană Iaşi.
65	1926, Iunie 28	Ioachimescu A. Gh. Inginer. — Directorul Fabricei de Timbre. — Str. Buzeşti, 76. Bucureşti 2.
66	1895, Sept. 15 (fondator)	Ioachimescu Gh. Andrei. Inginer-Şef. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Şcoala Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Buzeşti, 76. Bucureşti 2.
67	1920, Ian. 10	Ioanovici Aurel. Inginer. — Antreprenor. — Str. Paris, 28. Bucureşti 3.
68	1933, Febr. 22	Ionescu-Bujor C. Licenţiat în Matematici. — Str. G-ral Al. Radovici, 5. Bucureşti 3.
69	1895, Sept. 15 (fondator)	Ionescu I. Inginer Inspector General. Membru corespondent al Academiei Române. — Profesor la Şcoala Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti. Preşedintele Secţiunii Constructorilor. Membru în Consiliul Superior al întreprinderilor şi avuţiilor publice. — Str. Căluşei, 23. Bucureşti 4.

70	1922, Noem.1	Ionescu V. D. Doctor în Matematici dela Facultatea de Ştiinţe din Paris. Fost elev al Şcoalei Normale Superioare din Paris. — Profesor la Facultatea de Ştiinţe din Cluj. — Str. Iuliu Maniu, 2. Cluj.
71	1932, Apr. 20	Ionescu-Zane D. Gh. Inginer diplomat dela Şcoala Politechnică din Bucureşti. — Inginer în Direcţia Generală M. O. — Str. Popovici, 40. Parcul Delavrancea. Bucureşti 3.
72	1912, lunie 2	Jijie Adam. Căpitan Comandor în rezerva marinei. Licenţiat în Ştiinţe. Inginer Electrician. — Concesionarul luminatului electric şi al alimentării cu apă din Sulina. — Sulina.
73	1924, Ian. 30	Kaufmann N. Inginer. — Şef de Secţie. Direcţiunea Economatului C. F. R. — Str. G-ral Manu, 26. Bucureşti 2.
74	1931, Aug. 28	Lazu Const. Inginer diplomat al Şcoalei Politechnice din Bucureşti. — Directorul Imprimeriei Centrale a M. O. Asistent la Şcoala Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Sf. Elefterie, 19. Bucureşti 6.
75	1919, Sept. 12	Linteş I. Maior. Inginer aeronautic. — Asistent la Şcoala Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Epicol, 49. Bucureşti.
76	1921, Mai 4	Liteanu I. Gh. Colonel de Artilerie. — Str. I. L. Carageale, 30 A. Bucureşti 1, Telefon 2.0940.
77	1913, Aug. 30	Malcoci C. Inginer Inspector General. — Str. Pia Brătianu, 4. Bucureşti 3.
78	1826, lunie 28	Manoilescu Mihail. Inginer. — Profesor la Şcoala Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti, Senator. Mare industriaş. — Str. Musolini, 27. Bucureşti 3.
79	1932, Apr. 20	Mărăcine B. Inginer diplomat dela Şcoala Politechnică din Bucureşti. — Şef de serviciu cl. I în Direcţiunea Generală a Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului. — Şoseaua Crângaşi, 119. Bucureşti.
80	1921, Febr. 5	Mareş T. Inginer-Şef. — Director regional la Casa Autonomă a drumurilor de Stat. — B-dul Bonaparte, 20 (Alee). Bucureşti.
81	1922, Mai 10	Mateescu Cr. Inginer. — Asistent la Şcoala Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti. Subdirector la Soc. „Electrica" Bucureşti. — Str. Sevastopol, 11 C. Bucureşti 2.
82	1929, Ian. 11	Mereuţă V. Inginer. — Inspectoratul I C. F. R. — Gara Filaret. Bucureşti 6.
83	1921, Febr. 31	Mihăilescu P. Tiberiu. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Şcoala Comercială din Ploeşti. — Str. Dionisie Eclesiarhul, 15. Bucureşti 2
84	1921, Febr. 5	Mihalopol C. Inginer Inspector General. — Regia autonomă a porturilor şi căilor de comunicaţie pe apă. — Str. Profesori, 8. Bucureşti 5.
85	1925, Febr. 11	Mircea M. E. Inginer. — Inginer-Şef la Societatea „Concordia". — Buştenari. Jud. Prahova.

86	1929, Aug 28	MITESCU CAMIL. Inginer diplomat al Şcoalei Politechnice din Bucureşti. — Directorul Serviciului Exploatării Fabricilor la Casa Autonomă a Monopolurilor. — Piaţa Lahovary, 1 A. Bucureşti.
87	1920, Ian. 10	MITITELU C. CLAUDIU. Inginer-Şef. Licenţiat în Matematici. — Director de Serviciu în Adm. Centrală a Casei Autonome a Monopolurilor. Asistent la Şcoala Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Piaţa Lahovary, 1 A. Bucureşti 3.
88	1920, Ian. 10	MITITELU C. I. Inginer. — Intreprinzător de Lucrări Publice. — Str. G-ral Manu, 28. Bucureşti.
89	1932, Febr. 21	NEAMŢU P. Inginer. Director S. T. B. Asistent la Şcoala Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Roma, 38.
90	1922, Mart 1	Bucureşti 3.
		NEGRETZU I. Inginer de mine. — Exploatări agricole (agricultor). — Str. Şerban-Vodă, 170. Piteşti.
91	1928, Aug. 29	NEGURĂ ST. Licenţiat în Matematici dela Universitatea din Bucureşti. — Profesor la liceul „Codreanu" din Bârlad. — Str. Carol, Bârlad.
92	1910, Mai 20	NICHIFOR A. G. Doctor în Ştiinţele Matematice. — Profesor agregat la Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti. — Str. Dimitrie Racoviţă, 32. Bucureşti 4.
93	1929, Aug. 28	NICOLAU H. CONSTANTIN. Inginer-industrial. — Directorul Imprimeriei Naţionale. — Cartierul fabricii de chibrituri. Str. Ing. Teodoru, 8. Bucureşti 6. Telefon 3-72/88.
94	1922, Noem. 4	NICOLAU T. M. Inginer Inspector General. — Director al Direcţiunei Technice din Ministerul Lucrărilor Publice. Profesor la Şcoala de Conductori de Lucrări Publice din Bucureşti. — Str. Lăzureanu, 31 bis. Bucureşti 6.
95	1923, Iulie 4	NICOLESCU GHEORGHE. Căpitan inginer. Diplomat al Şcoalei Politechnice Timişoara şi al Şcoalei Superioare de Aeronautică Paris. — Str. Isvor, 98. Bucureşti 6.
96	1929, Ian. 31	NICOLESCU MIRON. Fost elev al Şcoalei Normale Superioare din Paris. Doctor în Ştiinţele Matematice dela Sorbonne. — Profesor Universitar. — Universitate, Cernăuţi.
97	1920, Oct. 28	NICULESCU CRISTEA. Inginer-Şef. — Director General al Soc. Anonime industriale „Arad-Brad". — Str. Arhitect Mincu, 13. Bucureşti 2.
98	1931, Mart. 11	NICULESCU V. ALEX. Licenţiat în Matematici. — Profesor secundar la Liceul „Ion Maiorescu". Giurgiu, — Str. Isvor, 98. Bucureşti 6.
99	1922, Mart. 1	ONICESCU O. Doctor în Matematici. — Profesor agregat la Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti. Director al Institutului Superior de Educaţie Fizică. Director al Şcoalei de Statistică. — Str. Rozelor, 9. Bucureşti.
100	1927, Ian. 28	OPRESCU GH. Colonel. — Fundătura Oraţiu, 6 bis. Bucureşti 2.
101	1927, Ian. 28	ORĂNESCU O. Inginer-Şef. Diplomat al Şcoalei Politechnice din Bucureşti, Secţia Electro-Mecanică. — Inginer mecanic la Navigaţiunea Fluvială Română, Galaţi. — Str. Bolintineanu, 2 bis. Galaţi.

102	1913, Oct. 7	ORĂŞANU D. CEZAR. Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri ş Şosele. Licenţiat în Matematici. Inginer-hotarnic şi Operator Topometru. — Conferenţiar la Şcoala Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti. Profesor la Şcoalele Aeronautice. Antreprenor de Lucrări. — Str. Ştirbei-Vodă, 45. Bucureşti 2.
103	1910, Mai 20	ORĂŞANU GR. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul „Gh. Lazăr" din Bucureşti. — Str. Popa Nan, 19. Bucureşti.
104	1914, Dec. 20	PANAITESCU SC. General de Divizie în retragere. — Conferenţiar Universitar. Membru corespondent al Academiei Române. — Str. Călăraşi, 9. Iaşi.
105	1929. Ian. 31	PANTAZI ALEXANDRU. Doctor în Matematici. Redactor Statistic. — Profesor la Şcoala de Statistici. Asistent Universitar. Inspector actuar al Oficiului pentru controlul asigurărilor. — Str. N. Golescu, 20. Bucureşti 3.
106	1932, Aug. 24	PARVU AUREL. Inginer diplomat al Şcoalei Politechnice din Bucureşti. Doctorand în Matematici. — Str. Justinian, 18. Bucureşti 3. Telefon 225/81.
107	1924, Ian. 30	PAŞCANU S. Inginer diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele (1919); Arhitect Naval diplomat Univ. din Glasgow (1921). B. Sc.; A. I. N. A. — Inginer Expert la Societatea Naţională de Credit Industrial. Asistent la Şcoala Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Calea Dorobanţilor, Aleea A, 8. Bucureşti 3.
108	1911, Dec. 17	PATRICIU G. TITUS. Licenţiat în Matematici. — Profesor. Directorul Liceului „M. Kogălniceanu" din Iaşi. Fost Director General al Învăţământului Primar şi Normal în Ministerul Instrucţiunii. — Str. Rosetti, 8. Iaşi.
109	1920, Oct. 28	PHILIPIDE M. Inginer. — Directorul General al Societăţii Anonime Române de Navigaţie pe Dunăre S. R. D. — Str. Radu-Vodă, 25 Bucureşti 5.
110	1922, Aug. 31	POPESCU ION. Inginer. — Director la Soc. Comunală a Tramvaielor Bucureşti. Asistent la Şcoala Politechnică „Regele Carol I." din Bucureşti. — Str. Popa Savu, 12 A. Bucureşti 2.
111	1928, Mai 9	POPOVICIU TIBERIU. Doctor în Matematici. — Str. Nicu Filipescu, 25. Arad.
112	1931, Mart. 11	POPP N. Căpitan. — Preşedintele Comisiunii militare de recepţie la Uzinele I. A. R. Braşov.
113	1927, Mai 11	POPP TRAIAN. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Seminarul pedagogic universitar şi la Colegiul Naţional „Sf. Sava". — Parcul Delavrancea, Aleea D, 2. Bucureşti 2.
114	1929, Ian. 31	PORTOCALĂ MIHAI. Inginer. — Str. Sfinţilor, 45. Bucureşti 1.
115	1930, Aug. 31	POTOPEANU GHEORGHE. Colonel. — Şeful secţiei operaţiilor din Marele Stat Major. — Str. Dr. Lister, 5. Bucureşti 2.
116	1925, Febr. 11	PROTOPOPESCU GRIGORE. Colonel de Artilerie. — Directorul Artileriei din Ministerul Apărării Naţionale. — Str. Ana Davila, 25. Bucureşti 6.

117	1927, Mai 11	RACLIŞ RODOLPHE. Doctor în Ştiinţele Matematice dela Facultatea de Ştiinţe din Paris. Licenţiat în Ştiinţele Fizice dela Facultatea de Ştiinţe din Paris. Inginer Diplomat de l'Ecole Supérieure d'Electricité de Paris. — Directorul „Revistei Universitare Matematice". — Aleea Vulpache, 21. (Parcul Filipescu). Bucureşti 3.
118	1910, Aug. 3	RADU E. M. Inginer Inspector General în Direcţiunea Apelor din Ministerul Lucrărilor Publice şi al Comunicaţiilor. — Profesor la Şcoala Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Armenească, 24. Bucureşti 1.
119	1920, Aug. 15	REVICI TEOFIL. Inginer. — Şef de Secţie în Direcţia de Poduri C. F. R. — Str. Sălcilor, 20. Bucureşti.
120	1933, Febr. 22	ROŞU AL. Licenţiat în Matematici. — Str. Carageale, 8. Bucureşti.
121	1914, Dec. 20	ROŞU V. Inginer Inspector General. - Directorul Serviciului Hidraulic. — Calea Victoriei, 2. Bucureşti.
122	1929, Aug. 28	SĂLĂGEANU AUREL. Inginer. — Inginer în Direcţiunea Generală a Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului. — B-dul Elisabeta, 67. Bucureşti 2.
123	1904, Sept. 1	SALIGNY M. Inginer Inspector General. — Subdirectorul Serviciului Hidraulic. Profesor la Şcoala de Conductori de Lucrări Publice din Bucureşti. — Str. G. Gr. Cantacuzino, 50. Bucureşti 2.
124	1920, Ian. 10	SĂPUNARU S. GH. Inginer de Poduri şi Şosele. — Director General al Societăţii „Clădirea Românească". — Str. Pia Brătianu, 5. (Parcul Ioanid). Bucureşti 3.
125	1929, Aug. 28	SARIAN MIHAI. Inginer. — Inginer la Direcţiunea Atelierelor C. F. R. Griviţa. Asistent la Şcoala Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Columb, 9. Bucureşti 3.
126	1920, Aug. 15	ŞERBĂNESCU GH. VICTOR. Inginer. — Antreprenor de construcţii. — Str. Paleologu, 3. Bucureşti.
127	1928, Aug. 20	SERGESCU BARBU. Inginer dela Şcoala de Mine din Paris. Licenţiat în Matematici. Licenţiat în Drept. — Inginer Inspector la Societatea „Steaua Română". — Soc. „Steaua Română". Câmpina.
128	1919, Sept. 12	SERGESCU P. Doctor în Matematici. Licenţiat în Filosofie. — Profesor Universitar. — Str. Berde, 3. Cluj.
129	1921, Febr, 5	SFINŢESCU I. CINCINAT. Inginer Inspector General. — Profesor la Academia de Arhitectură. Director General Technic la Municipiul Bucureşti. — Str. Barbu Delavrancea, 43. Bucureşti.
130	1910, Aug. 3	SMÂNTÂNESCU AUREL. Inginer Inspector General. — Subdirector General al Casei Autonome a Drumurilor de Stat. — Str. Sf. Ştefan, 5. Bucureşti 4.
131	1933, Aug. 31	STAMATESCU I. GH. Inginer-Şef. — Inspector Principal în Direcţiunea Tracţiunei C. F. R. — Str G-ral Lahovary, 87. Bucureşti 3.
132	1923, Iulie 4	STAMATESCU I. Profesor la Liceul Matei Basarab şi Seminarul Pedagogic Universitar. — Str. Toamnei, 47. Bucureşti 3.
133	1920, Ian. 10	STAN D. Inginer. — Asistent la Şcoala Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti. Inginer la Soc. Anonimă Română de telefoane. — Aleea Mântuleasa, 1. Bucureşti 4.

134	1927, Mai 11	Tănăsescu A. Colonel. — Str. Frumoasă, 54. Bucureşti 2.
135	1928, Mai 9	Tănăsescu A. Tudor. Inginer. Licenţiat în Matematici. — Conferenţiar la Şcoala Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti. Şeful Serviciului de Radio-Comunicaţii P. T. T. — Str. Salvator, 37. Bucureşti 6.
136	1911, Mai 18	Teodorescu N. N. Inginer Inspector General. — Str. Aurel Vlaicu, 22. Bucureşti 3.
137	1900, Noem. 1	Teodorescu V. Profesor la Liceul Naţional şi Liceul Militar din Iaşi. — Str. Elena Doamna, 39. Iaşi.
138	1929, Aug. 28	Teodoru D. Radu. Inginer-Şef. — Director la Direcţia Generală a exploatării monopolurilor. — Piaţa Lahovary, 1. Bucureşti 3.
139	1910, Mai 20	Thierrin H. G. Licenţiat în Matematici. — Directorul Institutului „Schewitz-Thierrin". — Str. Scaune, 33, Bucureşti 1.
140	1921, Aug. 31	Ţino O. Doctor în Matematici. — Profesor la Şcoala Politechnică din Timişoara. — Str. Ismail, 16. Bucureşti 4.
141	1929, Oct. 30	Ţiţeica Gabriela. Licenţiată în Matematici. Inginer. — Asistentă la Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti. — Str. Dionisie, 80. Bucureşti.
142	1895, Noem. 1	Ţiţeica Gh. Doctor în Ştiinţele Matematice. — Secretar General al Academiei Române. Profesor la Facultatea de Ştiinţe şi la Şcoala Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti. Profesor agregat la Sorbona. — Str. Dionisie, 80. Bucureşti 3.
143	1919, Sept. 12	Ulescu Al. Inginer. — Director la Fabrica I. A. R. — Str. General Dona 11. Bucureşti 2.
144	1914. Dec. 10	Vardala I. Inginer Inspector General. — Director General al Regiei Autonome a Porturilor şi Căilor de Comunicaţie pe Apă. — B-dul Tacke Ionescu, 38. Bucureşti 4.
145	1927, Mai 11	Vasilache I. Inginer-Şef. — Profesor şi Subdirector al Şcoalei Superioare de Arte şi Meserii din Bucureşti. — Str. Polizu, 11. Bucureşti 2.
146	1927, Mai 11	Vasilescu Fl. Doctor în Matematici. — Str. Eroului, 19. Bucureşti.
147	1920, Ian. 10	Vasilescu G. I. Inginer-Şef. — Str. I. G. Saita, 10. Bucureşti 1.
148	1923, Mart. 26	Vasilescu Gr. Inginer. — Str. Costache Negri, 21. Bucureşti 6.
149	1932, Apr. 20	Vasiliu Gh. Dan. Inginer diplomat al Şcoalei Politechnice din Bucureşti. — Inginer la Monitorul Oficial. — B-dul Schitu Măgureanu, 47. Bucureşti 1.
150	1933, Febr. 22	Vasiliu Gh. Inginer. Diplomat al Şcoalei Politechnice din Leoben. — Cartierul Grant C. F. R., Str. D, 51. Bucureşti 2.
151	1927, Aug. 26	Vasiliu M. Inginer. — Asistent la Şcoala Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti. Director în Ministerul Industriei şi Comerţului. — Str. Vaselor, 70. Bucureşti 4.
152	1933, Aug. 31	Woinarosky R. Licenţiat în Matematici. — Str. Manu Cavafu, 16. Bucureşti 5.

153	1924, Ian. 30	Zamfirescu Grigore. Inginer. Diplomat S. N. P. S. Bucureşti 1920 şi E. S. A. Paris 1921. — Proprietarul fabricei de avioane SET". Conferenţiar la Şcoala Politechnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — B-dul Ferdinand, 168. Bucureşti 4.
154	1920, Sept. 28	Zapan Gh. Doctor în Filosofie. — Profesor la Institutul superior de educaţie fizică din Bucureşti. — O. N. E. F. Str. Maior Ene.
155	1921, Mai 4	Zapan Grigore. Lt.-Comandor aviator. Inginer diplomat al Şcoalei Superioare de Aeronautică şi Construcţii Mecanice din Paris.— Profesor la Şcoala Pregătitoare de Ofiţeri, Str. Polonă, 84. Bucureşti.
156	1925, Aug. 26	Zlatcu St. C. Inginer-mecanic dela Şcoala Politechnică din Zürich. — Antreprenor. — Parcul Regina Maria, 28. Bucureşti.

†

MEMBRII DECEDAŢI*)

	Data admiterii	Data morţii
1. Alexandrescu T. I.	1928 Mai 9	1930 Sept. 5.
2. Alexandrini O.	1895 Noemb. 15	1905 Sept. 6.
3. Balaban V.	1895 Sept. 15 (fondator)	1895 Sept. 22.
4. Cristescu V.	1895 Sept. 15 (fondator)	1929 Martie 10.
5. Davidescu Em.	1895 Sept. 15 (fondator)	1905 Aug. 28.
6. Dordea Tr.	1928 Ian. 26	1930 Apr. 30.
7. Erbiceanu C.	1898 Sept. 15	1904 Apr. 3.
8. Evolceanu V.	1927 Ian. 28	1928 Oct. 19.
9. Lalescu Tr.	1905 Mart. 1	1929 Iunie 15.
10. Mirea N. Şt.	1909 Iunie 1	1932.
11. Moţoi I.	1906 Apr. 1	1929 Ian. 16.
12. Năsturaş D.	1909 Noemb. 9	1930.
13. Nicolaevici G.	1909 Iunie 1	1917.
14. Nicolescu N.	1895 Sept. 15 (fondator)	1924 Mai 5.
15. Roco M.	1895 Sept. 15 (fondator)	1931 Ian. 5.
16. Roşu Al.	1910 Iunie 21	1917 Apr. 17.
17. Saligny A.	1914 Dec. 9	1925 Iunie 17.
18. Teodor D. I.	1906 Apr. 1	1924 Iulie 30.
19. Teodorescu I. S.	1914 Iunie 12	1918 Dec. 22.
20. Zottu I. G.	1895 Sept. 15 (fondator)	1902 Iulie 8.

*) Aci sunt trecuţi numai redactorii şi membrii, cari au stat la *„Gazeta Matematică"* până la sfârşitul vieţii lor, în ordine alfabetică.

CONGRESUL MATEMATICIENILOR GRECI

Dela D-nii N. HATZIDAKIS şi P. ZERVOS, cunoscuţii matematicieni, profesori la Universitatea din Atena, s'a primit următorul apel pentru participarea la un Congres al Matematicianilor greci:

Athènes, 18 juillet 1933.

Monsieur et cher confrère,

Nous avons l'honneur de vous annoncer la convocation d'un Congrès Mathématique à Athènes pendant le mois de Juillet de l'année 1934.

Comme ce Congrès est spécialement organisé par la Fédération des professeurs de l'Enseignement Moyen de Grèce, nous vous serions très obligés, si vous voulez bien nous envoyer les noms et les adresses des Fédérations et Corporations analogues de votre pays, pour que nous puissions les inviter à notre Congrès.

Nous espérons vivement en même temps, que vous voudrez bien y assister personnellement en honorant ses séances par des conférences ou des communications de votre choix. (Langues étrangères du Congrès: Français, Allemand, Anglais, Italien.) Tous les mathématiciens de Grèce y prendront part.

La participation vive de votre pays à ce Congrès de même que celle des autres pays balcaniques serait un bon augure pour la possibilité de la fondation d'une conférence interbalcanique permanente des mathématiciens qui serait très utile pour tous nos pays; elle organiserait des Congrès Mathématiques Interbalcaniques, dans les capitales de nos pays et elle rapprocherait par tous les moyens possibles les mouvements locaux, tant didactiques que scientifiques, qui ont lieu dans le domaine de notre belle science. Elle aiderait, en même temps, au rapprochement général de nos peuples, si voisins et si, cependant, peu connus mutuellement.

Le programme détaillé du Congrès vous sera envoyer à temps; pour le moment nous vous en communiquons les sections générales qui sont: A. Section scientifique; B. Section didactique; C. Section professionelle.

Nous vous prions vouloir communiquer cette lettre à vos confrères.

N. HATZIDAKIS, P. ZERVOS

Professeurs à l'Université. Membres honoraires du Comité d'organisation.

Gazeta Matematică aduce la cunoştinţa matematicianilor români, a profesorilor de matematici şi a inginerilor, ofiţerilor, etc. pe cari îi interesează progresul ştiinţelor matematice, acest apel al matematicianilor din Grecia şi urează acestui Congres, ţinut în *patria raţionamentului matematic*, cel mai desăvârşit succes.

Cererile de participare se vor adresa d-lui profesor P. ZERVOS, Rue Mytilène 20, Athènes.

I. IONESCU.

CONCURSUL „GAZETEI MATEMATICE"

Adunarea generală a Societăţii *Gazeta Matematică* a decis, în şedinţa sa dela 31 August a. c., de a ţine un concurs de matematici în anul 1934, oricare ar fi numărul de candidaţi ce s'ar prezenta. Concursul va avea loc după Paşte, înainte de reînceperea cursurilor, dacă vom dispune de mijloace de a aduce pe candidaţi în Bucureşti, unde s'ar ţine examen înscris şi oral, sau într'o duminecă din luna Mai, în diferite centre din ţară, când se va da numai teze. Deciziunea în această privinţă se va publica în numărul din Februarie 1934.

Cererile de înscriere se vor trimete *direct de candidaţi*, elevi ai liceelor din ţară şi ai anilor pregătitori de pe lângă şcoalele superioare. Nu se primesc cereri trimese de părinţi, corespondenţi sau profesori.

Cererile vor arăta neapărat, în ordinea aci arătată şi numerotate, următoarele date :

1. Numele şi pronumele elevului, scrise vizibil.

2. Clasa sau anul pregătitor în care urmează candidatul. Pentru cei pregătiţi în particular se va arăta şcoala la care a urmat anul precedent sau în care a depus examenul de fine de an pentru clasa precedentă.

3. Adresa în timpul şcoalei şi în timpul vacanţei Paştelui, pentru a li se putea face comunicările şi înştiinţările necesare.

4. Dacă dispune de mijloace de a veni la Bucureşti, dacă are unde fi găzduit şi întreţinut aci în timpul concursului, sau dacă unul din aceste mijloace ar urma să fie procurate de Societatea *Gazeta Matematică*. Dacă are nevoie de bani pentru drum, va

indica şi gara de unde va lua trenul pentru a veni la Bucureşti, şi gara la care se va întoarce după concurs.

5. Fiecare candidat de liceu va fi obligat să se înscrie la două din următoarele materii:

Aritmetica
Algebra
Algebra Superioară
Geometrie Plană
Geometrie în Spaţiu
Trigonometria
Cosmografia
Mecanica.

Candidaţii din anii preparatori se vor înscrie la două din materiile acelor ani.

La examenul oral fiecare candidat va fi ascultat până la materia clasei sale.

6. Activitatea candidatului la *Gazeta Matematică* sau la alte reviste din ţară sau din străinătate.

Cererile de înscriere se vor trimete D-lui Inginer Inspector General Ion Ionescu, Bucureşti, Str. Căluşei No. 23, până cel mai târziu la 31 Decemvrie 1933.

Candidaţii înscrişi la concurs, şi cari din diferite motive nu se mai pot prezenta, sunt obligaţi să anunţe.

Se atrage atenţiunea că toate condiţiunile pentru înscriere şi ţinerea concursului trebuesc respectate cu toată atenţiunea şi exactitatea inerentă ştiinţelor matematice.

Părăsirea sălilor de concurs înscris este interzisă înainte de predarea tezelor.

Numărul candidaţilor admişi la concurs va depinde de sacrificiile materiale ce se vor cere Societăţii *Gazeta Matematică*, pentru transportul, găzduirea şi întreţinerea candidaţilor şi de pregătirea pe care aceştia vor arăta-o în cererea ce va face. Se va căuta ca la concurs să fie prezentate cât mai multe licee şi cât mai multe clase, precum şi elevi din licee militare şi din anii pregătitori ai şcoalelor secundare sau superioare.

Comisiunea examinatoare se va compune din membrii Societăţii *Gazeta Matematică* care nu vor avea rude printre candidaţii admişi la concurs.

In numărul 6 din Februarie 1934 se va publica modul de ținere al concursului, localitatea, orele de prezentare și numele candidaților admiși la concurs.

Candidații reușiți la concurs vor primi ulterior diplome, recompense, premii sau mențiuni. Primul care va reuși la concurs, dintre elevii anului preparator de pe lângă Școala Politechnică *Regele Carol II* din București, va primi premiul «ANGHEL SALIGNY» (de 1000 lei) oferit de un membru al Societății noastre, iar primul reușit dintre toți candidații va primi premiul «LT.-COL. C. TĂNĂSESCU» în cărți, în conformitate cu înștiințarea făcută în acest număr la articolul: Premii și alte dispoziții ale fondurilor *Gazetei Matematice*.

DELEGAȚIA SOCIETĂȚII:
AL. BUNESCU,
COL. GH. BUICLIU și C. ORĂȘANU.

PREMIILE ȘI ALTE DISPOZIȚIUNI ALE FONDURILOR „GAZETEI MATEMATICE"

PENTRU

CURSUL ANULUI 1933 — 1934

(1 Septemvrie 1933 — 31 August 1934)

In conformitate cu dispozițiunile art. 12 din Regulamentul general al administrării fondurilor *Gazetei Matematice*, subsemnații membri ai Comisiunii pentru controlul gestiunii fondurilor și pentru privigherea la îndeplinirea prevederilor regulamentare ale fiecărui fond, desemnați în adunarea generală dela 24 August 1932, aducem la cunoștință următoarele:

1. Din venitul anual al fondului «SPIRU C. HARET», potrivit dispozițiunilor regulamentului pentru administrarea lui, se cumpără cărți de matematici pure și aplicate (literatură matematică, istoria matematicilor, recreațiuni matematice, etc.) care se donează bibliotecilor școlare dela școlile secundare sau corespondenților merituoși, elevi ai acestor școli.

Regulamentul acestui fond s'a publicat în *Gazeta Matematică* anul XXXVIII, pag. 170.

In loc de cărți se pot dona aparate sau modele necesare învățământului matematic.

In baza hotărîrii luate de adunarea generală dela 31 August 1933, cărțile ce se vor procura din venitul fondului pe anul 1933 s'a destinat să se doneze Liceului militar «N. Filipescu» dela «Mânăstirea Dealului».

2. Premiul pentru lucrări de matematică aplicată la științele militare, din venitul fondului «General Sc. Panaitescu», se acordă celei mai bune lucrări de matematică aplicată la studiile militare, publicate în cursul anului.

Regulamentul acestui fond s'a publicat în *Gazeta Matematică* anul XXXVIII, pag. 213.

Studiile în manuscris care se aduc la cunoștința Societății pe orice cale, se iau și ele în considerație la acordarea premiului.

Autorii publicațiunilor prezentate trebue să fie români, sau să-și fi făcut cultura matematică în țară.

Premiul este indivizibil și se acordă neapărat în fiecare an. In cazul când nu se găsește nicio lucrare de premiat sau în cazul când autorul lucrării premiate nu voiește a primi suma fixată, ea se dă uneia din revistele militare în care se publică și chestiuni de matematică aplicată la științele militare.

Raportul Comisiunii însărcinate cu acordarea premiului se publică în numărul *Gazetei Matematice* din Octomvrie.

3. Premiul «Vasile Conta», din fondul constituit de *Gazeta Matematică*, se acordă pentru a recompensa cea mai bună lucrare originală de filozofia matematicilor.

Regulamentul acestui fond s'a publicat în *Gazeta Matematică* anul XXXVIII, pag. 246.

Autorul trebue să fie român și să-și fi făcut studiile secundare în țară.

Lucrările trebuesc trimise Societății până la 1 Iulie ale fiecărui an, iar rezultatul se va publica în numărul din Noemvrie al *Gazetei Matematice*.

Dacă până la acea dată nu se prezintă nicio lucrare, se va aștepta data de 1 Iulie a primului an când se va prezenta o asemenea lucrare.

Premiul constă din totalitatea venitului fondului cumulat până la data acordării.

4. Premiul bienal «Inginer H. Capriel», pentru lucrări de matematici superioare, pure sau aplicate, se acordă celei mai bune lucrări ce se va prezenta Societății, de către studenții Universităților, elevii școlilor Politehnice sau elevii școlilor militare de Aeronautică, Artilerie, Geniu și Marină din țară.

Regulamentul acestui fond s'a publicat în *Gazeta Matematică* anul XXXVIII, pag. 327.

Subiectul lucrării pentru premiul pe anul 1934 s'a anunțat în *Gazeta Matematică* anul XXXVIII, numărul 9 (pe luna Mai) și i s'a dat forma definitivă în numărul 10 din același an.

Lucrările — semnate de autor — trebuesc trimise Societății cel mai târziu până la 1 Mai 1934, iar rezultatul se va publica în numărul din Decemvrie 1934 al *Gazetei Matematice*.

Premiul constă din venitul fondului «Inginer H. Capriel» și este indivizibil, iar în cazul când nu se acordă, el mărește fondul.

5. Din venitul fondului «Lt. Colonel G. A. Tănăsescu» urmează să se dea cărți de matematici celui clasilicat întâiul la concursurile anuale ale *Gazetei Matematice*.

Regulamentul acestui fond s'a publicat în *Gazeta Matematică* anul XXXVIII, pag. 171.

In anii când aceste concursuri nu au loc, veniturile măresc fondul.

6. Premiul «Inginer Vasile Cristescu», se acordă din venitul fondului «Vasile Cristescu», autorului celui mai bun articol referitor la geometria triunghiului sau la trigonometrie, publicat în ultimul volum apărut al *Gazetei Matematice*.

Regulamentul acestui fond s'a publicat în *Gazeta Matematică* anul XXXVIII, pag. 125.

Autorul articolului trebue să fie elev de liceu, de școală militară, de școală politehnică sau student de facultate.

Premiul este indivizibil și anual, iar în cazul când într'unul sau mai mulți ani de-a-rândul nu s'a publicat articole putând fi premiate, premiul se cumulează până la acordarea lui.

Raportul Comisiunii însărcinate cu decernarea premiului se publică în numărul din Iunie al *Gazetei Matematice*.

7. Din venitul fondului «Anghel Saligny», destinat să servească la înființarea «Bibliotecei tehnice a *Gazetei Matematice*», urmează să se publice lucrări complete de matematici aplicate, sau cu cuprins tehnic în legătură cu aceste științe.

Regulamentul acestui fond s'a publicat în *Gazeta Matematică* anul XXXVIII, pag. 289.

Până în prezent Delegaţiunea Societăţii n'a primit niciun manuscris care să poată fi publicat din acest fond, în cursul anului 1933 — 1934.

8. In «Biblioteca *Gazetei Matematice*», destinată publicării de cărţi privitoare la matematicile pure (cu caracter didactic sau ştiinţific), la matematicile aplicate, la filozofia sau istoria lor, precum şi la orice fel de lucrare cu caracter matematic, nu se va putea tipări nici o lucrare, fondurile fiind angajate.

COMISIUNEA PENTRU PREMII:
IOAN BUŞILĂ, GH. ILIESCU.

NOTE MATEMATICE

1. *Asupra problemei 3872.* Prin această problemă, rezolvată la pag. 194 din Anul precedent, se cereau numerele *szu* pentru care szu/u e patrat. Chestiunea s'a rezolvat presupunând că fracţia se reduce la un întreg, ceeace enunţul nu pretindea.

Fie p^2/q^2 fracţia ireductibilă egală cu szu/u. Cum $u<10$ rezultă $q<4$. Pentru $q=1$ fracţia se reduce la un întreg, — cazul examinat în soluţia dată. Rămâne deci să luăm $q=2$ sau $q=3$, şi deci $szu/u=p^2/4$ sau $szu/u=p^2/9$. In primul caz, cum u este divizibil cu 4, nu putem lua decât $u=4$ sau $u=8$. Conchidem $sz4=p^2$ sau $sz8=2p^2$. In primul caz p e pereche şi nu mai poate fi prim cu $q=4$. In al doilea, putem lua $sz8$ dublul unui patrat terminat cu 9, sub 500. Aceste patrate sunt 169 şi 289, de unde soluţiile *338* şi *578*. In cazul $q=9$ nu putem lua decât $u=9$ şi avem $sz9=p^2$. Putem lua dar un patrat de trei cifre terminat cu 9 şi prim cu 9. Acestea sunt 169, 289, 529. Problema admite dar soluţiile fracţionare:

$$169/9=(13/3)^2;\ 289/9=(17/3)^2;\ 338/8=(13/2)^2;$$
$$529/9=(23/3)^2;\ 578/8=(17/2)^2.$$

I. I.

2. *Asupra problemei 4231.* Au sosit prea târziu spre a putea fi anunţate în No. 12 Anul XXXVIII o soluţie foarte bună a

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAŢIUNII" SIBIIU

problemei 4231 dela D-l MĂNESCU MIRCEA (elev clasa VII, Liceul „M. Eminescu", Bucureşti). D-sa a dat toate soluţiile grupate pe raţii. Din 40 progresiuni ce se pot face cu numere prime până la 100 sunt 29 de trei termeni, alte 9 de patru termeni şi 2 de cinci termeni. O altă soluţie bună a fost trimisă de D-l T. M. PREDOIESCU. D-sa extinde progresiunile şi la numere negative şi dă progresiile cu 9 termeni:

—19.—13.—7.—1.5.11.17.23.29 şi —43.—31.—19.—7.5.17.29.41.53.

I. I.

3. *Asupra problemelor 4072 şi 4141.* Aceste probleme propuse de D-l I. IONESCU cereau să se arate respectiv că (a^3+b^3) nu se divide cu 11 dacă $(a+b)$ nu se divide cu 11, şi că (a^5-b^5) nu se divide cu 13 dacă $(a-b)$ nu se divide cu 13. Amândouă aceste propoziţiuni sunt cazuri particulare ale teoremei clasice:

Factorul ireductibil al expresiunii (a^n+b^n), *în care* a *şi* b *sunt prime între ele şi* n *un număr prim impar absolut, nu are, în afară eventual de* n, *decât divizori primi de forma* $q = 2hn + 1$.

Dacă ţinem seamă de faptul că $(a^n+b^n)/(a+b)$ nu se împarte cu n decât dacă şi $(a+b)$ se împarte cu n, teorema de mai sus este echivalentă cu următoarea:

Expresiunea (a^n+b^n), *în care* n *e prim impar, nu se divide cu* p *decât dacă* $(a+b)$ *se divide cu* p, *afară de cazul când* p *este de forma* $p = 2hn + 1$.

Această teoremă joacă un mare rol în foarte multe chestiuni de teoria numerelor, de exemplu a căutării factorilor primi, în ultima teoremă a lui FERMAT, etc. De aceea s'a bucurat de o deosebită atenţiune şi a căpătat numeroase demonstraţiuni. Iată una din acestea, bazată pe cunoscuta teoremă a lui FERMAT, concretizată în relaţia:

$$(1) \qquad x^{n-1} - 1 = \mathcal{M}n,$$

unde n este un număr prim impar absolut şi x un număr prim cu n.

Fie q un divizor al lui (a^n+b^n) în care a e prim cu b, adică:

$$(2) \qquad (a^n + b^n) = \mathcal{M}q.$$

Cum a e prim cu b, (2) ne arată că, atât a cât şi b

sunt primi cu q. Inmulţind ambii membri ai relaţii precedente cu $(-b)^{(q-2)n}$, care este prim cu q, găsim:

$$[(-b)^{(q-2)}\, a]^n + (-b)^{(q-1)n} = \mathcal{M}q,$$

$$\therefore \quad [a(-b)^{(q-2)}]^n - 1 = \mathcal{M}q. \tag{3}$$

Distingem două cazuri:

1. $(a+b)$ se divide cu q, deci dacă:

$$[a^{(q-1)}]^n - 1 = \mathcal{M}q,$$

atunci (1) arată că aceasta este adevărată pentru orice q.

2. $(a + b)$ nu se divide cu q. In acest caz fie c restul împărţirii lui $[a(-b)^{(q-2)}]$ prin q. Conform relaţii (1) c, care este prim cu q, este diferit de 1, căci în caz contrariu ar trebui să avem $(a+b) = \mathcal{M}q$ ceea ce este contrar ipotezei. Deci (3) devine:

$$c^n - 1 = \mathcal{M}q. \tag{4}$$

Dar din (1) deducem:

$$c^{q-1} - 1 = \mathcal{M}q. \tag{5}$$

Cum n este un număr prim absolut, pentru ca (4) să existe trebuie ca n să fie un divizor al lui $(q + 1)$, deci:

$$(q - 1) = hn,$$

$$\therefore \quad q = hn + 1,$$

şi fiind că q este impar (nu poate fi 2), rezultă:

$$q = 2hn + 1.$$

c. c. e. d. d.

I. B. F.

BIBLIOGRAFIE

Mathesis. Tomul XLVII. No. 6—7. lunie—lulie 1933. Gembloux. Asupra suprafeţelor în spaţiu, de Cl. Servais. Asupra a patru sfere tangente două câte două, de Nathan Altschiller-Court. Asupra triunghiurilor isohomologice, de N. N. Mihaileanu. O teoremă metrică asupra punctelor limite de a doua speţă a mulţimilor superficiale, de G. Van der Lyn. Asupra şirurilor foarte generale care se desvoltă conform legii formaţiunii reduselor unei fracţiuni continui, de E. Heuchamps. Suprafeţe riglate asociate unei curbe în spaţiu, de Ad. M. Asupra triunghiurilor autopolare, de R. Deaux. Asupra unei funcţiuni continui fără derivată, de J. Dieudonné. Asupra unor arithmotriunghiuri, de R. Goormaghtigh.

J. LEEMANS. *Sur quelques intégrales définies obtenus par l'application des propriétés des intégrales euleriennes.* (Supliment la *Mathesis*).

V. THÉBAULT. *Quadrilatère bordé de carrés.* (Supliment la *Mathesis*).

E. ARGHIRIADI. *Sur le mouvement d'une figure plane semblablement variable.* (Supliment la *Mathesis*).

Revista Matematică din Timişoara. Anul XIII. No. 6. August 1933. Timişoara. Două comemorări: LEONARD EULER şi ADRIEN MARIE LEGENDRE, de N. O. ZAHARIA. Asupra unor însumări, de C. IVĂNESCU.

Boletin Matematico. Anul IV. No. 4. Suplemento informativo. Buenos-Aires.

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. XXXIX. No. 7 lulie 1933. New-York. Adunarea din Aprilie dela New-York, de J. R. KLINNE. Adunarea din Aprilie dela Chicago, de M. H. INGRAHAM. R. E. A. C. PALEY. In memoriam, de N. WIRNER. Trei cărţi asupra topologiei, de P. A. SMITH. MOORE asupra teoriei grupelor de puncte, de H. M. GEHMAN. Rezumate de comunicări.

Sphinx. Anul III. No. 9. Septemvrie 1933. Bruxelles. Regula lui GAUSS pentru determinarea zilei Paştelui, de B. LAUREL. Formulă dând data Paştelui pentru anii 1900—2099, de M. MESSENS.

CERERI

226. Din o scrisoare a lui MIHAIL LOCUSTEANU din 1/II 1822 extrag următoarele:

„ . . . te-am înştiinţat că porumbul l'am dijmuit şi au eşit 430 *ferdele* . .". Ce unitate de măsură erea aceasta?

I. I.

Răspuns la cererea No. 197. In afară de datele din No. 12 Anul XXXVIII mai adaog următoarele:

ELIE ANGELESCU a terminat Şcoala centrală din Paris la 1864, obţinând Diploma de inginer. In volumul publicat de acea Şcoală cu ocaziunea Centenarului ei găsim că ANGELESCU s'a născut la Brăila, şi că a absolvit Şcoala la 1864. El a murit la Bucureşti în 12 lunie 1882. In fine l'am mai găsit trecut în lista membrilor primei Societăţi de Ingineri şi Architecţi înfiinţată la noi în 1986, care a scos câţiva ani un Buletin, dar care s'a dizolvat după războiul independenţei.

I. I.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 3943. *Se cer patratele de câte patru cifre, unul răsturnatul celuilalt, cari să difere printr'un cub.*

ST. DOBRESCU.

Vom căuta mai întâiu patratele de patru cifre, ale căror răsturnate sunt patrate. Soluția acestei probleme se găsește în aceia a problemei 1921, propusă de D-l GR. C. ZAMFIRESCU, actual membru al Gazetei și este unică

$$1089 = 33^2 \quad , \quad 9801 = 99^2.$$

Diferența acestor patrate nu este însă cub perfect, așa încât problema de față nu are soluție.

Notă. Au arătat aceasta D-nii: Sublt. SAVIN C. ION, HAR. IONESCU-BISS și M. MARGULIUS.

M. G.

3949. *Să se găsească limita sumei:*

$$\frac{\sin a \sin 2a}{\sin 3a} + \frac{\sin\frac{a}{3}\sin\frac{2a}{3}}{3\sin a} + \ldots + \frac{\sin\frac{a}{3^n}\sin\frac{2a}{3^n}}{3^n \sin\frac{a}{3^{n-1}}} + \ldots$$

când n *crește nemărginit.*

V. DÂNGĂ.

Soluție dată de D-l VASU VASILE (student, Cluj).

Insemnând cu u_n termenul general, el se poate scrie:

$$(1)\quad u_n = \frac{\sin\frac{a}{3^n}\sin\frac{2a}{3^n}}{3^n \sin\frac{a}{3^{n-1}}} = \frac{1}{2}\,\frac{\cos\frac{a}{3^n} - \cos\frac{a}{3^{n-1}}}{3^n \sin\frac{a}{3^{n-1}}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\cos\frac{a}{3^n}}{3^n \sin\frac{a}{3^{n-1}}} - \frac{\cos\frac{a}{3^{n-1}}}{3^n \sin\frac{a}{3^{n-1}}}\right)$$

primul termen dintre paranteze se mai poate scrie:

$$\frac{\cos\frac{a}{3^n}}{3^n \sin\frac{a}{3^{n-1}}} = \frac{1}{2}\,\frac{\sin\frac{2a}{3^n}}{3^n \sin\frac{a}{3^{n-1}}\,\sin\frac{a}{3^n}} = \frac{1}{2}\,\frac{\sin\left(\frac{3a}{3^n}-\frac{a}{3^n}\right)}{3^n \sin\frac{a}{3^{n-1}}\,\sin\frac{a}{3^n}}$$

și desvoltând ultima paranteză și făcând reducerile posibile obținem:

$$\frac{\cos\frac{a}{3^n}}{3^n \sin\frac{a}{3^{n-1}}} = \frac{1}{2}\,\frac{\cos\frac{a}{3^n}}{3^n \sin\frac{a}{3^n}} - \frac{1}{2}\,\frac{\cos\frac{a}{3^{n-1}}}{3^n \sin\frac{a}{3^{n-1}}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3^n}\operatorname{cotg}\frac{a}{3^n} - \frac{1}{3^n}\operatorname{cotg}\frac{a}{3^{n-1}}\right).$$

Dacă acum transformăm în cotg. și al doilea termen al parantezei din (1), termenul general se scrie:

$$u_n = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3^n}\operatorname{cotg}\frac{a}{3^n} - \frac{1}{3^{n-1}}\operatorname{cotg}\frac{a}{3^{n-1}}\right).$$

Dând lui n, valorile 0, 1, 2, 3, . . . n, obținem:

$$u_0 = \frac{1}{4}\left(\operatorname{cotg} a - 3\operatorname{cotg} 3a\right)$$

$$u_1 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\operatorname{cotg}\frac{a}{3} - \operatorname{cotg} a\right)$$

$$u_2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3^2}\operatorname{cotg}\frac{a}{3^2} - \frac{1}{3}\operatorname{cotg}\frac{a}{3}\right)$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$u_{n-1} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3^{n-1}}\operatorname{cotg}\frac{a}{3^{n-1}} - \frac{1}{3^{n-2}}\operatorname{cotg}\frac{a}{3^{n-2}}\right)$$

$$u_n = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3^n}\operatorname{cotg}\frac{a}{3^n} - \frac{1}{3^{n-1}}\operatorname{cotg}\frac{a}{3^{n-1}}\right).$$

Adunând egalitățile de mai sus, obținem:

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3^n}\operatorname{cotg}\frac{a}{3^n} - 3\operatorname{cotg} 3a\right)$$

și limita acestei sume depinde numai de:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}\operatorname{cotg}\frac{a}{3^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\operatorname{tg}\dfrac{\dfrac{a}{3^n}}{a}\,a} = \frac{1}{a}$$

ca atare limita sumei căutate este:

$$\lim\,(u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a} - \operatorname{cotg} 3a\right)$$

Observare. 1°. Rezolvitorul acestei probleme a găsit limita: $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a} - \operatorname{cotg} a\right)$ din cauză că a neglijat termenul u_0, însă numai pentru $n = 0$ obținem primul termen al sumei din problema 3949 și deci nu trebuia neglijat.

2°. Este interesant de studiat semnul acestei limite în funcție de valorile posibile ale parametrului *a*.

Cpt. Gh. N.

PROBLEMA 4039. *Hiperbolele lui* Apollonius *a 2 puncte* A *și* B *față de o conică* (C) *se taie într'un punct* I *de pe dreapta* AB.

Ad. C. Gheorghiu.

Soluție dată de D-l Vasu Vasile.

OM și OM' fiind 2 diametrii conjugați ai conicei date, hiperbola lui Apollonius a unui punct A față de conica (C) este locul geometric al punctului P situat pe OM și pe perpendiculara din A pe OM', când cei 2 diametrii sunt variabili.

Date fiind cele 2 puncte A și B să considerăm cazul particular când OM' este perpendiculară pe AB. In acest caz atât punctul corespunzător lui A cât și cel corespunzător lui B sunt unul și același punct căci se află ambele pe OM precum și pe perpendicularele din A și B pe OM' cari sunt chiar AB.

Deci cele 2 hiperbole au un punct comun situat pe dreapta AB și pe diametrul conjugat direcției perpendiculare pe AB.

Notă. Au dat frumoase soluții analitice acestei probleme D-nii: Sublt. I. Gh. Zamfirescu, I. Cârstoiu, Cezar Coșniță și M. Margulius.

M. G.

PROBLEMA 4041. *La care patrate de patru cifre, intervertind ordinea ultimelor două cifre, dăm peste un cub?*

E. MEREUȚĂ.

Soluție dată de D-l Sublt. C. IONESCU-ȚIU.

Fie N cubul din problemă. Acesta având patru cifre poate fi

1331, 1728, 2197, 2754, 3375

4096, 4913, 5832, 6859, 8000, 9261.

Dintre acestea, eliminăm pe cele cari n'au cifra zecilor terminație de patrat perfect; rămân cuburile

2197, 2754, 4096, 4913, 6859, 8000, 9261.

Ținând seamă de ultimele două cifre ale unui patrat perfect și eliminând astfel pe cele ce nu convin, rămân doar cuburile

4096, 9261

dintre cari ultimul este soluția unică, de oarece

$$9261 = 21^3 \quad , \quad 9216 = 96^2.$$

Notă. A mai găsit această soluție și D-l E. MAREȘ.

---

*PROBLEMA 4113. *Se cere suma complimentelor aritmetice ale numerilor: 101, 2112, 32223, 433334, . . . pentru* $n \leqslant 9$.

V. I. CRIVĂȚ.

Soluție dată de D-nii: N. N. ALDEA (student București) și M. MARGULIUS (Șc. Politehnică București).

Complimentele aritmetice sunt:

899, 7888, 67777, 566666, etc. . . .

Suma lor va fi:

$$S = 899 + 7888 + 67777 + \ldots + \underbrace{(9-n)\,(10-n)\ldots(10-n)}_{n+2}$$

$$= 999 + 8888 + 77777 + \ldots + (10-n)\,(10-n)\ldots(10-n) - (100 + 1000 + \ldots + 10^{n+1}).$$

Sau :

$$S = 9(100 + 10 + 1) + 8(1000 + 100 + 10 + 1) + \ldots$$
$$\ldots + (10 - n)[10^{n+1} + 10^n + 10^{n-1} + \ldots + 10 + 1]$$
$$- 10^2 \cdot \frac{10^{n-1}}{9} .$$

Care se mai poate scrie :

$$S = 9 \cdot \frac{10^3 - 1}{9} + 8 \cdot \frac{10^4 - 1}{9} + \ldots$$
$$\ldots + (10 - n)\frac{10^{n+2} - 1}{9} - \frac{10^{n+2} - 10^2}{9}$$
$$= \frac{1}{9}\left[10^3 \cdot (9 + 8 \cdot 10 + \ldots + (10 - n)\, 10^{n-1})\right.$$
$$\left. - \frac{n\,(19 - n)}{2} - (10^{n+2} - 100)\right] .$$

Rămâne să calculăm suma :

$$S_1 = 9 + 8 \cdot 10 + 7 \cdot 10^2 + \ldots + (10 - n) \cdot 10^{n-1}.$$

Pentru aceasta, derivând identitatea :

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^p = \frac{x^{p+1} - 1}{x - 1}$$

obţinem :

$$a)\ 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + px^{p-1} = \frac{-(p+1)x^p + px^{p+1} + 1}{(x - 1)^2}$$

Apoi :

$$b)\ q + qx + qx^2 + \ldots + qx^{p-1} = \frac{q \cdot x^p - q}{x - 1} .$$

Scăzând *a)* din *b)* ne dă :

$$(q - 1) + (q - 2)\, x + (q - 3)\, x^2 + \ldots + (q - p)\, x^{p-1} =$$
$$\frac{-px^{p+1} + (p + 1)\, x^p - 1 + (x - 1)(x^p - 1)\, q}{(x - 1)^2} .$$

Făcând $q = x = 10$ şi $p = n$, obţinem suma cerută :

$$S = \frac{1}{9}\left[\frac{(10 - n) \cdot 10^{n+4} - (9 - n) \cdot 10^{n+3} - 81 \cdot 10^{n+2} - 82 \cdot 900}{9^2}\right.$$
$$\left. - \frac{n\,(19 - n)}{2}\right] .$$

Notă. Numerile date se mai pot scrie :

$(10^2 + 1 + 0)$, $(10^3 + 1 + 1111)$, . . . $(10^{n+2} + 1 + \underbrace{nn \ldots n}_{n3})$.

Pentru a obține complimentele lor, ar trebui să le scădem respectiv din :

$$10^3, 10^4 , \ldots 10^{n+3}.$$

Insumând cele două șiruri și scăzând pe primul din al doilea, obținem suma din problemă.

Această cale se face cu simple însumări, singura însumare mai grea fiind :

$$\sum_{1}^{n} i.\ 10^{i-1}.$$

I. L.

PROBLEMA 4159. *Să se stabilească identitățile :*

$$E_1 = 2\cos rx \sum_{k=0}^{n-1} \cos(m \pm kr)\, x - \sum_{k=-1}^{n-2} \cos(m \pm kr)\, x =$$

$$= \frac{\sin \frac{1}{2} nrx}{\sin \frac{1}{2} rx} \cos \frac{2m \pm r(n+1)}{2} x.$$

$$E_2 = 2\cos rx \sum_{k=0}^{n-1} \sin(m \pm kr)\, x - \sum_{k=-1}^{n-2} \sin(m \pm kr)\, x =$$

$$= \frac{\sin \frac{1}{2} nrx}{\sin \frac{1}{2} rx} \sin \frac{2m \pm r(n+1)}{2} x.$$

I. V. MĂTIEȘ.

I. *Soluție* dată de D-nii : CHIRIAC CONST. și I. SAGER.

Desvoltând sumele din primul membru și înlocuind produsele de cosinusuri prin sume de cosinusuri, vom obține :

$$E_1 = \cos(m \pm r)\, x + \cos(m \pm 2r)\, x + \ldots + \cos(m \pm nr)\, x.$$

La fel vom obține pentru a doua identitate :

$$E_2 = \sin(m \pm r)\, x + \sin(m \pm 2r)\, x + \ldots + \sin(m \pm nr)\, x$$

cari sunt sume de sinusuri sau cosinusuri de arce în progresie aritmetică cu rația $\pm rx$. Insumându-le cu formulele cunoscute, găsim respectiv membrul al doilea al identităților propuse.

II. *Soluție* dată de D-nii : HAR. IONESCU-BISS, C. IVĂNESCU și M. MARGULIUS.

Efectuăm mai întâiu sumele din primii membrii ai identităţilor propuse; avem:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(m \pm kr)x = \frac{\sin\frac{nrx}{2}}{\sin\frac{rx}{2}} \cos\left[mx \pm \frac{n-1}{2} rx\right]$$

$$\sum_{k=-1}^{n-2} \cos(m \pm kr)x = \frac{\sin\frac{nrx}{2}}{\sin\frac{rx}{2}} \cos\left[mx \pm \frac{n-3}{2} rx\right]$$

deci:

$$E_1 = \frac{\sin\frac{nrx}{2}}{\sin\frac{rx}{2}} \left[2\cos x \cos\left[mx \pm \frac{n-1}{2} rx\right] - \cos\left[mx \pm \frac{n-3}{2} rx\right]\right]$$

şi se găseşte uşor că expresiunea din paranteză este egală cu

$$\cos\frac{2m \pm r(n+1)}{2} x.$$

Analog procedăm şi cu a doua identitate.

PROBLEMA 4229. *Pe două drepte fixe, care se întâlnesc în punctul* O, *se iau relativ punctele* A *şi* B, *astfel în cât*

$$OA + OB = const.$$

Se descriu cercurile cu centrele în A *şi* B, *având ca raze respectiv lungimile* OB *şi* OA.

Se cer locurile geometrice descrise de punctece M *şi* N *de intersecţie ale celor două cercuri.*

COLONEL VASILE NEGREI.

Soluţie dată de D-nii: C. N. AVRAM (Sub-Locot. din Geniu), M. S. ZIFF, N. N. MIHĂILEANU, I. I. PETRESCU şi I. GH. ŞABAC (Lic. Militar, Mânăstirea Dealului).

Fie k valoarea constantă a sumei celor 2 segmente. Se iau pe Ox şi Oy lungimele OP şi OQ egale cu k. P şi Q sunt evident puncte de ale locului.

Construim paralelogramul OBMA. Punctul M este un punct al locului căci

$$MB + MA = OA + OB = k.$$

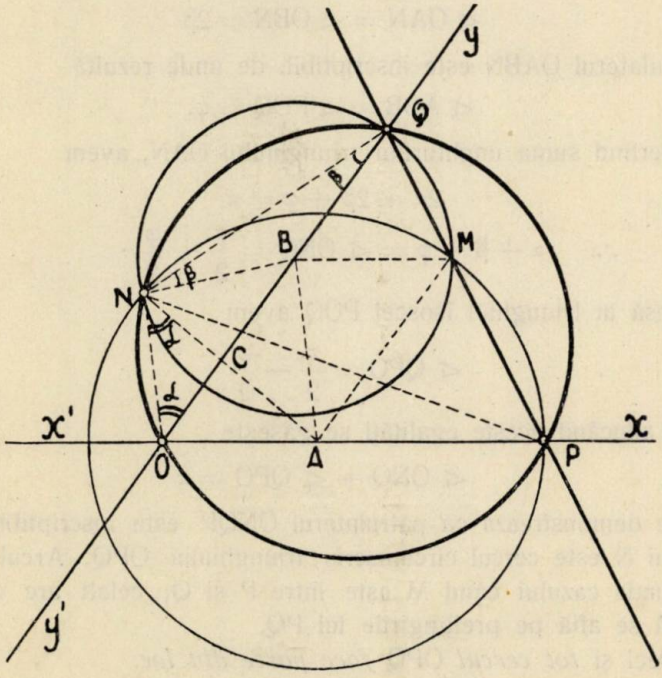
Triunghiul MAP este isoscel căci

$$MA = OP - OA = AP$$

și deci

$$M\hat{P}A = 180^0 - 2M\hat{A}P = \pi - 2\varphi$$

unde φ este valoarea unghiului O.



Dar din triunghiul isoscel POQ se deduce că și unghiul QPO este egal tot cu $\pi - 2\varphi$, deci punctele P, M, Q sunt colineare și locul lui M este dreapta PQ.

Dacă se ia A pe prelungirea Ox' a lui Ox atunci OA este negativ și B cade pe Oy între Q și $+\infty$ iar M vine pe prelungirea lui PQ. La fel dacă se ia OB negativ atunci M cade pe prelungirea lui QP.

Deci *toată dreapta* PQ *și prelungirile ei fac parte din loc.*

Fie N al doilea punct de intersecție al celor două cercuri. N va fi simetricul lui M față de AB.

Triunghiurile AON și BON sunt egale ca având toate laturile egale. Deci

$$\sphericalangle BON = \sphericalangle ANO = \alpha.$$

Notând cu β unghiul BQN, din triunghiul isoscel BQN se scoate

$$\sphericalangle OBN = 2\beta$$

și cum triunghiurile OAN, OBN sunt egale, rezultă

$$\sphericalangle OAN = \sphericalangle OBN = 2\beta$$

și patrulaterul OABN este inscriptibil, de unde rezultă

$$\sphericalangle AOB = \sphericalangle POQ = \varphi.$$

Scriind suma unghiurilor triunghiului OAN, avem

$$2\alpha + 2\beta + \varphi = \pi$$

$$\therefore \quad \alpha + \beta + \varphi = \sphericalangle ONQ = \frac{\pi}{2} + \frac{\varphi}{2}.$$

Însă în triunghiul isoscel POQ avem

$$\sphericalangle QPO = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}$$

așa că aducând aceste egalități se găsește

$$\sphericalangle ONQ + \sphericalangle QPO = \pi$$

ceea ce demonstrează că patrulaterul ONQP este inscriptibil, deci locul lui N este cercul circumscris triunghiului OPQ. Arcul POQ corespunde cazului când M este între P și Q, celalt arc cazului când M se află pe prelungirile lui PQ.

Deci și *tot cercul* OPQ *face parte din loc.*

Notă. 1°. Foarte bune soluțiuni prin geometrie analitică de la D-nii: I. N. Sager (Prof. Râmnicul-Sărat); C. Pârvulescu (Student, București) și Em. Mereuță (Student).

2°. Pentru complectarea soluției geometrice ar fi trebuit să se demonstreze și reciproca, anume că *fiecare punct al cercului* OPQ *și al dreptei* PQ *este un punct al locului.*

Iată o soluție a acestor reciproce.

Fie N un punct pe cercul POQ. Perpendiculara pe NQ în mijlocul său tae pe Oy în B. Paralela din B la Ox tae pe PQ în M. Evident că

$$BN = BQ = BM$$

căci triunghiul BMQ este isoscel, BM fiind paralelă cu OP, deci B este centrul cercului NQM.

Paralela din M la OQ tae pe OP în A. Avem

$$MB + MA = OB + BQ = k$$

$$\therefore \qquad OB + OA = k.$$

Notând cu β unghiul NQO egal cu BNQ, patrulaterul inscriptibil ONQP dă succesiv

$$O\hat{N}B + \beta + Q\hat{P}O = \pi$$

$$\therefore \qquad O\hat{N}B = \frac{\pi}{2} + \frac{\varphi}{2} - \beta = N\hat{O}A$$

deci ONBA care are laturile NB şi OA egale este un trapez isoscel şi

$$AN = OB = AM$$

adică N şi M sunt la intersecţia cercului B (OA) cu A (OB).

Gh. B.

PROBLEMA 4260. *De un punct fix* F *se prinde un fir* Fl, *iar de* I, *prin firele* IA, IB, IC, *vârfurile unui triunghiu* ABC. *Triunghiul fiind presupus omogen şi greu, care sunt condiţiunile ca poziţia lui de echilibru să fie orizontală?*

I. Ionescu.

Soluţie dată de D-nii: N. Sager (profesor, Râmnicul-Sărat), M. Margulius (Şcoala Politehnică, Bucureşti), D. Mavrodin (elev cl. VII, liceul „M. Eminescu", Bucureşti) şi D. Rotaru (Bucureşti).

In starea de echilibru, firul Fl va fi vertical şi prelungirea lui va trece prin centrul de greutate G al triunghiului ABC. Cum ABC e orizontal şi IG vertical, această dreaptă e înălţime a tetraedrului IABC.

Să punem:

$$IA = a', \quad IB = b', \quad IC = c', \quad IG = h.$$

Fie AA' mediana dusă din A în triunghiul ABC. Triunghiul dreptunghic IAG ne dă:

$$\overline{AG}^2 = \overline{AI}^2 - \overline{AG}^2 = \overline{AI}^2 - (2AA'/3)^2 = \overline{AI}^2 - 4\overline{AA'}^2/9$$

$$h^2 = a'^2 - 4\overline{AA'}^2/9.$$

Se ştie însă că mediana e dată de relaţia:

$$2\overline{AA'}^2 + \overline{BC}^2 = 2(\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2),$$

$$\therefore \quad \overline{AA'}^2 = \tfrac{1}{4}[2(b^2 + c^2) - a^2].$$

Inlocuind în expresiunea lui h avem:

$$h^2 = a'^2 - (2b^2 + 2c^2 - a^2)/9,$$

şi adăogând de o parte şi de alta $a^2/3$ găsim:

$$a'^2 + \tfrac{1}{3}a^2 = h^2 + 2(a^2 + b^2 + c^2)/9.$$

Partea a doua a acestei egalităţi nu se schimbă dacă pornim dela muchiile $\overline{IB}$ sau $\overline{IC}$ în loc de $\overline{IA}$. De aci reiese că condiţiunea cerută este:

$$a^2 + 3a'^2 = b^2 + 3b'^2 = c^2 + 3c'^2.$$

PROBLEMA 4262. *Regulamentul unei Şcoale prevede că un elev nu este primit la examenul general al unui curs dacă a absentat nemotivat la acel curs mai mult de o cincime din numărul lecţiunilor sau a absentat motivat mai mult de o pătrime din numărul lecţiunilor.*

La un curs, care are l *lecţiuni, un elev a făcut* m *absenţe motivate şi* n *nemotivate. Care este condiţia ca un elev să poată fi admis la examenul general al acelui curs?*

I. Ionescu.

Soluţie dată de D-nii: Sub-Locot. C. N. Avram, Iancu N. Sager (profesor, Râmnicul-Sărat), Gh. Silaş (student, Cluj), M. S. Ziff (Şcoala politecnică, Bucureşti), Al. D. Stoica (Liceul „Marele Voevod Mihai", Bucureşti), Vintilă A. Grigorescu (Liceul militar „N. Filipescu", Mânăstirea Dealului). N. Mănescu (Lc. Eminescu, Bucureşti).

Din punct de vedere al consecinţelor, $l/5$ absenţe nemotivate sunt echivalente cu $l/4$ absenţe motivate. Deci o absenţă nemotivată echivalează cu $5\,l/4 = 1{,}25\,l$ absenţe motivate. Prin urmare, dacă un elev are m absenţe motivate şi n nemotivate, este ca şi cum ar avea $(m + 1{,}25\,n)$ absenţe motivate. De aci rezultă condiţia:

$$m + 1{,}25\,n \leqslant l/4,$$

sau înmulțind cu 4 avem :

$$4m + 5n \leqslant l.$$

Puteam proceda și prin echivalarea absențelor motivate cu cele nemotivate și găseam același rezultat.

Notă. Un corespondent, — care se vede și din soluțiile altor probleme, că ține mult să absenteze la cursuri — găsește că Regulamentul dă dreptul unui elev să facă $l/4$ absențe motivate și $l/5$ nemotivate și că numai dacă le întrece pe toate, numai atunci profesorul are dreptul să-i refuze examenul. Conchide dar că problema nu-și are rostul. Așa ar fi dacă s'ar admite că se fac Regulamente imorale pentru folosul derbedeilor. Iată ce s'ar întâmpla cu un asemenea Regulament.

Să presupunem un curs de 100 lecțiuni. Un elev care a fost bolnav, poate absenta 25 lecțiuni. Dacă mai absentează o zi în plus, tot din cauza boalei, sau moartea unui părinte, sau pentru alte motive binecuvântate, și motivează absența, a pățit-o : trebue să reînceapă cursul la anul ! Dacă nu o motivează, apoi, cum are dreptul la 20 absențe nemotivate, poate să mai hoinărească încă 19 zile ! Ei bine ! Cu asemenea soluțiuni nu se împacă matematica !

I. I.

*EXERCIȚII

.. Să se arate că într'un triunghiu oarecare, avem relația

$$p = \frac{a \sin\frac{1}{2}B \sin\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}A} + a.$$

M. CHIRIȚĂ.

R. Avem succesiv

$$\frac{a \sin\frac{1}{2}B \sin\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}A} + a = \frac{a}{\sin\frac{1}{2}A}(\sin\tfrac{1}{2}B \sin\tfrac{1}{2}C + \sin\tfrac{1}{2}A)$$

$$= \frac{2R \sin\frac{1}{2}A \cos\frac{1}{2}A}{\sin\frac{1}{2}A}[\sin\tfrac{1}{2}B \sin\tfrac{1}{2}C + \cos\tfrac{1}{2}(B + C)] = 2R \cos\tfrac{1}{2}A \cos\tfrac{1}{2}B \cos\tfrac{1}{2}C$$

formulă care știm că reprezintă tocmai semiperimetrul triunghiului.

2. Notațiile fiind cele obișnuite într'un triunghiu, să se stabilească identitatea :

$$\Sigma (a^n - b^n) \frac{\sin^n \cdot C}{C^n} = 0.$$

MARIUS MARGULIUS.

R. Este generalizarea exercițiului 8 din Vol. XXXVI, pag. 37.

Se vor utiliza aceleași relații ca în locul citat, ridicate însă, în prealabil la puterea $n - a$ în loc de puterea 2-a.

3. Dacă

$$\Sigma \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{1}{2}$$

atunci suma

$$\Sigma \operatorname{tg}^2 x + 1$$

este un pătrat perfect.

SUB.-LOCOT. I. C. SAVIN.

R. Avem

$$(\Sigma \operatorname{tg} x)^2 = \Sigma \operatorname{tg}^2 x + 2 \Sigma \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$$

care în baza relației din enunț devine

$$\Sigma \operatorname{tg}^2 x + 1 = (\Sigma \operatorname{tg} x)^2.$$

PROBLEME PROPUSE

*4291. Se cer patratele de opt cifre la care primele patru cifre sunt identice iar ultimele patru formează un patrat.

V. THÉBAULT.

*4292. Un număr de trei cifre se divide cu 11. Dacă permutăm între ele, fie primele două cifre, fie ultimele două, dăm peste numere prime. Să se găsească acel număr.

I. IONESCU.

*4293. Se consideră în același plan un triunghiu ABC și o dreaptă Δ. Dreapta Δ întâlnește latura AB în B' și latura AC în C'. Fie B'' și C'' picioarele perpendicularelor coborîte din B și C pe Δ, B_1 și C_1 mijloacele segmentelor BB', CC' și A' punctul de întâlnire al dreptelor $B''B_1$ și $C''C_1$.

1°. Să se arate că $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B''A'C''$.

2°. Să se găsească locul geometric al punctului A', când

dreapta Δ şi punctele B şi C sunt fixe, iar vârful A descrie un cerc trecând prin B şi C.

3°. Să se găsească locul geometric al punctului A', când dreapta Δ şi punctele B şi C sunt fixe, iar A descrie o dreaptă, ce trece prin B.

4°. Să se găsească locul geometric al punctului A', când triunghiul ABC este fix, iar dreapta Δ se deplasează paralel cu o direcţie fixă în plan.

N. G. Botea.

*4294. Se dă triunghiul ABC şi se cere să se determine regiunea din planul său în care se află punctele M pentru care avem una din următoarele 4 neegalităţi:

$$AB \pm AC \gtrless MB + MC.$$

Col. Gh. Buicliu.

*4295. Să se arate că dacă avem

$$x + y + z = 0$$

avem şi

$$\frac{x^2-1}{x^2+1} + \frac{y^2-1}{y^2+1} + \frac{z^2-1}{z^2+1} + \frac{x^2-1}{x^2+1} \cdot \frac{y^2-1}{y^2+1} \cdot \frac{z^2-1}{z^2+1} = \frac{4(x^2y^2z^2-1)}{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)}.$$

Gh. Th. Gheorghiu.

*4296. Să se arate că:

$$\begin{vmatrix} (a+b)^2 & b^2 & a^2 \\ b^2 & (b+c)^2 & c^2 \\ a^2 & c^2 & (a+c)^2 \end{vmatrix} = 2(ab+bc+ca)^3.$$

N. C.

*4297. Să se rezolve un triunghiu cunoscând un unghiu, latura opusă precum şi produsul lungimilor bisectoarelor interioare ale celorlalte două unghiuri. Discuţie.

M. Ghermănescu.

4298. Dintre toate triunghiurile având unghiurile A, B şi C aceleaşi iar una din laturi egală cu unul din sinusurile unghiurilor date, care este acela de arie maximă?

Căpitan Gh. Niculescu.

*4299. Să se rezolve ecuaţiunea:

$$\frac{(x+a+b)^2}{x+2c}+\frac{(x+b+c)^2}{x+2a}+\frac{(x+c+a)^2}{x+2b}+3x+2(a+b+c)=0$$

ştiind că rădăcinile ei sunt expresiuni raţionale în a, b, c.

Cezar Coşniţă.

4300. Să se demonstreze că dacă α, β sunt axele elipsei lui Steiner, circumscrisă unui triunghiu de suprafaţă S, iar w este unghiul lui Brocard al acestui triunghiu, atunci

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{1}{3}\sqrt{2S(3+\operatorname{cotg} w)}.$$

I. C. Vasiliu.

ERATĂ. La problema 4285 dela pag. 478. Anul XXXVIII, se va scrie în loc de:

$$D_c E_b = BD_c \cdot CE_b \ , \ D'_c E'_b = BD'_c \cdot CE'_b \ ,$$

egalităţile:

$$\overline{D_c E_b}^2 = BD_c \cdot CE_b \ , \ \overline{D'_c E'_b}^2 = BD'_c \cdot CE'_b \ .$$

Articolele, notele și problemele însemnate cu * se referă la matematicile elementare (cursul de liceu).

Dela apariția ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Avram N. C. Subloc. (4268); *Chiriță M.* (4221); *Dobrescu P.* (4221); *Ghiocel V.* (4175, 78, 96, 208, 65, 76); *Ivănescu C.* (4278, N, P); *Mănescu M.* (4083, 267, 71, 72, 78); *Margulius M.* (4278); *Mereuță Em.* (4242, P); *Mihăileanu N. N.* (2081, 110, 3914, 4286); *Savin C. I. Subloc.* (E, N, P); *Silas Gh.* (4265, 67, 68); *Thébault V.* (A); *Ziff S. M.* (4170, 96, 242, 61, 65, 70, 72).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât și cele de propus de **geometrie,** *a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.*

Manuscrisele se vor scrie **pe o singură parte a foii și nu se vor tratà mai multe chestiuni diferite pe aceiași foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipì sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exercițiile, recreațiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA", trebue să fie originale, iar nu luate din cărți sau reviste speciale de matematici.

Colecțiunea „GAZETEI MATEMATICE“

«Gazeta Matematică» vinde ani completi broșați cu prețul de 400 lei volumul, afară de volumele: X, XVII, XVIII, XIX, XX și XXI care se vând cu prețul de 500 lei volumul.

Volumele: I, XV și XXV sunt epuizate.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu** și **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **N. Abramescu,** *Lecțiunile de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediția IV revăzută și adăogită,* 1924 (Epuizată).

3. **A. G. Ioachimescu** și **G. Țițeica,** *Culegere de probleme de mecanică și geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme și o planșă) (Epuizată).

4. **Tr. Lalescu** și **Șt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografie* (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu,** *Tratat de geometrie analitică,* Fascicola I *Ediția II revăzută și adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).

Idem, Fascicola IV Aplicațiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150,—

6. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10,—

7. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediția III-a revăzută și îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. Lei 180,—

8. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu** și **G. Țițeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

9. **G. Țițeica,** *Culegere de probleme de geometrie* Lei 150,—

La aceste prețuri se vor adăogà taxele poștale pentru expediție.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul.* (Ediția II) Lei 150,—

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentu de 200 lei anual, se plătește înainte și începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamațiunile și cererile pentru cărți din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete numai D-lui: Inginer **Al. D. Bunescu,** Directorul General al Monitorului Oficial și Imprimeriilor Statului, B-dul Elisabeta 29, București I.

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii și orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie și expediție, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Călușei 23, București 4.

BIBLIOTECA CENTRALĂ

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

BIBLIOTECA CENTRALĂ ASOCIAȚIUNEA SIBIIU

ANUL XXXIX

NUMĂRUL 2. — OCTOMVRIE 1933

SUMARUL

1. Sur les points de Feuerbach . . . . . *V. Thébault*
2. Cărți vechi de matematică . . . . . *I. Ionescu*
3. Raportul comisiunii pentru acordarea premiului „General Sc. Panaitescu".
4. Note matematice: 4 — 8.
5. Chestiuni de examen.
6. Bibliografie.
7. Cereri 227 — 228.
8. Diverse.
9. Probleme rezolvate: 3517, 3978, 4106, 4114, 4137, 4221.
10. Exerciții: 4 — 7.
11. Probleme propuse: 4301 — 4310.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREȘTI

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAȚIONALĂ
1933

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: Colonel **Gh. Buicliu** din Ministerul Apărării Naţionale; **C. D. Orăşanu,** Inginer, Licenţiat în Matematici, Conferenţiar la Şcoala Politechnică «Regele Carol II» din Bucureşti, Profesor la Şcoalele Aeronautice; **Al. D. Bunescu,** Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice" se vor trimite D-lui Inginer-Şef GH. ILIESCU, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret, Bucureşti 6.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29 Bucureşti 1) în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 691, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 214, 36, 70, 71, 97, 99, 310, 33, 67, 84, 86, 99, 412, 50, 553, 650, 79, 711, 29, 64, 876, 906, 14, 29, 59, 87, 2003, 04, 17, 70, 74, 111, 70, 338, 405, 30, 39, 66, 77, 502, 03, 56, 77, 87, 607, 09, 23, 38, 55, 65, 84, 92, 709, 13, 17, 35, 69, 80, 814, 65, 86, 89, 909, 12, 26, 36, 47, 3005, 45, 69, 81, 127, 61, 69, 208, 30, 55, 60, 98, 300, 04, 09, 10, 16, 18, 50, 405, 12, 24, 25, 45, 72, 89, 93, 522, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 88, 608, 20, 22, 27, 32, 46, 47, 57, 65, 81, 82, 84, 99, 700, 03, 33, 36, 93, 804, 08, 29, 36, 44, 53, 64, 80, 96, 909, 13, 15, 16, 18, 20, 33, 44, 83, 87, 4010, 13, 30, 34, 45, 53, 59, 62, 68, 70, 73, 85, 102, 03, 11, 12, 18, 19, 23, 32, 47, 48, 50, 51, 55, 63, 67, 69, 91, 92, 201, 03, 06, 09, 10, 13, 25, 26, 30, 36, 37, 40, 43, 46, 47, 48, 49, 52, 56, 57, 74, 75, 77, 79, 80, 81, 83, 85, 87, 88, 89, 90, 91, 94, 95, 97, 98, 99, 300, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procură dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29. Bucureşti 1), cu preţul de 12 lei.

„SPHINX“

REVUE MENSUELLE DES QUESTIONS RÉCRÉATIVES

FONDÉE EN 1931

REVUE UNIQUE DANS SON GENRE

DANS LE MONDE ENTIER

Abonnements 1 an: Belgique, 30 fr.; France 25 fr.
Etranger, 7 belgas

ADMINISTRATION:

SPHINX, 75, Rue Philippe Baucq

R. C. 51922 Tel : 33.48.58

Ch. postaux { Bruxelles No. 192338
Paris No. 160061

SUR LES POINTS DE FEUERBACH

1. Notations. Soient un triangle ABC, ($BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $a > b > c$); A_1, B_1, C_1, les milieux des côtes; A', B', C', les pieds des hauteurs; G, H, le centre de gravité et l'orthocentre; (O), (O_9), (I), (I_a), (I_b), (I_c), les cercles circonscrit, des neuf points et tritangents; R, $\frac{R}{2}$, r, r_a, r_b, r_c, leurs rayons; D, E, F, D_a..., leurs contacts sur BC, CA, AB; α, β, γ, les points eulériens; φ, φ_a, φ_b, φ_c, les points de FEUERBACH.

2. Nous avons obtenu les relations suivantes qu'il nous semble intéressant de répandre.

$$\begin{aligned}
\varphi\,\overline{\varphi_a}^2 &= R^2\,(b-c)^2 : (R-2r)\quad (R+2r_a)\\
\varphi\,\overline{\varphi_b}^2 &= R^2\,(a-c)^2 : (R-2r)\quad (R+2r_b)\\
\varphi\,\overline{\varphi_c}^2 &= R^2\,(a-b)^2 : (R-2r)\quad (R+2r_c) \qquad (1)\\
\varphi_b\,\overline{\varphi_c}^2 &= R^2\,(b+c)^2 : (R+2r_b)\,(R+2r_c)\\
\varphi_c\,\overline{\varphi_a}^2 &= R^2\,(c+a)^2 : (R+2r_c)\,(R+2r_a)\\
\varphi_a\,\overline{\varphi_b}^2 &= R^2\,(a+b)^2 : (R+2r_a)\,(R+2r_b)\ ^{1}).
\end{aligned}$$

$$\varphi\overline{A_1}^2 = R\,(b-c)^2 : 4\,(R-2r)\ ,\quad \varphi\overline{B_1}^2 = R\,(a-c)^2 : 4\,(R-2r),$$

$$\varphi\overline{C_1}^2 = R\,(a-b)^2 : 4\,(R-2r)\ ^{2}). \qquad (2)$$

. . . . . .

$$\begin{aligned}
\varphi\overline{A'}^2 &= R\,(b-c)^2\,(p-a)^2 : a^2\,(R-2r)\\
\varphi\overline{B'}^2 &= R\,(a-c)^2\,(p-b)^2 : b^2\,(R-2r) \qquad (3)\\
\varphi\overline{C'}^2 &= R\,(a-b)^2\,(p-c)^2 : c^2\,(R-2r)\ ^{2}).
\end{aligned}$$

. . . . . .

$$\begin{aligned}
\varphi\overline{D}^2 &= (b-c)^2\,(p-a)\,r : a\,(R-2r)\\
\varphi\overline{E}^2 &= (a-c)^2\,(p-b)\,r : b\,(R-2r) \qquad (4)\\
\varphi\overline{F}^2 &= (a-b)^2\,(p-c)\,r : c\,(R-2r)\ ^{3}).
\end{aligned}$$

. . . . . .

1) *Mathesis*, 1922 — 118.

2) *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1932 — 289.

3) *Mathesis*, 1929 — 354.

Ces formules nous ont donné d'abord les *expressions des coordonnées normales absolues* x, y, z, du points φ, par rapport à ABC :

$$x = \frac{(b-c)^2\,(p-a)}{2a\,(R-2r)} \quad , \quad y = \frac{(a-c)^2\,(p-b)}{2b\,(R-2r)}, \qquad (5)$$

$$z = \frac{(a-b)^2\,(p-c)}{2c\,(R-2r)}\,;\ ^{1})$$

. . . . . .

puis celles des distances de φ aux sommets A, B, C :

$$\varphi\overline{A}^2 = \frac{2R\,[bc - r\,(4R+r)] - (b^2+c^2-a^2)\,r}{2\,(R-2r)}$$

$$\varphi\overline{B}^2 = \frac{2R\,[ca - r\,(4R+r)] - (c^2+a^2-b^2)\,r}{2\,(R-2r)} \qquad (6)$$

$$\varphi\overline{C}^2 = \frac{2R\,[ab - r\,(4R+r)] - (a^2+b^2-c^2)\,r}{2\,(R-2r)}\ .$$

. . . . . .

Ces relations conduisent directement à la pluparts des propriétés du points de FEUERBACH. Nous les appliquerons ici à l'étude de quelques triangles spéciaux.

Pour fixer les idées, nous considérons seulement le point φ relatif au cercle inscrit (L).

3. *Sur le triangle* $\varphi B = \varphi C$. Les égalités (G) donnent la suivante :

$$(c-b)\,[aR - (b+c)\,r] = 0,$$

laquelle est vérifiée soit lorsque $c = b$, soit pour

$$aR = (b+c)\,r\ ^{2}).$$

Voici quelques propriétés et relations concernant ce dernier triangle.

Le point φ *de* FEUERBACH, *situé sur la médiatrice* OA_1, *est symétrique de* O *par rapport à* B_1C_1.

---

1) *Mathesis*, 1929, *loc. cit.*

2) V. CRISTESCU, *Mathesis*, 1923 — 375.

Ces formules nous ont donné d'abord les *expressions des coordonnées normales absolues* x, y, z, du points φ, par rapport à ABC :

$$x = \frac{(b-c)^2\,(p-a)}{2a\,(R-2r)} \quad , \quad y = \frac{(a-c)^2\,(p-b)}{2b\,(R-2r)}, \qquad (5)$$

$$z = \frac{(a-b)^2\,(p-c)}{2c\,(R-2r)}\,;\ ^{1})$$

. . . . . .

puis celles des distances de φ aux sommets A, B, C :

$$\varphi\overline{A}^2 = \frac{2R\,[bc - r\,(4R+r)] - (b^2+c^2-a^2)\,r}{2\,(R-2r)}$$

$$\varphi\overline{B}^2 = \frac{2R\,[ca - r\,(4R+r)] - (c^2+a^2-b^2)\,r}{2\,(R-2r)} \qquad (6)$$

$$\varphi\overline{C}^2 = \frac{2R\,[ab - r\,(4R+r)] - (a^2+b^2-c^2)\,r}{2\,(R-2r)}\ .$$

. . . . . .

Ces relations conduisent directement à la pluparts des propriétés du points de FEUERBACH. Nous les appliquerons ici à l'étude de quelques triangles spéciaux.

Pour fixer les idées, nous considérons seulement le point φ relatif au cercle inscrit (L).

3. *Sur le triangle* $\varphi B = \varphi C$. Les égalités (G) donnent la suivante :

$$(c-b)\,[aR - (b+c)\,r] = 0,$$

laquelle est vérifiée soit lorsque $c = b$, soit pour

$$aR = (b+c)\,r\ ^{2}).$$

Voici quelques propriétés et relations concernant ce dernier triangle.

Le point φ *de* FEUERBACH, *situé sur la médiatrice* OA_1, *est symétrique de* O *par rapport à* B_1C_1.

---

1) *Mathesis*, 1929, *loc. cit.*

2) V. CRISTESCU, *Mathesis*, 1923 — 375.

Comme $\varphi A'$ est un diamètre du cercle (O_9),

$$\varphi A' = R = AO,$$

et *la droite* OI *est perpendiculaire à* OA [1]).

De plus,

$$\varphi A = OA' = \varphi H,$$

en effet, le triangle $A'\varphi H$ est isoscèle puisque $\varphi\alpha$ est parallèle à BC.

Enfin, on a

$$O\varphi = A'H \ , \ h_a = AA' = R + r^{2}) \ ; \ A'D = OI = \frac{(c-b)(p-a)}{a};$$

$$A_1A' = OI \,.\, R : (R - 2r) \ ; \ DA_1 = OI \,.\, r : (R - 2r) = \frac{c-b}{2};$$

$$\varphi A_1 = Rr : (R - r) = OC_1 - OB_1 \ ; \ \varphi B_1 = OB_1 \ , \ \varphi C_1 = OC_1 \ ;$$

$$AI^2 = 2R\ (R - r) = (r_b - r)\ (r_c - r).$$

4. Les relations (2) et (3), prouvent que la condition nécessaire et suffisante pour que

$$\varphi B_1 = \varphi C_1 \ , \ \varphi B' = \varphi C',$$

est que le triangle ABC *soit isoscèle.*

5. La condition nécessaire et suffisante pour que le point φ de FEUERBACH soit situé sur la médiane AA_1, par exemple, se déduit des égalités (5), en observant que le rapport des distances de φ à BA et AC égale $y : z = c : b$.

On a ainsi la relation

$$(a - c)^2\ (p - b) = (a - b)^2\ (p - c),$$

qui, après réductions, donne

$$b^2 + c^2 = a\ (b + c)\ ^{3}).$$

V. THÉBAULT
Le Mans (France).

---

1), 2), V. CRISTESCU, loc. cit.

3) Nous avons obtenu cette propriété de φ en considérant directement ce triangle spécial, *(Nouvelles Annales de Mathématiques,* 1915).

CĂRȚI VECHI DE MATEMATICĂ

D-l Inginer DUMITRU LEONIDA posedă o colecțiune frumoasă de cărți vechi de știință: matematică, fizică, astronomie, geografie, inginerie, etc. în care se găsesc lucruri interesante. D-sa a binevoit a-mi încredința unele dintr'însele spre a le vedea și a spune câte ceva în *Gazeta Matematică*, pentru care îi exprim și aci mulțumirile mele.

I. **Indrizzo** | *del* | *nvovo soldato* | Diuiso in due parti | Nella prima si trata della Geometria: | prattica, e altre curiosità concernen | ti alla militare Architettura, | E nella seconda del modo di peruenire | alla dimentione d'ogni superficie, e | corpo, e come si debbia pore in | pianta ogni sorte di fortezze, Cit | tà, e Prouincie, con vn breue: trattato di Trigonometria | molto necessaria alla | prattica. | Il tutto Arricchito di molte figure, per mag | gior intelligenza. | D'ANT. MAVRITIO | VALPERGA. | Sargente Maggiore di Battaglia. | Per Sua Maesta | *Cristianissima.* | Parte Prima. | In Napoli, M.DC.LV. | Per Ettore Cicconio. Con Lic: de' Sup. | Ad Instanza di Gio | Alberto Tarino. |

(Trăsurile verticale arată trecerile dela un rând la altul).

Aceasta este coprinsul primei pagini a unui tratat de aritmetică, geometrie (312 pagini) și de trigonometrie (48 pagini) făcută pentru soldați, de un sergent-major. Cartea este dedicată „Al Serenissime Prencipe MAVRITIO DI SAVOIA", datată 1/I 1655. Urmează apoi două sonete dedicate aceluiași, dintre care reproduc pe al doilea: „Chinate ò Fasti insuperbiti al piede | Del gran Mauritio le Badiere in guerra | Al folgorar de gli occhi humile în terra | La Tracia Luna tramontar si vede | | S'impalisce ne l'esterna fede | Anco il Sol, ch'à suoi sguardi è cieco, & erra | E ben de l'Asia ogn' Astro al fin S'attera, | S'è de gli Allori, e delle Palme herede. | | Al girar di sua spada addopiar suole | Le Ruote sue la bellica Fortuna | E capogirli hauer la Tracia mole. | | E, s'el sangue Ottomano in se raguna, | Sarà nuoua Cometa; e vedra il Sole | Una Cometa scapigliar la Luna. |

De aci se vede că teama de Semiluna otomană a făcut pe sergentul nostru major să se îngrijească de educațiunea științifică a soldatului, pentru ca armatele să cadă pe ea ca o cometă care să o distrugă. Cometele acestea, însă, — fără aritmetică, geometrie și

trigonometrie, — au venit din altă parte peste Luna otomană: au fost armatele lui Ștefan-cel-Mare și Mihai Viteazul care au apărat Italia de invazia turcească!

După reproducerea actelor de autorizare pentru tipărire, conforme cu obiceiurile timpurilor, autorul face o prefață: „*Al lettore*". Acolo nu uită să spună: „*Nullus ignarus Geometriae ingrediatur*" arata importanța matematicilor pentru geografie, astronomie, architectură, citând autori, și se ocupă apoi de necesitatea acestor cunoștințe pentru soldați, cari trebue să cunoască hărțile, desemne de fortificații, etc. La fine arată cum să se găsească lungimea unităților de măsură de pe vremuri și face și o scară de ¼ picior.

Tratatul începe cu „*Discorsi della Geometria prattica, necessaria per approfittarsi il nuouo Soldato*". După un mic istoric, cu laude binemeritate lui EUCLIDE, trece la cele 4 operațiuni ale aritmeticei: a uni număr cu număr, a găsi restul, a înmulți, a împărți. Primele trei sunt dispuse ca și azi. Iată o împărțire:

$$\begin{array}{r|l} 12\,54 & 7 \\ \hline 308 : \quad 0\,22 & 40\ \dfrac{227}{308} \\ \cdot\ \cdot & \end{array}$$

Deîmpărțitul este 12547, împărțitorul 308, câtul 40 și restul 227.

După aceste operațiuni se trece la „*regola detta delle compagnie*" (asociații). Urmează fracțiile *(numero rotto, numero spezzato)* și regula de trei *(regola di proportione detta del tre)*. Regula de trei compusă e limitată la trei perechi de mărimi și îi zice *regola di proportione doppia*. Arată cum se rezolvă și geometricește aceste reguli. Avem apoi *radice quadra*, găsită aritmeticește și geometricește și *radice cuba* pe care autorul voia să o știe soldații ca să lupte cu Turcii, pe când azi la noi nu e nevoie să o știe liceeni!

Autorul se ocupă apoi de Geometrie. Dă definițiuni, face construcțiuni elementare de triunghiuri echilaterale, ducere de bisectoare, perpendiculare, triunghiuri, unghiuri, paralele, figuri echivalente; explică unele teoreme ca și pe a lui PITAGORA, la dreptunghiul cu laturile 3, 4 și 5 cu patratele pe ele, divizate în pătrățele. Se ocupă de măsura unghiurilor, ducerea tangentelor la cerc, lungimi proporționale, poligoane regulate, transformarea și diviziunea suprafe-

ţelor figurilor plane, „figura ouată“ (ovalul), amplificarea şi reducerea figurilor *(ridurre di grande in picciolo e di picciolo in grande).*

In partea a doua a Geometriei se ocupă cu calculul ariilor, figurilor plane elementare, pe hârtie şi pe teren, utilizând şi echerul arpentorului. La aria cercului ia $\pi = 3\frac{1}{7}$, *„după documente lăsate de* ARCHIMEDE“. Arată cum se măsoară volumele figurilor geometrice, buţilor, zidurilor, bolţilor, săpăturilor şi umpluturilor pentru fortificaţii; face ridicarea de planuri, cu triunghiuri şi planşete, măsurarea distanţelor inaccesibile, lungimea scărilor pentru escaladarea zidurilor, etc.

Ultima parte este Trigonometria. Aici autorul e mai slab! Astfel ne spune că Trigonometria e bazată pe calitatea şi cantitatea sinusului şi că nu se poate servi cineva de ea fără table de *sinus tangenti secanti,* recomandând pe cele tipărite la Lyon în 1628 de librarul *Claudio Rigaud.* La unghiuri deosebeşte trei calităţi: ascuţite, drepte, obtuze. Dă definiţiuni. Sinusului care-l considerăm noi azi îi zice *sinus dritto;* mai are şi *sinus maggiore* care e raza mărită cu cosinusul, *sinus minore,* care este raza micşorată cu cosinusul, *sinus totale* care este raza, *sinus tangente* care e tangenta şi pe lângă aceasta mai are şi secanta. De cosinus, cotangentă şi cosecantă nu se pomeneşte nimic. Se ocupă apoi de rezolvarea triunghiurilor dreptunghice. Pentru triunghiuri oarecare dă proporţionalitatea laturilor cu sinusurile. Dă mijloace de a rezolva triunghiuri şi încheie cu triangulaţii.

Cartea are format mic; partea tipărită are 65 × 135 mm. Ea are ca frontispiciu un portal susţinut de două fete, una cu un compas şi alta cu un echer în mână, sub care e un copil cu o riglă în mână şi cu un echer în alta, iar din partea de sus un înger dă drumul la compasuri, echere şi fire cu plumb. Iniţialele cu care încep chestiunile sunt băgate în flori şi ornamente, cum se făcea la noi în vechile cărţi bisericeşti. La finele paginilor nu s'au lăsat locuri albe, care sunt foarte căutate de tipografii de azi! Golul se împlinea cu chenare, ornamente şi diferite desemnuri, unele făcute cu mult gust. Dacă spaţiul rămas era prea mare, atunci rândurile se scurtau treptat, aşa că partea tipărită avea aspectul unui triunghiu cu vârful în jos. Dacă laturile triunghiului ar fi ieşit prea puţin înclinate, se termina un triunghiu, se scria sub vârful lui un rând

complect şi se făcea un nou triunghiu cu vârful în partea de jos a paginei. De multe ori, enunţurile prea lungi erau culese în formă trapezoidală, cu baza mare în sus şi mai rar triunghiulare. Cu modul acesta, ochiul obosit de ariditatea expunerii matematice se recreiază pe paginile acestei cărţi graţie aranjării şi ornamentării paginilor.

Autorul spune la finele cărţii că va mai scoate o carte cu desemnarea poligoanelor şi cu arta de a fortifica bine, dacă îi va ajuta Dumnezeu, şi încheie:

„Rămâneţi sănătoşi".

I. Ionescu.

RAPORTUL COMISIUNII PENTRU ACORDAREA PREMIULUI „GENERAL SC. PANAITESCU"

PE ANUL 1932 — 1933

Domnilor membri,

Subsemnaţii, formând comisiunea pentru premiul „General Sc. Panaitescu" pentru anul: 1 Septemvrie 1932 — 31 August 1933, examinând lucrările publicate în revistele militare în acest interval şi pe acelea care ne-au parvenit, publicate in volum, am ajuns la concluzia că nici una din aceste lucrări nu se încadrează în prevederile regulamentului fondului „General Sc. Panaitescu".

Având în vedere prescripţiunile art. 5 al regulamentului acestui fond, propunem ca premiul pe anul 1932/933 să se acorde revistei *„Revista Artileriei"*, care publică şi chestiuni de ştiinţe matematici aplicate la ştiinţele militare.

Comisiunea pentru premiul „General Sc. Panaitescu":

Col. Gh. Buicliu, Ing. C. Orăşanu,
Col. G. Potopeanu.

Acest raport s'a citit şi aprobat în Adunarea Generală din 31 August 1933.

NOTE MATEMATICE

4. *Triangle bordé de carrés.*

1. Soient α, β, γ et α', β', γ', les centres des carrés BCC_1B_1, ABB_2A_1, CAA_2C_2 et $BCC'B'_1$, $ABB'_2A'_1$, $CAA'_2C'_2$, construits extérieurement puis intérieurement sur les côtés $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, d'un triangle; A_1, B_1, C_1, les milieux du côtés; S l'aire de ce triangle, m_a, m_b, m_c, ses médianes; K le point de LEMOINE, θ l'angle de BROCARD.

Les distances du point K aux côtés BC, CA, AB, s'expriment

$$d_a = \frac{2aS}{a^2+b^2+c^2}\ ,\quad d_b = \frac{2bS}{a^2+b^2+c^2}\ ,\quad d_c = \frac{2cS}{a^2+b^2+c^2}\ ,$$

et l'on a

$$\alpha A_1 \ :\ d_a = |\ a^2+b^2+c^2\ |\ :\ 4S = \cot\theta = \beta B_1\ :\ d_b = \gamma C_1\ :\ d_c\ .$$

Par analogie,

$$\alpha' A_1\ :\ d_a = \beta' B_1\ :\ d_b = \gamma' C_1\ :\ d_c = -\cot\theta.$$

Les droites $K\alpha$, $K\beta$, $K\gamma$ et $K\alpha'$, $K\beta'$, $K\gamma$, coupent donc BC, CA, AB, respectivement en des points M, N, P et M', N', P', qui sont *les sommets de triangles homothétiques aux triangles* $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$, *dans les homothéties* $|\ K, \pm(1+\cot\theta)\ |$.

2. Les perpendiculaires en B_1 et C_1 sur B_1B_2 et C_1C_2, en B_2 et A_1 sur B_2B_1 et A_1A_2, en A_2 et C_2 sur A_2A_1 et C_2C_1, se coupent en des points X_1, Y_1, Z_1 et

$$Y_1Z_1 = A_1A_2 = 2m_a\ ,\quad X_1Y_1 = 2m_b\ ,\quad Z_1X_1 = 2m_c\ .$$

On a donc

$$\overline{Y_1Z_1}^2 + \overline{X_1Y_1}^2 + \overline{Z_1X_1}^2 = 4\ (m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = 3\,(a^2+b^2+c_2),$$

et *les triangles* ABC *et* $X_1Y_1Z_1$ *sont équibrocardiens.*

Les droits Y_1Z_1, X_1Y_1, Z_1X_1 étant perpendiculaires aux médianes AA_1, BB_1, CC_1 de ABC, le triangle $X_1Y_1Z_1$ est homothétique au triangle podaire $K_aK_bK_c$ de K par rapport à ABC. Le rapport d'homothétie égale

$$Y_1Z_1\ :\ K_bK_c = 2\cot\theta\ ^{1}). \qquad (1)$$

---

1) Dans une communication à la *Société scientifique de Bruxelles*, (octobre 1933), nous donnerons d'autres propriétés du triangle $X_1Y_1Z_1$. (V. T.)

3. Les côtés du triangle $K_aK_bK_c$ s'expriment

$$K_bK_c = \frac{m_a}{\cot\theta}\ ,\ K_cK_a = \frac{m_b}{\cot\theta}\ ,\ K_aK_b = \frac{m_c}{\cot\theta}\ ,$$

et les distances du point K' de LEMOINE du triangle $K_aK_bK_c$ aux côtés de ce triangle, sont

$$d'_a = \frac{2\,m_a}{\cot^2\theta}\ ,\ d'_b = \frac{2\,m_b}{\cot^2\theta}\ ,\ d'_c = \frac{2\,m_c}{\cot^2\theta}\ .$$

Si d''_a, d''_b, d''_c, désignent les distances du point K_1 de LEMOINE du triangle $X_1Y_1Z_1$, on a, en vertu de (1),

$$d''_a = 2d'_a\cot\theta = m_a : \cot\theta = K_bK_c\ ,$$

et, par analogie,

$$d''_b = K_cK_a\ \ ,\ \ d''_c = K_aK_b\ .$$

Autrement dit, *les coordonnées normales absolues du point de* LEMOINE *du triangle* $X_1Y_1Z_1$, *dans ce triangle, sont égales aux côtés du triangle podaire du point de* LEMOINE *du triangle* ABC.

V. THÉBAULT
Le Mans-France.

5. *Viteza maximă pe care o poate atinge un avion cu elice.*

Imi propun să găsesc : *limita vitezei maxime de sbor orizontal a unui avion, utilizând propulsiunea cu elice.*

Ecuația forțelor orizontale este :

$$1)\qquad \eta\,.\,W\,.\,75 = \alpha\left(\frac{\rho}{2}\,.\,C_x\right).\,S\,.\,V^3$$

unde η este randamentul elicei, W puterea motorului în C.V. P greutatea avionului, ρ massa aerului, S suprafața portantă a avionului, V viteza orizontală, C_x coeficient aerodinamic, de rezistență la înaintare, și :

$$2)\qquad \alpha = \left[1 - \frac{\gamma - 1}{2}\cdot\left(\frac{V}{a}\right)^2\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

γ fiind raportul căldurilor specifice, a viteza sunetului în atmosfera normală.

In condițiunile actualei tehnice de construcție a avioanelor, voiu admite drept „*minime minimorum*“ :

— Greutatea motorului în kg. . . . . = 0,10 . W

— » planorului » . . . . . = 0,10 . W

— » combustibilului consumat în cel mult 30 minute . . . . . = 0,05 . W

— Suprafața portantă . . . . . $S = \frac{P}{600}\ m^2$

— Coeficientul C_x . . . . . = 0,01.

Iar maximum randamentului propulsorului : . $\eta = 0{,}9$.

Atunci înlocuind în ecuația 1), avem :

$$\frac{V^3}{\left[1 - \frac{\gamma - 1}{2} \cdot \left(\frac{V}{a}\right)^2\right]^{\frac{1}{\gamma - 1}}} = 259200000.$$

Admitem însă că :

$$\left[1 - \frac{\gamma - 1}{2} \cdot \left(\frac{V}{a}\right)^2\right]^{-\frac{1}{\gamma - 1}} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{V}{a}\right)^2$$

unde pentru $a = 340\ ^{m}/_{sec.}$, obținem ecuația :

$$3) \qquad f(x) \equiv x^5 + 23 \,.\, x^3 - 6000 = 0$$

unde $$x = \frac{V}{100}\ .$$

Observăm că :

$$f(x) \equiv (x - 5)\,(x^4 + 5x^3 + 48x^2 + 248x + 1215) = 0.$$

Mai observăm că paranteza a doua se mai poate scrie :

$$\varphi(x) = x\,(x + 5)\,(x^2 + 48) + 1215$$

ceeace ne arată lesne că :

— pentru $x \geqslant 0$ avem : $\varphi(x) > 0$

— » $x < -5$ » $\varphi(x) > 0$

și verificând pentru $-5 < x < 0$, obținem tot $\varphi(x) > 0$; așa dar singura rădăcină reală este :

$$x = 5.$$

Prin urmare: *limita maximă a vitezelor orizontale, care s'ar putea realiza cu avioane prevăzute cu motoare cu explozie şi elice, în actualele condiţiuni tehnice, este* $500^{m}/_{sec.}$ *sau* $1800^{km}/_{oră}$.

MAIOR I. LINTEŞ.

6. *Asupra problemei 4116.*

Cu ocazia rezolvirei acestei probleme s'au pierdut din vedere, şase grupe de soluţiuni şi poate cele mai remarcabile, în cari $x \neq y \neq z$ — din cauză că s'a presupus că la $x = -1$ corespund neapărat $y = z = -1$, ceeace nu este adevărat.

In adevăr, să reluăm ecuaţiile sistemului propus, care se mai pot scrie:

$$x\left(1+\frac{1}{z}\right)=y\left(1-\frac{1}{z^2}\right)$$

$$y\left(1+\frac{1}{x}\right)=z\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$z\left(1+\frac{1}{y}\right)=x\left(1-\frac{1}{y^2}\right).$$

Se vede imediat că o soluţie este $x = y = z = -1$. Dar să presupunem $x \neq y \neq z$. Dacă luăm $z = -1$, care verifică prima ecuaţie, oricare ar fi x şi y, celelalte două ecuaţii devin, după ce le-am simplificat în prealabil cu factorii $\left(1+\frac{1}{x}\right)$, $\left(1+\frac{1}{y}\right)$, presupuşi diferiţi de zero,

$$xy = 1 - x \quad , \quad x\,(1-y) = y,$$

cari rezolvate, ne dau:

$$x = \frac{1}{\pm\sqrt{2}} \quad , \quad y = -1 \pm \sqrt{2} \quad , \quad z = -1,$$

adică două grupe de soluţiuni.

Dacă luăm $x = -1$, găsim din ecuaţia întâia şi a treia

$$yz = 1 - y \quad , \quad z = y\,(1-z),$$

deci alte două grupe de soluţii

$$x = -1 \quad , \quad y = \frac{1}{\pm\sqrt{2}} \quad , \quad z = -1 \pm \sqrt{2}.$$

In fine, dacă luăm $y = -1$, primele două ecuații devin

$$zx = 1 - z \quad , \quad x = z\,(1 - x),$$

cu ultimele două grupe de soluțiuni

$$x = -1 \pm \sqrt{2} \quad , \quad y = -1 \quad , \quad z = \frac{1}{\pm\sqrt{2}}.$$

M. G.

7. *Asupra problemei 4217.* Această problemă a fost reprodusă și în *Boletin Matematico.* La pag. 45 din anul acesta s'a dat soluția, cu care ocaziune s'a pus două note.

In prima rezolvitorul își pune întrebarea, că de unde vine denumirea *de medie tangențială* a expresiunii complicate din enunț? Se arată că punând $a = \operatorname{tg}\alpha$ și $b = \operatorname{tg}\beta$ expresiunea se reduce după mai multe transformări trigonometrice la $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, adică se reduce la tangenta medii aritmetice a două unghiuri.

In a două notă rezolvitorul dă o interpretare geometrică a neegalităților ce se cerea a se demonstra. Se ia segmentul OU, se duce perpendiculara la OU în U pe care se ia A și B așa că $OA/OU = a$ și $OB/OU = b$. Fie M mijlocul lui AB, N intersecția bisectoarei unghiului AON cu AB și P intersecția lui AB cu polara lui U față de cercul descris pe AB ca diametru. Atunci UP, UM, UN sunt mediile armonice, tangențiale și aritmetice, înmulțite cu OU, ale lui a și b.

I. I.

8. *Valoarea lui π după Biblie.* După unele pasagii din Biblie reiese că Evreii, pe timpul lui Solomon, luau pentru π valoarea 3, adică făceau lungimea cercului egală cu perimetrul exagonului regulat înscris. Iată după Biblia, editată de Sfântul Sinod în 1914, acele pasagii:

1. *Cartea a treia a împăraților. Cap. VII. No. 23:* «Și a făcut mare vărsată, zece coți dela o margine până la cealaltă, cinci coți înălțimea ei rotundă împrejur, și rotunzimea ei împrejur de 30 de coți».

Iar mai departe la No. 26 se spune: «Și grosimea ei de un pumn, și marginea ei ca a unui potir, lucrată ca floarea de crin, două mii de *vedre* încăpeau».

Această «*Mare*» era un bazin în templul lui SOLOMON în care se spălau pe mâini cei ce tăiau vitele pentru sacrificii; ea era turnată din aramă.

Pasagiul acesta este mai explicit în Biblia publicată în 1926 de «Societatea biblică pentru răspândirea Bibliei în Anglia şi în străinătate»: «A făcut marea turnată din aramă. Avea zece coţi dela o margine până la cealaltă, erea rotundă de tot, înaltă de cinci coţi, şi de jur împrejur se putea măsura cu un fir de treizeci de coţi».

De aci reiese mai bine că secţiunea era circulară şi că deci se consideră că $\pi = 30/10 = 3$.

Un pasaj, din care reese acelaşi lucru, este în *Cartea a doua faralipomene*. Cap. IV. No. 2: «Şi a făcut mare turnată de zece coţi, dintr'o margine până la cealaltă, rotundă împrejur şi de cinci coţi de înaltă, şi împrejurul ei erea de treizeci de coţi».

Aci însă conţinutul este dat 3000 de «*măsuri*». Acestor măsuri li se zice «*baţi*» în Biblia din 1926, pe care am semnalat-o.

Ar fi interesant de cercetat dacă aceste volume corespund întrucâtva cu dimensiunile arătate.

I. I.

CHESTIUNI DE EXAMEN

ŞCOALA POLITECHNICĂ «REGELE CAROL II» BUCUREŞTI

Examen general: Iunie 1933

Ciclul I

GEOMETRIA ANALITICĂ

(Chestiuni propuse de D-l prof. Pompei)

Secţia Constructori

1. Fie:

$$A(X-x) + B(Y-y) + C(Z-z) = 0$$

ecuaţia planului tangent la o suprafaţă S; A, B, C fiind funcţiuni de x, y, z şi depinzând de natura suprafeţei.

1°. Fără de a specifica modul de reprezentare al suprafeței S, să se găsească ecuația diferențială a curbelor, trase pe S, al căror plan osculator în fiecare punct este însuși planul tangent al suprafeței în punctul considerat.

2°. Să se aplice în cazul când S e dat sub forma :

$$Z = f(x, y).$$

II. Să se găsească curbele caracterizate de proprietatea următoare : Ordonata la origine a tangentei în punctul M (x, y) satisface relația :

$$OT = \frac{y^2}{a} \text{ (a constant).}$$

Inainte de a se integra execuția diferențială a problemei să se verifice, pe această ecuație, că două drepte anumite, paralele cu Ox răspund la chestiune.

Secția Electro-mecanică

I. Să se scrie ecuația diferențială a liniilor de cea mai mare pantă, în raport cu planul xOy, al unei suprafețe :

$$Z = f(x, y).$$

II. Fie T punctul unde tangenta în M (x, y) la o curbă plană taie axa Oy și A un punct fix, pe axa Ox, a cărei abscisă o însemnăm :

$$\overline{OA} = a.$$

Să se determine curba prin proprietatea că unghiul $T\hat{A}M$ să fie întotdeauna drept.

Secția Mine

I. Se consideră paraboloidul :

$$x^2 + y^2 = 4a(z + a) \text{ și se cere :}$$

1°. Să se arate că normalele la acest paraboloid întâlnesc toate axa Oz.

2°. Fie M un punct oarecare pe suprafața paraboloidului și N punctul unde normala în M întâlnește axa OZ, să se afle suprafața — loc geometric al punctului P — care e mijlocul lui MN.

II. Să se verifice pentru iperbola echilateră :

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

că raza de curbură ρ este proporțională cu puterea III a razei vectorie :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

EXAMENUL DE INTRARE ÎN LICEUL MILITAR «N. FILIPESCU»

August 1933

1. O femeie cumpără mere pentru copiii săi şi-şi face socoteala că fiecare trebue să capete câte 21 de mere. Pe drum îşi aminteşte că 2 din copii fiind pedepsiţi, nu primesc nimic şi făcând o nouă socoteală, găseşte că celorlalţi li se cuvine câte 28 mere de fiecare.

Câţi copii are femeia şi câte mere a cumpărat ?

2. O grădină dreptunghiulară are perimetrul 280 m. Grădina se transformă, construind jumătăţi de cercuri egale în afara dreptunghiului şi cu centrele în mijlocul laturilor. Porţiunea cuprinsă între vârf şi semicerc pe latura mică este 1/3 din porţiunea cuprinsă între acelaşi vârf şi semicerc pe latura mare. Această din urmă porţiune este 15 m. Se cere:

1°. Perimetrul grădinei după transformare.

2°. Suprafaţa grădinei înainte de transformare.

BIBLIOGRAFIE

Boletin Matematico. Anul VI. No. 3. Mai 1933. Buenos Aires. Câteva consideraţiuni geometrice asupra unei funcţiuni transcendente şi relaţile ei cu calculul probabilităţilor, de E. NATALE. Mişcarea lui Yo-Yo, de S. VATRIQUANT.

Boletin Matematico Elemental. Anul IV. No. 5. Iulie 1933. Buenos Aires. Trisecţiuuea Unghiului, de F. ANGUITA.

Idem. Anul VI. No. 6. August 1933. Buenos Aires.

Idem. Supliment informativ.

Sphinx. Anul III. No. 10. Octomvrie 1933. Bruxelles. Marile numere prime de M. K.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XIII. No. 7. Septemvrie 1933. Timişoara. Sur la distance du centre de gravité au point de LEMOINE d'un triangle, par V. THÉBAULT. Alte teoreme în legătură cu două triunghiuri sau două poligoane, de C. COŞNIŢĂ.

J. POIREE. *L'arithmétique à la portée de tous. Nombres entiers. Fractions. Calculs approchés.* Paris. Gauthier-Villars et C-ie, Editeurs. 1932. Preţul 25 franci.

Intr'un volum de 98 pagini s'a căutat să se dea cunoştinţele de aritmetică necesare persoanelor care doresc să'şi complecteze studiile elementare căpătate în şcolile inferioare. S'a evitat orice ar putea reţine prea mult pe un cititor, chestiuni nefolositoare, demonstraţiuni plicticoase. Cum arată titlul, cartea este făcută pentru toată lumea.

Capitolele tratate sunt: I. Modul de a socoti. Expresiunea rezultatului. II. Cele patru operaţiuni. III. Divizibilitatea prin 2, 4, 5, 3 şi 9, 11 şi 125. Proba prin 9. IV. Probleme de aritmetică cu numere întregi, pe care le împarte în probleme cu un răspuns principal şi probleme cu două răspunsuri principale, şi calcule rapide. V. Cel mai mare comun divizor, cel mai mic comun multiplu, numere prime. VI. Fracţii. VII. Fracţii zecimale. VIII. Probleme asupra fracţiilor, mărimi direct şi invers proporţionale, dobânzi. IX. Sistemul metric. X. Rădăcini patrate. XI. Valori apropiate, fracţii periodice. XII. Calcule apropiate, erori.

I. I.

J. POIREE. *L'algèbre la Trigonométrie à la portée de tous.* Tome I. *Calcul algébrique et équations.* Tome II. *Etude de la variation des fonctions.* Paris. Gauthir-Villars et C-ie. Editeurs. 1933. Fiecare volum 15 franci.

Scopul e acelaşi ca al volumului de aritmetică. Volumele sunt făcute pentru cei, care cunoscând aritmetica, vreau să înveţe repede să deslege o ecuaţie sau să facă un calcul logaritmic, sau să studieze o funcţiune. Capitolele din primul volum sunt: I. Numerele pozitive şi negative. II. Operaţiuni şi fracţiuni numerice. II. Intrebuinţarea literilor. Expresiuni algebrice, poligoane, triunghiul lui PASCAL. III. Radicale şi exponenţi. IV. Ecuaţii de gradul I. V. Ecuaţii de gradul II, neegalităţi. VI. Progresiuni aritmetice şi geometrice. VII. Logaritmi. Totul e coprins în 58 pagini.

Capitolele din al doilea volum sunt: I. Noţiuni asupra funcţiunilor, representări grafice, elipsa, iperbola, parabola. II. Studiul funcţiunilor, derivate. III. Calculul derivatelor. IV. Aplicaţiile derivatelor la studiul funcţiunilor. V. Aria unei suprafeţe plane. Totul în 46 pagini.

I. I.

J. POIREE. *La Géométrie à la portée de tous.* Auch. Imprimerie Cocharaux. 1931. Preţul 20 franci.

Scopul urmărit este acelaşi ca la cele două cărţi precedente. Autorul voieşte să urmeze pe PLATON, care învaţă pe elevii săi Geometria, convorbind cu ei. Se introduc definiţiunile în mod natural, s'a renunţat la înlănţuirea prea logică din Elementele lui EUCLIDE sau a imitatorilor lui, şi s'au dat probleme lămuritoare. Cartea e împărţită în părţi. Partea I. tratează linia dreaptă şi figuri făcute cu ea. Aci vorbeşte de geometria euclidiană fără să spuie ce este. II. Cercul. III. Asemănări, complimente trigonometrice, figuri înscrise în cerc, locuri geometrice. IV. Măsura ariilor. V. Curbele uzuale. VI. Studiul dreptelor şi planelor în spaţiu, simetrie, omotetie, triedre. VII. Sfera, con, cilindru. Aci e şi o demonstraţiune simplă a faptului că sfera nu se poate desfăşura pe un plan. La fine sunt probleme de construcţie şi locuri geometrice. Totul e coprins în 118 pagini.

I. I.

R. RACLIŞ. *Le terme reste de la série de* TAYLOR *généralisée.* (Extras din Actele Congresului internaţional al Matematicianilor ţinut la Zürich în 1932).

R. Racliș. *Trois théorème sur la série de* Taylor. (Extras din Actele Congresului internațional al Matematicianilor dela Zürich în 1932).

Mihail St. Botez. *Sur les surfaces conoïdes.* Monographie. Imprimeria Județului Neamț. 1933.

CERERI

227. *Măsurile de lungime, suprafață și volum întrebuințate în Moldova.* In Volumul II al Culegerii *„Uricarul"* al lui Th. Codrescu, apărut la 1852, acest regretat culegător desinteresat și neobosit de documente istorice și economice ale Moldovei, a cerut un articol cu titlul cu care începe această Cerere. După ce publică un act de hotărnicie din 1776, el spune:

„Am publicat cu intenție hotărâtura aceasta ce s'au măsurat în *odgoane*, că poate vr'un inginer să-și dea osteneala de a face un articol atingătoriu despre măsurile vechi în țara Moldovei întrebuințate în feluritele ei ținuturi..."

Iar mai departe:

„Noi provocăm pe vreun Domn inginer de ai Statului ca să facă această mică serviție țării tratând într'un articol toate aceste măsuri cu deamănuntul".

Provocarea aceasta a avut vre'un rezultat până acum?

I. I.

228. Cine îmi poate procura și cu ce preț Nr. 8 (56) din *„Revista de Matematicas y Fisicas Elementales"* Ano V. Diciembre 1923?

Ing. Ion S. Antoniu
Str. Edgar Quinet 6, București I.

DIVERSE

In timpul vacanței, Colegul nostru, D-l P. Sergescu a desvoltat o activitate foarte lăudabilă pentru cunoașterea mișcării matematicei române.

In luna Iunie D-sa a reprezentat Universitatea din Cluj la serbările semicentenarului Universității din Poitiers.

Intre 24 și 29 Iulie a participat la Congresul din Chambéry al Asociațiunii franceze pentru însintarea științelor, prezidat de D-l E. Cartan. Acolo D-sa a ținut un discurs-omagiu din partea Societății române de matematici, și a făcut o comunicare asupra ecuațiilor $\Sigma (1 + kp)^p x^k$. La acest Congres a prezentat și D-l N. Botea o notă asupra unor proprietăți de reciprocitate.

Intors în țară, a făcut două lecțiuni de Istoria matematicilor în România, la Vălenii de Munte.

Între 21 şi 28 August a avut loc la Varşovia al VII-lea Congres internaţional al Istoricilor, la care Secţiunea XV a fost consacrată Istoriei ştiinţelor; aceasta a fost presidată de D-l P. SERGESCU, în ziua de 25 August. Acolo a făcut necrologul profesorului LICHTENSTEIN din Lipsca, mort la 23 August la Cracovia şi o comunicare asupra istoricului matematicilor şi al fizicei în România care s'a publicat în *Bulletin du Comité historique International.*

I. I.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 3517. *Se cer patratele de cifre, primele sau ultimele fiind diferite şi consecutive.*

I. C. VASILIU.

Fie *abcdef* patratul căutat. Enunţul nu precizează câte cifre dela început sau dela sfârşit trebuie să fie consecutive. Această neprecizare face problema nedeterminată şi neinteresantă, de aceia vom da numai soluţiunile diferitelor cazuri, fără a indica şi calea pe care au fost obţinute.

1°. **a, b, c, d, e, f** *sunt consecutive.* Nici o soluţie.

2°. **a, b, c, d, e** *sunt consecutive.* Se găsesc 3 soluţiuni:

135424 ; 467856 ; 758641.

3°. **a, b, c, d** *sunt consecutive.* Se găsesc următoarele soluţiuni:

132496 ; 213444 ; 214369 ; 310249 ; 312481 ;
321489 ; 435600 ; 547600 ; 678976 ; 758641.

La aceste soluţiuni se adaugă 1 dela 2° care e comună şi cazului 3° aşa că pentru 3° avem 11 soluţiuni.

4°. **a, b, c** *sunt consecutive.* Avem următoarele 24 soluţiuni:

102400 ; 123201 ; 123904 ; 201601 ; 210681 ; 234256 ;
324900 ; 342225 ; 345744 ; 423801 ; 432964 ; 456976 ;
465124 ; 534361 ; 543169 ; 564001 ; 567009 ; 576081 ;
657721 ; 675684 ; 765625 ; 786769 ; 876096 ; 879844 ;

La aceste soluţiuni se adaugă 7 soluţiuni dela cazul 3°, deci cazul 4° are 31 soluţiuni.

5°. **a, b** *sunt consecutive.* Avem următoarele 106 soluțiuni.

100489 ; 101124 ; 101761 ; 103041 ; 103684 ; 104976 ;
105625 ; 106276 ; 106929 ; 107584 ; 108241 ; 108900 ;
109561 ; 120409 ; 121104 ; 121801 ; 122500 ; 124609 ;
125316 ; 126025 ; 127449 ; 128164 ; 128881 ; 129600 ;
211600 ; 212521 ; 215296 ; 216225 ; 217156 ; 218089 ;
219024 ; 219961 ; 230400 ; 231361 ; 232324 ; 233289 ;
235225 ; 236196 ; 237169 ; 239121 ; 320356 ; 322624 ;
323761 ; 326041 ; 327184 ; 328329 ; 329476 ; 341056 ;
343396 ; 344569 ; 346921 ; 348100 ; 349281 ; 430336 ;
431649 ; 434281 ; 436921 ; 438244 ; 439569 ; 450241 ;
451584 ; 452929 ; 454276 ; 455625 ; 458329 ; 459684 ;
540225 ; 541696 ; 544644 ; 546121 ; 549081 ; 561001 ;
562500 ; 565504 ; 568516 ; 651249 ; 652864 ; 654481 ;
656100 ; 659344 ; 670761 ; 672400 ; 674041 ; 677329 ;
762129 ; 763876 ; 767376 ; 769129 ; 781456 ; 783225 ;
784996 ; 788544 ; 870489 ; 872356 ; 874225 ; 877969 ;
891136 ; 893025 ; 894916 ; 896809 ; 898704 ; 980100 ;
982081 ; 984064 ; 986049 ; 988036.

La aceste soluțiuni se mai adaugă 6 soluții dela cazul 3° și 19 dela cazul 4° așa că pentru cazul 5° avem:

$$106 + 6 + 19 = 131$$

soluțiuni.

6°. **b, c, d, e, f** *sunt consecutive.* O soluțiune:

335241.

7°. **c, d, e, f** *sunt consecutive.* Se găsesc 10 soluțiuni:

123201 ; 130321 ; 139876 ; 147456 ; 195364 ; 274576 ;
467856 ; 538756 ; 678976 ; 790321.

8°. **d, e, f** *sunt consecutive.* Avem următoarele 17 soluțiuni:

151321 ; 226576 ; 232321 ; 268324 ; 361201 ; 373321 ;
379456 ; 408321 ; 421201 ; 550564 ; 574564 ; 586756 ;
724201 ; 741321 ; 781456 ; 808201 ; 964324.

La aceste soluțiuni se adaugă și 7 soluțiuni dela 7⁰ așa că pentru 8⁰ avem 24 soluțiuni.

9⁰. **e, f** *sunt consecutive.* Avem următoarele 113 soluțiuni:

100489 ; 104976 ; 106276 ; 110889 ; 111556 ;
114921 ; 121801 ; 133956 ; 134689 ; 141376 ;
146689 ; 159201 ; 160801 ; 168921 ; 173056 ;
173889 ; 179776 ; 181476 ; 187489 ; 188356 ;
192721 ; 201601 ; 203401 ; 212521 ; 217156 ;
218089 ; 224676 ; 233289 ; 234256 ; 239121 ;
249001 ; 251001 ; 261121 ; 266256 ; 267289 ;
276676 ; 284089 ; 285156 ; 290521 ; 301401 ;
303601 ; 314721 ; 320356 ; 321489 ; 329476 ;
331776 ; 339889 ; 341056 ; 346921 ; 358801 ;
380689 ; 389376 ; 391876 ; 401956 ; 423801 ;
436921 ; 443556 ; 444889 ; 454276 ; 456976 ;
466489 ; 474721 ; 488601 ; 491401 ; 505521 ;
512656 ; 514089 ; 524176 ; 527076 ; 537289 ;
546121 ; 561001 ; 564001 ; 579121 ; 599076 ;
602176 ; 614656 ; 622521 ; 638401 ; 641601 ;
657721 ; 665856 ; 667489 ; 682276 ; 593889 ;
695556 ; 703921 ; 720801 ; 749956 ; 751689 ;
763876 ; 767376 ; 779689 ; 821801 ; 829921 ;
839056 ; 840889 ; 853776 ; 857476 ; 870489 ;
872356 ; 881721 ; 900601 ; 904001 ; 923521 ;
933156 ; 935089 ; 948676 ; 952576 ; 966289 ;
968256 ; 978121 ; 998001.

La aceste soluțiuni mai trebuie adăugate 9 soluțiuni dela cazul 7⁰ și 13 soluțiuni dela cazul 8⁰ așa că pentru cazul 9⁰ avem 135 soluțiuni.

Problema are în total 333 soluțiuni, dintre care unele comune la mai multe cazuri.

Notă. — 1°. Au rezolvat problema parţial şi au trimis soluţiuni, după cum urmează d-nii:

ALIMAN I. V., (Oltenița) 119 soluţiuni pentru cazul 5° şi 75 soluţiuni pentru cazul 9°.

COSTACHE N. N., 116 soluţiuni pentru cazul 5° şi 75 pentru cazul 9°.

GHIŞOIU I. P., (Şc. Politecnică, Bucureşti), 5 soluţiuni pentru cazul 5° şi 16 soluţiuni pentru cazul 9°.

ILIUŢĂ-DĂBULENI I. I., (Caracal), soluţiile complecte ale cazurilor 2° şi 6°.

POPESCU D. STELIAN (Bucureşti), 27 soluţiuni pentru cazul 4° şi 31 pentru cazul 8°.

POPESCU C. VIRGILIU (Târgovişte), 31 soluţii pentru cazul 4° şi 18 pentru cazul 8°.

2°. Problema 3282, propusă la pagina 318 Vol. XXX, a cărei soluţie nu s'a publicat încă, fiind mai restrictivă ca problema 3517 este mai interesantă. In problema 3282 se cere să se găsească patratele de 5 cifre care au primele sau ultimele 4 cifre consecutive.

Gh. B.

PROBLEMA 3978. *Să se găsească condiţia ca ecuaţiile*

$$x^2 + px + q = 0 \quad \text{şi} \quad x^3 + px + q = 0$$

să aibă o rădăcină comună şi să se calculeze rădăcina comună.

M. VELEA.

1. *Soluţie* dată de Domnişoarele: ELEONORA ANTONIU şi MARIA AL. LICHERDOPOL-BURA şi de Domnii: N. N. ALDEA, P. I. GHIŞOIU, EUG. ŞT. IACOB (Sub.-Lt.), V. I. IONESCU, H. P. IONESCU-BISS, C. D. IONESCU-ŢIU (Sub.-Lt.), M. MĂNESCU, M. MARGULIUS, E. MEREUŢĂ, N. PATRAULEA, TR. PUTA, A. I. STAN (Sub.-Lt.), V. VASU şi I. ZARDA.

O soluţie comună a ecuaţiunilor date, va fi şi o soluţiune a unei combinaţiuni lineare a lor. Scăzând cele două ecuaţii una din alta, obţinem

$$x^2 (x - 1) = 0 \qquad (1)$$

care admite rădăcina dublă

$$x = 0$$

şi rădăcina

$$x = 1.$$

Pentru ca $x = 0$ să fie rădăcină comună, trebue ca

$$q = 0. \tag{2}$$

Pentru ca

$$x = 1$$

să fie rădăcină comună, trebue ca

$$p + q + 1 = 0. \tag{3}$$

Relațiunile (2) și (3) sunt condițiunile pe care trebue să le îndeplinească coeficienții ecuațiilor pentru a admite ca rădăcină comună, pe una sau alta din rădăcinile ecuațiunei (1).

2. *Soluție* dată de Domnii: N. N. Aldea, Șt. Cuciureanu, Eug. St. Iacob (Sub.-Locot.), Mircea Leonte A. Negrea, C. Paliță, Tr. Puta, G. Șt. Roșca, A. I. Stan (Sub.-Locot.), M. P. Țiucra, I. V. Vasu, V. I. C. Vissarion și I. Zarda.

Pentruca 2 ecuațiuni să aibă o rădăcină comună, trebue să admită un divizor comun de gradul I. Impărțind polinomul de gradul trei prin cel de gradul doi, obținem un cât și un rest de gradul I în x:

$$R = (p^2 + p - q)\, x + pq + q \tag{4}$$

Căutând mai departe divizorul comun între polinomul de gradul II și rest și care, pe baza logaritmului lui Euclid, va fi și divizorul comun între polinomul de gradul II și cel de gradul III, dăm peste un rest liber de x, care anulat ne va da condiția cerută. Acest rest este

$$R_1 = \frac{q^3 + pq^2 + q^2}{p^2 + p - q} \tag{5}$$

Admițând că niciun coeficient nu poate lua valoarea infinit, avem condițiunea:

$$q^2 (q + p + 1) = 0. \tag{6}$$

Dacă

$$q = 0$$

avem soluția evidentă

$$x = 0.$$

Dacă

$$q + p + 1 = 0 \tag{7}$$

rădăcina comună este dată de restul anterior R, care este divisorul comun. Din

$$R = 0$$

$$\therefore \quad x = -\frac{qp + q}{p^2 + p - q} \tag{8}$$

sau, ținând seama de relația de condiție (7), din care scoatem

$$q = -p - 1$$

$$\therefore \quad x = -\frac{-(p+1)^2}{(p+1)^2} = 1$$

ca mai sus.

3. *Soluție* dată de Doamna ȘTEFANIA CĂPITAN TRUȚESCU și de Domnii: H. P. IONESCU-BISS, N. N. MIHĂILEANU, I. PAREPEANU, I. C. SAVIN (Sub.-Locot.) și A. I. STAN (Sub.-Locot.)

Insemnând cu α rădăcina comună, relațiile dintre rădăcini și coeficienți ne dau

$$\alpha + x_2 = -p \tag{9}$$

$$\alpha x_2 = q \tag{10}$$

$$\alpha + x'_2 + x'_3 = 0 \tag{11}$$

$$\alpha x'_2 + \alpha x'_3 + x'_2 x'_3 = p \tag{12}$$

$$\alpha x'_2 x'_3 = -q. \tag{13}$$

Impărțind (13) cu (10) obținem

$$\frac{x'_2 x'_3}{x_2} = -1$$

$$\therefore \quad x'_2 x'_3 = -x_2 \tag{14}$$

relația (12) devine

$$\alpha (x'_2 + x'_3) - x_2 = p$$

sau ținând seama de (11) și (9)

$$-\alpha^2 - x_2 = p$$

$$\therefore \quad \alpha^2 + x_2 = -p$$

$$\therefore \quad \alpha^2 - p - \alpha = -p$$

$$\therefore \quad \alpha (\alpha - 1) = 0.$$

Dacă $\alpha = 0$ este rădăcina comună, atunci trebue ca $q = 0$.

Dacă $\alpha=1$ este rădăcina comună, atunci trebue ca $1+p+q=0$ condiţiunile găsite mai sus.

4. Au rezolvit problema, pe alte căi decât cele indicate mai sus, Domnii: C. D. Ionescu-Ţiu (Sub.-Locot.), E. Mereuţă, Şt. E. Olteanu, I. I. Petrescu, G. Şt. Roşca, I. C. Savin (Sub.-Lt.) şi A. I. Stan (Sub.-Lt.).

Observaţiuni. 1. Domnul Ion Epuran a *schiţat* soluţia problemei, în genul soluţiunii dela No. 2.

Domnul I. Sandu dă soluţia No. 2, însă greşeşte la calcule şi scoate relaţia de condiţie

$$pq\,(p+1)=0.$$

De asemenea Domnul C. D. Rusu, care dă soluţia No. 3, scoate relaţiile de condiţie

$$q=0 \quad \text{şi} \quad q-p-1=0.$$

2. Domnul Marius Margulius presupune cazul când ecuaţiunile sunt complete

$$Ax^3+Bx^2+Cx+D=0 \quad \text{şi} \quad Ax^2+Cx+D=0$$

şi găseşte relaţia de condiţie

$$(A-B)(A-B+C)+AD=0.$$

Domniasa mai arată că problema se găseşte rezolvată în „Revista Matematică dela Timişoara", Vol. XI, pag. 100, în o notă a Domnului E. Mereuţă.

3. Domnişoara Maria Al. Licherdopol-Bura arată că, condiţia pentruca ecuaţiile

$$x^{n-1}+ax^{n-2}+\ldots+lx+m=0$$

$$x^{n}+ax^{n-2}+\ldots+lx+m=0$$

să admită o soluţiune comună este

$$a+b+\ldots l+m+1=0$$

iar soluţiunea comună este $x=1$.

4. Domnul Har. Ionescu-Biss arată că problema 3978 este analoagă cu problema 3168 rezolvată la pag. 32, Vol. XXX „G. M.".

I. S. A.

PROBLEMA 4106. *Să se efectueze produsul de cinci factori*

$$P=(x+y+z+t+s)(x+\alpha y+\alpha^2 z+\alpha^3 t+\alpha^4 s)(x+\alpha^2 y+\alpha^4 z+\alpha t+\alpha^3 s)$$
$$(x+\alpha^3 y+\alpha z+\alpha^4 t+\alpha^2 s)(x+\alpha^4 y+\alpha^3 z+\alpha^2 t+\alpha s)$$

ştiind că $\alpha^5=1$, *iar* $1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4=0$.

M. Ghermănescu.

Soluție dată de D-nii: D. MAVRODIN (Elev cl. VII, Lic. M. Eminescu, Buc.) și I. LENCO.

Să indicăm:

$$x + y + z + t + s = p_1,$$
$$x + \alpha y + \alpha^2 z + \alpha^3 t + \alpha^4 s = p_2,$$
$$x + \alpha^2 y + \alpha^2 z + \alpha t + \alpha^3 s = p_3,$$
$$x + \alpha^3 y + \alpha z + \alpha^4 t + \alpha^2 s = p_4$$

și

$$x + \alpha^4 y + \alpha^3 z + \alpha^2 t + \alpha s = p_5.$$

Înmulțind factorul cel întâi cu cel de al doilea obținem:

$$p_1 p_2 = x^2 + (1+\alpha)xy + (1+\alpha^2)xz + (1+\alpha^3)xt + (1+\alpha^4)xs +$$
$$+ \alpha y^2 + (\alpha + \alpha^2)yz + (\alpha + \alpha^3)yt + (\alpha + \alpha^4)ys +$$
$$+ \alpha^2 z^2 + (\alpha^2 + \alpha^3)zt + (\alpha^2 + \alpha^4)zs +$$
$$+ \alpha^3 t^2 + (\alpha^3 + \alpha^4)ts + \alpha^4 s^2.$$

Înmulțim acum $p_1 p_2$ cu p_3 și obținem, ținând imediat seama de condițiunile date, $p_1 p_2 p_3 =$

$$= x^3 + (1+\alpha+\alpha^2)x^2 y + (1+\alpha^2+\alpha^4)x^2 z + (1+\alpha+\alpha^3)x^2 t + (1+\alpha^3+\alpha^4)x^2 s +$$
$$+ (\alpha+\alpha^2+\alpha^3)xy^2 + (1+\alpha+2\alpha^2+2\alpha^4)xyz + (1+2\alpha+2\alpha^2+\alpha^3)xyt +$$
$$+ (2\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + 2\alpha^4)xys +$$
$$+ (\alpha+\alpha^2+\alpha^4)xz^2 + (\alpha+2\alpha^2+2\alpha^3+\alpha^4)xzt + (1+\alpha^2+2\alpha^3+2\alpha^4)xzs +$$
$$+ (\alpha + \alpha^3 + \alpha^4)xt^2 + (1 + 2\alpha + 2\alpha^3 + \alpha^4)xts +$$
$$+ (\alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4)xs^2$$
$$+ \alpha^3 y^3 + (1+\alpha^3+\alpha^4)y^2 z + (1+\alpha^2+\alpha^3)y^2 t + (\alpha + \alpha^3 + \alpha^4)y^2 s +$$
$$+ (1+\alpha+\alpha^4)yz^2 + (2+2\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4)yzt + (2+\alpha+\alpha^3+2\alpha^4)yzs +$$
$$+ (1+\alpha^2+\alpha^4)yt^2 + (2+2\alpha+\alpha^2+\alpha^4)yts +$$
$$+ (\alpha+\alpha^2+\alpha^4)ys^2 +$$
$$+ \alpha z^3 + (\alpha+\alpha^2+\alpha^3)z^2 t + (1+\alpha+\alpha^3)z^2 s +$$
$$+ (\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4)zt^2 + (2+\alpha+\alpha^2+2\alpha^3)zts + (1+\alpha^2+\alpha^3)zs^2 +$$
$$+ \alpha^4 t^3 + (1+\alpha+\alpha^4)t^2 s + (1+\alpha+\alpha^2)ts^2 +$$
$$+ \alpha^2 s^3.$$

Acest produs îl înmulțim cu p_4, ținând seamă de $a^5 = 1$ și

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = 0.$$

$$p_1p_2p_3p_4 =$$

$$= x^4+(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3)x^3y+(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^4)x^3z+(1+\alpha+\alpha^3+\alpha^4)x^3t+$$
$$+(1+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4)x^3s+$$
$$+\alpha^3x^2y^2+2\alpha^2x^2yz+2\alpha x^2yt+3(\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4)x^2ys+$$
$$+\alpha x^2z^2+3(\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4)x^2zt+2\alpha^4x^2zs+$$
$$+\alpha^4x^2t^2+2\alpha^3x^2ts+\alpha^2x^2s^2+$$
$$+(1+\alpha+\alpha^3+\alpha^4)xy^3+3(1+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4)xy^2z+2xy^2t+2\alpha^4xy^2s+$$
$$+2xyz^2+(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3)xyzt+(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^4)xyzs+$$
$$+3(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^4)xyt^2+(1+\alpha+\alpha^3+\alpha^4)xyts+2\alpha xys^2+$$
$$+(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3)xz^3+2\alpha^3xz^2t+3(1+\alpha+\alpha^3+\alpha^4)xz^2s+$$
$$+2\alpha^2xzt^2+(1+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4)xzts+2xzs^2)+$$
$$+(1+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4)xt^3+2xt^2s+3(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3)xts^2+$$
$$+(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^4)xs^3+$$
$$+\alpha y^4+(\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4)y^3z+(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3)y^3t+(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^4)y^3s+$$
$$+\alpha^4y^2z^2+2\alpha^3y^2zt+2\alpha^2y^2zs+\alpha^2y^2t^2+3(1+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4)y^2ts+$$
$$+y^2s^2+$$
$$+(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^4)yz^3+3(1+\alpha+\alpha^3+\alpha^4)yz^2t+2\alpha yz^2s+$$
$$+2\alpha yzt^2+(\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4)yzts+3(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3)yzs^2+$$
$$+(\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4)yt^3+2\alpha^4yt^2s+2\alpha^3yts^2+(1+\alpha+\alpha^3+\alpha^4)ys^3+$$
$$+\alpha^2z^4+(1+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4)z^3t+(\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4)z^3s$$
$$+z^2t^2+2\alpha^4z^2ts+\alpha^3z^3s^2$$
$$+(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3)zt^3+3(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^4)zt^2s+2\alpha^2zts^2+$$
$$+(1+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4)zs^3+$$
$$+\alpha^3t^4+(1+\alpha+\alpha^3+\alpha^4)t^3s+\alpha t^2s^2+(\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4)ts^3+\alpha^4s^4.$$

In fine, dacă acest produs îl înmulţim cu $p5$, ţinând seamă de aceleaşi condiţiuni, obţinem:

$$p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 = P =$$
$$= x^5 + y^5 + z^5 + t^5 + s^5 +$$
$$+ 5(\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4)[(ys + zt)x^3 + (xz + ts)y^3 + (yt + xs)z^3 +$$
$$+ (zs + xy)t^3 + (xt + yz)s^3] +$$
$$+ 5(\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4)xyzts +$$
$$+ 5[(y^2t + yz^2 + zs^2 + t^2s)x^2 + (z^2s + zt^2 + xs^2)y^2 +$$
$$+ (ts^2 + t^2x)z^2 + ys^2t^2].$$

Inlocuind $\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4$ cu -1, avem

$$P = x^5 + y^5 + z^5 + t^5 + s^5 -$$
$$- 5[(ys + zt)x^3 + (xz + ts)y^3 + (xs + yt)z^3 + (xy + zs)t^3 + (xt + yz)s^3]$$
$$+ 5[(y^2t + yz^2 + zs^2 + t^2s)x^2 + (z^2s + zt^2 + xs^2)y^2$$
$$+ (ts^2 + xt^2)z^2 + ys^2t^2] - 5xyzts.$$

PROBLEMA 4114. *Soient un triangle* ABC *inscrit dans un cercle* (O), *de rayon* R *et circonscrit à un cercle* (I), *de rayon* r, (Ω) *le cercle qui passe aux milieux des segments* AI, BI, CI.

1. *Les cercles* (Ω) *et* (I) *se coupent sous un angle* x *tel que:*

$$\cos x = \cos A + \cos B + \cos C - \frac{1}{2}.$$

2. *Le pied de leur axe radical partage le segment* OI, *dans le rapport* r : 2R + r *(enunţ corectat).*

V. Thébault.

Soluţie dată de D-nii: C. Ivănescu (Bârlad), N. N. Mihăileanu (Constanţa) şi I. N. Sager (Prof. R.-Sărat).

1. Cercul (Ω) este locul geometric al punctelor care divid în părţi egale secantele trecând prin I şi cuprinse între I şi cercul circumscris; deci centrul său se află pe OI. Insemnând cu A'B'C' triunghiul înscris în (Ω), din considerarea triunghiurilor IB'Ω şi

IBO deducem că: $\Omega I = \Omega O$ şi $\Omega B' = R : 2$. Să considerăm acum triunghiul $IM\Omega$, unde M este unul din punctele de intersecţie ale cercurilor I şi Ω. Observăm cu uşurinţă că avem $\sphericalangle IM\Omega = \sphericalangle x$ şi ca atare $\cos x\, IM\Omega = \cos x$. In acest triunghiu putem deci scrie:

$$\cos x \frac{\overline{MI}^2 + \overline{M\Omega}^2 - \overline{I\Omega}^2}{2\, MI \,.\, M\Omega}$$

în care dacă înlocuim:

$$MI = r \; ; \; M\Omega = \Omega B' = R : 2 \; ; \; I\Omega = 1/2 \sqrt{R\,(R - 2r)}$$

obţinem:

$$\cos x = \frac{r}{R} + \frac{1}{2}$$

în care făcând înlocuirea cunoscută:

$$\cos A + \cos B + \cos C - 1 = \frac{R}{r}$$

dăm tocmai peste relaţia cerută de punctul (1) din enunţul problemei.

2. Fie P, piciorul axului radical. Ni se cere a evalua raportul: IP/OP; dar cum avem: $OP = 2\Omega I + IP$, acest raport se mai scrie:

$$IP : 2\Omega I + IP. \qquad (1)$$

Valoarea segmentului IP este dată de:

$$IP = \frac{(\overline{M\Omega}^2 - \overline{MI}^2) - \overline{I\Omega}^2}{2\, I\Omega} = \frac{r\sqrt{R - 2r}}{2\sqrt{R}}$$

iar cea a segmentului ΩI deja calculată:

$$\Omega I = 1/2 \sqrt{R\,(R - 2r)}$$

şi introducând în (1) aceste valori obţinem:

$$IP : OP = r : 2R + r$$

adică punctul (2) al enunţului problemei este şi el demonstrat.

Observări făcute de D-l N. N. Mihăileanu: 1°. Să cercetăm proprietatea corelativă, pentru cercurile exinscrise. Fie (Ω_a), cercul care trece prin mijloacele segmentelor AI_a, BI_a, CI_a, I_a fiind centrul cercului exinscris relativ

la A. Cercurile (Ω_a) şi (I_a) nu se mai taie, dar în schimb se intersectează cercurile (Ω_a) , (O) în N de exemplu, astfel ca:

$$\cos ON\Omega_a = 1 - \frac{r_a}{2R}.$$

2°. Fie Q piciorul axei radicale a cercurilor (Ω_a) , (I_a) pe linia centrelor. Se găseşte:

$$QI_a : QO = r_a : 2R - r_a$$

$$QI_a : Q\Omega_a = r_a : r_a - R \text{ etc.}$$

CPT. GH. N.

PROBLEMA 4137. *Să se rezolve sistemul de ecuaţii:*

$$xzu + yzv = 2ab \qquad zuw + yuv = 2ad$$

$$xzw + xyv = 2bc \qquad xuv + zvw = 2bd$$

$$xyu + yzw = 2ac \qquad xuw + yvw = 2cd.$$

M. GHERMĂNESCU.

I. *Soluţie* dată de D-nii: MIRCEA MĂNESCU (Elev cl. VI, Liceul «M. Eminescu», Buc.) şi P. VARLAM (Elev cl. VII, Lic. «T. Maiorescu», Buc.).

Să punem

$$X = xu \ , \ Y = yv \ , \ Z = zw$$

şi să înmulţim prima ecuaţie cu ultima, a doua cu a patra, iar a treia cu a cincea, membru cu membru; obţinem sistemul

$$(1) \qquad X(Y + Z)^2 = 4abcd = K$$

$$(2) \qquad Y(Z + X)^2 = 4abcd = K$$

$$(3) \qquad Z(X + Y)^2 = 4abcd = K.$$

Scăzând primele două ecuaţiuni, obţinem

$$(X - Y)(Z^2 - XY) = 0.$$

Vom deosebi două cazuri.

a) $X = Y$. Ecuaţiile (1) şi (3) devin

$$X(X + Z)^2 = K \ , \ 4X^2Z = K$$

de unde, prin scădere

$$X(X - Z)^2 = 0.$$

Nu putem lua $X = 0$ căci $K \neq 0$, rămâne $X = Z$ deci, în virtutea uneia din ecuațiile (1), (2), (3), putem scrie

$$X = Y = Z = \varepsilon \sqrt[3]{abcd}$$

ε fiind una din rădăcinile cubice ale unității. Cu acestea, ecuațiile propuse dau

(I)
$$x = \frac{\varepsilon' bc}{\sqrt[3]{abcd}} \quad , \quad y = \frac{\varepsilon' ac}{\sqrt[3]{abcd}} \quad , \quad z = \frac{\varepsilon' ab}{\sqrt[3]{abcd}} \qquad \varepsilon\varepsilon' = 1.$$
$$u = \frac{\varepsilon' ad}{\sqrt[3]{abcd}} \quad , \quad v = \frac{\varepsilon' bd}{\sqrt[3]{abcd}} \quad , \quad w = \frac{\varepsilon' cd}{\sqrt[3]{abcd}}$$

care constitue un sistem de soluții ale sistemului de ecuații propus.

2^0. $Z^2 = XY$. Înlocuim în (2) și (3) XY prin Z^2 și scădem; lăsând la o parte soluția inacceptabilă $Z = 0$, rămâne

$$X^2 + Y^2 - Z(X + Y) = 0$$

sau

$$(X + Y)^2 - Z(X + Y) - 2Z^2 = 0$$

de unde

$$X + Y = 2Z \quad , \quad X + Y = -Z$$

rezolvăm sistemul format de una din aceste ecuații și

$$XY = Z^2$$

și găsim respectiv

$$X = Y = Z$$

rezultat pe care l'am mai întâlnit și

$$X = \varepsilon Z \quad , \quad Y = \varepsilon' Z \qquad \varepsilon, \varepsilon' \neq 1$$

și, de oarece $\varepsilon + \varepsilon' + 1 = 0$, ecuația (3) dă

$$Z = \varepsilon_1 \sqrt[3]{4abcd} \qquad \varepsilon_1^3 = 1$$

iar ecuațiile sistemului propus conduc la

(II)
$$x = \frac{-2bc}{\varepsilon_1 \sqrt[3]{4abcd}} \quad , \quad y = \frac{-2ac}{\varepsilon_1 \sqrt[3]{4abcd}} \quad , \quad z = \frac{-2ab}{\varepsilon_1 \sqrt[3]{4abcd}}$$
$$u = \frac{-2\varepsilon\varepsilon_1^2 ad}{\sqrt[3]{4abcd}} \quad , \quad v = \frac{-2\varepsilon'\varepsilon_1^2 bd}{\sqrt[3]{4abcd}} \quad , \quad w = \frac{-2\varepsilon_1^2 cd}{\sqrt[3]{4abcd}}$$

în care ε_1 este una din rădăcinile ecuației $\varepsilon_1^3 = 1$, aceeași în (x, u), (y, v), (z, w) dar putând diferi dela un grup la altul.

II. *Soluție* dată de D-l St. Olteanu.

In loc să înmulțim, să *împărțim* ecuația a șasea cu prima, etc... obținem

$$(\alpha) \qquad u = \frac{ad}{bc}x \ , \ v = \frac{bd}{ac}y \ , \ w = \frac{cd}{ab}z.$$

Punem

$$(\beta) \qquad X = ax \ , \ Y = by \ , \ Z = cz \ , \ K = \frac{2a^2b^2c^2}{d}$$

primele trei ecuații ale sistemului propus devin

$$(4) \qquad Z(X^2 + Y^2) = K$$

$$(5) \qquad X(Z^2 + Y^2) = K$$

$$(6) \qquad Y(X^2 + Z^2) = K.$$

Prin scăderea primelor două se obține

$$(Z - X)(Y^2 - ZX) = 0.$$

Deosebim și aci 2 cazuri

a) $Z = X$. Ecuațiile (5) și (6) devin

$$X(X^2 + Y^2) = K \qquad 2X^2Y = K$$

de unde

$$4X^6 - 4KX^3 + K^2 = 0 \quad \therefore \quad (2X^3 - K)^2 = 0$$

deci

$$Y = Z = X = \varepsilon\sqrt[3]{\frac{K}{2}},$$

regăsim sistemul (I) dela prima soluție.

b) $Y^2 = ZX$. Inlocuim în (5) și (6) Y^2 prin ZX, ridicăm (6) la patrat și eliminăm ZX; obținem ecuația

$$(X + Z)^6 - 5K(X + Z)^3 + 4K^2 = 0$$

care se descompune în

$$(X + Z)^3 = K \ , \ (X + Z)^3 = 4K$$

sau

$$X + Z = \varepsilon\sqrt[3]{K} \ , \ X + Z = \varepsilon\sqrt[3]{4K}$$

deducem respectiv $\varepsilon\varepsilon' = 1$

$$XZ = \varepsilon'\sqrt[3]{K^2} \ , \ XZ = \varepsilon'\sqrt[3]{\frac{K^2}{4}}.$$

Sistemul

$$X + Z = \varepsilon \sqrt[3]{K} \quad , \quad XZ = \varepsilon' \sqrt[3]{K^2}$$

conduce la sistemul (II), iar sistemul

$$X + Z = \varepsilon \sqrt[3]{4K} \quad , \quad XZ = \varepsilon' \sqrt[3]{\frac{K^2}{4}}$$

conduce la (I), deja considerat.

(III). *Soluţie* dată de D-l I. SAGER (Profesor). Ca la soluţia a doua, obţinem şirul de relaţii (α), care introduse în primele trei ecuaţii dau respectiv

$$(7) \qquad dz\,(a^2x^2 + b^2y^2) = 2a^2b^2c$$

$$(8) \qquad dx\,(b^2y^2 + c^2z^2) = 2b^2c^2a$$

$$(9) \qquad dy\,(c^2z^2 + a^2x^2) = 2c^2a^2b.$$

Impărţim (8) cu (9) şi aplicăm, după o simplă transformare, o proprietate cunoscută a proporţiilor; se deduce după simplificări evidente

$$(by - ax)\,(c^2z^2 - abxy)\,0.$$

Restul e analog cu cel dela soluţia a doua, mai puţin substituţiile (β).

Notă. 1. Sistemul propus provine dela o problemă de geometrie ce am tratat intr'o lucrare mai veche şi care se enunţă astfel:

Să se găsească complexele patratice de drepte cu ecuaţia pluckeriană

$$Ap_{23}^2 + Bp_{31}^2 + Cp_{12}^2 + Dp_{14}^2 + Ep_{24}^2 + Fp_{34}^2 = 0$$

a căror suprafaţă singulară este cuadrica dublă

$$(ax^2 + by^2 + cz^2 + d)^2 = 0.$$

In sistemul propus, x, y, z, u, v, w sunt respectiv A, B, C, D, E, F.

2. Soluţia a doua se mai poate simplifica. Astfel, la cazul a era mai uşor să se scadă ecuaţiile provenite din (5) şi (6) spre a conchide imediat $X = Y = Z$. Cazul b se putea trata ca la prima soluţie. Am publicat totuşi soluţia sub forma trimisă, ca şi pe a treia de altfel, pentru a arăta metode variate de rezolvire ale aceleiaşi chestiuni. Bine înţeles că studiul lor critic, în afară de simplele observaţiuni de mai sus, rămâne în sarcina corespondenţilor, cari nu au decât de profitat din asemenea comparaţiuni.

M. G.

*PROBLEMA 4221. *Să se găsească un număr de trei cifre aşa fel ca suma cifrelor lui să fie un multiplu al fiecărora din ele.*

V. THÉBAULT.

Fie *abc* numărul căutat. Conform enunţului avem:

$$\begin{cases} a+b+c=ka \\ a+b+c=k'b \\ a+b+c=k''c \end{cases}$$

k, k', k'' fiind numere întregi. Sistemul de mai sus se poate încă scri:

$$(1) \qquad \begin{cases} a(1-k)+b+c=0 \\ a+b(1-k')+c=0 \\ a+b+(1-k'')c=0. \end{cases}$$

Pentru ca acest sistem de trei ecuaţii lineare şi omogene în a, b, c să admită soluţii diferite de zero trebuie ca determinantul coeficienţilor să fie nul, adică:

$$\begin{vmatrix} 1-k & 1 & 1 \\ 1 & 1-k' & 1 \\ 1 & 1 & 1-k'' \end{vmatrix} = 0.$$

Desvoltând acest determinant şi făcând reducerile avem:

$$(2) \qquad k'k''+k''k+kk'=kk'k''$$

sau

$$(2') \qquad \frac{1}{k}+\frac{1}{k'}+\frac{1}{k''}=1.$$

Trebuie deci să găsim numerile întregi k, k', k'' care să satisfacă relaţiei (2) sau (2'). Apoi primele 2 ecuaţii ale sistemului (1) ne dau

$$(3) \qquad \frac{a}{k'}=\frac{b}{k}=\frac{c}{kk'-k-k'}=\rho \quad \therefore$$

$$(3') \qquad a=\rho k' \ , \ b=\rho k \qquad c=\rho(kk'-k-k').$$

Deci k, k', k'' odată determinaţi, a, b, c sunt daţi de relaţiile (3') ρ fiind un factor de proporţionalitate căruia îi vom da toate

valorile pentru care obținem numere întregi a, b, c de o singură cifră.

Să trecem la rezolvarea ecuației (2). Observăm că ea este simetrică față de k, k', k'' deci odată ce avem o soluție k_1, k'_1, k''_1 putem permuta între ele valorile găsite. Vom considera numai soluțiile distincte. Avem de aface cu o problemă de analiză nedeterminată, pe care o vom rezolva-o prin încercări. Pentru a micșora numărul acestora scrim ecuația (2) sub forma:

$$k'' = 1 + \frac{k + k'}{(k-1)\,k' - k}. \tag{4}$$

Trebuie deci ca

$$k + k' \geqslant (k-1)\,k' - k \quad \therefore \quad k' \leqslant \frac{2k}{k-2}$$

sau

$$k' \leqslant 2 + \frac{4}{k-2}.$$

Din aceasta ultima relație se vede că deîndată ce $k > 6$ avem $k' < 3$. Cum soluția $k' = 1$ este exclusă căci în acest caz $k = k' = \infty$, $a = c = 0$ și numărul n'ar mai fi de trei cifre, urmează că pentru $k > 6$ trebue să avem $k' = 2$. Studiind însă cazul $k' = 2$ sau (ceeace e tot una, datorită simetriei ecuației) $k = 2$ găsim după cum se va vedea îndată că soluțiile unice ale acestui caz sunt: (2, 3, 6) și (2, 4, 4). Deci în ipoteza $k' = 2$ și $k > 6$ nu putem avea soluții. Astfel fiind în încercările ce vom face, vom da pe rând lui k valori dela 1 până la 6.

Lăsăm la o parte cazul $k = 0$ căci atunci din (1) rezultă $a + b + c = 0$. $k = 1$. Din (3) rezultă

$$\frac{1}{k'} + \frac{1}{k''} = 0.$$

Această relație nu poate fi satisfăcută decât pentru $k' = k'' = \infty$ și cum

$$\frac{a+b+c}{k'} = b \quad , \quad \frac{a+b+c}{k''} = c$$

rezultă

$$b = c = 0$$

a putând fi oarecare. La aceleaşi concluzii se ajunge şi din considerarea primei ecuaţii a sistemului (1). Avem în acest caz soluţiile:

100 , 200 , 300 , 400 , 500 , 600 , 700 , 800 , 900.

Cazurile $k' = 1$ şi $k'' = 1$ sunt excluse deoarece ele atrag $a = 0$. $k = 2$. Relaţia (4) devine:

$$k'' = 1 + \frac{k' + 2}{k' - 2}$$

sau încă

$$k'' = 1 + \frac{k' - 2 + 4}{k' - 2} = 2 + \frac{4}{k' - 2} \cdot$$

De aci deducem uşor că putem avea

$$k' = 3 \; ; \; k' = 4 \; ; \; k' = 6.$$

Valorile corespunzătoare ale lui k'' sunt

$$k'' = 6 \; ; \; k'' = 4 \; ; \; k'' = 3.$$

Lăsăm la o parte soluţia $k' = 6$ şi $k'' = 3$ care nu diferă de $k' = 3$ şi $k'' = 6$.

Deci soluţiile unice ale acestui caz sunt:

$k = 2$, $k' = 3$, $k'' = 6$ şi $k = 2$, $k' = 4$, $k'' = 4$.

Introducând aceste valori în (3) avem:

(5) $\quad \frac{a}{3} = \frac{b}{2} = \frac{c}{1} = \rho$ şi (6) $\frac{a}{4} = \frac{b}{2} = \frac{c}{2} = \rho$.

In (5) făcând $\rho = 1, 2, 3$ avem soluţiile:

321 , 642 , 963.

Deasemenenea din (6) rezultă soluţiile:

211 , 422 , 633 , 844.

$k = 3$. Avem: $\quad k'' = 1 + \frac{k' + 3}{2k' - 3} \quad ; \quad k' \leqslant 6.$

In afară de soluția $k=3$, $k'=2$ și $k''=6$ pe care am întâlnit-o avem încă soluția distinctă $k=3$; $k'=3$, $k''=3$ care conduce la $a=b=c=3\rho$. Acest caz ne dă încă următoarele nouă soluții:

111 , 222 , 333 , 444 , 555 , 666 , 777 , 888 , 999.

Pentru $k=4$ găsim a doua soluție a cazului $k=2$.

$k=5$. Avem: $\quad k''=1+\dfrac{k'+5}{4k'-5}\quad ;\quad k'\leqslant\dfrac{10}{3}$.

Făcând $k'=2$ și $k'=3$ relațiile nu se verifică. Deci nu avem soluții în acest caz.

$k=6$. Avem:

$$k''=1+\frac{k'+6}{5k'-6}\quad ,\quad k'\leqslant 3.$$

Făcând $k'=2$ și $k'=3$ găsim soluțiile:

$k=6$, $k'=2$, $k''=3$ și $k=6$, $k'=3$, $k''=2$.

Aceste soluții nu sunt distincte de soluția $k=2$, $k'=3$, $k''=6$ găsită în cazul $k=2$.

Problema admite în total 25 soluții distincte.

Insă din fiecare soluție dedusă din (5) rezultă încă cinci permutând cifrele între ele. Deasemeni din fiecare soluție din cele deduse din (6) rezultă încă 2 prin permutarea cifrelor. Așa că în total problema admite 48 soluții.

CEZAR IVĂNESCU
(Student, Iași)

Au rezolvat problema prin diverse încercări D-nii: SUB.-LOCOT. AVRAM N. CONST. și ZIFF S. MARTIN găsind 39 soluții și CHIRIAC CONST. găsind 6 soluții.

I. L.

*EXERCIŢII

4. Un număr ab de două cifre multiplicat cu cifra c dă la produs un număr de trei cifre $\alpha\beta\gamma$; iar multiplicat cu $c + x$ dă $\gamma\beta\alpha$.

Să se determine x, găsindu-se numerele care satisfac problema.

GH. VASILIU.

R. Conform enunţului avem

$$(10a + b) \cdot c = 100\alpha + 10\beta + \gamma \quad \text{şi} \quad (10a + b) \cdot (c + x) = 100\gamma + 10\beta + \alpha$$

deci:

$$(10a + b)\, x = 99\,(\gamma - \alpha) \text{ de unde } \begin{cases} 10a + b = 99 \\ x = \gamma - \alpha. \end{cases}$$

Dând lui x valori dela 0 la 9 găsim următoarele soluţii:

pentru $x = 1, 3, 5$ şi 7, $c = 5, 4, 3$ şi 2 iar $\alpha\beta\gamma = 495, 396, 297,$ şi 198.

5. Dacă între rădăcinile ecuaţiei: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ avem relaţiile

$$\sum \frac{1}{x_1} = \frac{1}{\Sigma x_1} \quad \text{şi} \quad \sum \frac{x_1}{x_2 x_3} + \sum \frac{1}{x_1} = 0$$

atunci coeficienţii a, b, c şi d sunt în progresie geometrică.

N. PATRULEA.

R. Din prima relaţie deducem:

$$\sum \frac{1}{x} = \frac{\Sigma x_1 x_2}{x_1 x_2 x_3}$$

care ţinând seama de relaţiile dintre coeficienţii şi rădăcinile ecuaţiunei date devine

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}.$$

Din a doua relaţie a enunţului deducem că

$$(\Sigma x_1)^2 - \Sigma x_1 x_2 = 0$$

şi ţinând cont că

$$(\Sigma x_1)^2 = \frac{b^2}{a^2} \quad \Sigma x_1 x_2 = \frac{c}{a},$$

deducem:

$$\frac{b}{c} = \frac{a}{b};$$

deci

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c} \qquad \text{Q. E. D.}$$

6. Intr'un oval CASSINI, sinusurile unghiurilor razelor vectoare sunt proporţionale cu ordonatele.

N. N. MIHĂILEANU.

R. Fie F, F' focarele şi M un punct curent; avem:

$$\overline{FM} \cdot \overline{F'M} \sin\widehat{FMF'} = \overline{FF'} \cdot y$$

dar $\overline{FF'}$ e fixă şi $\overline{FM} \cdot \overline{F'M}$ constant.

7. Să se arate că există identitatea:

$$\frac{\sin n\left(\frac{\pi}{2} - y\right)}{\sin n\alpha} = \left(\frac{\sin\alpha}{\cos y}\right)^n$$

dacă:

$$\operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{tg} y.$$

SUB.-LOCOT. I. C. SAVIN

R. Din relaţia a doua a enunţului scoatem că

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - y$$

care înlocuită în prima relaţie verifică exerciţiul.

PROBLEME PROPUSE

4301. Să se găsească un patrat perfect de patru cifre şi altul de trei cifre, cari scrise unul după altul să ne dea un patrat perfect.

M. GHERMĂNESCU.

4302. Să se arate ce condiţie trebuie să îndeplinească cifrele unui număr întreg divizibil cu 2^m, pentru a fi divizibil şi cu 2^{m+n}?.

LT. COMANDOR AV. GR. ZAPAN.

4303. Să se cerceteze dacă există numere de trei şi patru cifre cari să satisfacă egalităţilor:

$$abc = 3(a^2 + b^2 + c^2) + 2(a^3 + b^3 + c^3)$$

$$abcd = 3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 2(a^3 + b^3 + c^3 + d^3).$$

CPT. GH. NICOLESCU.

*4304. In triunghiul ABC fie β, γ două puncte pe laturile AC, AB. Cercul $(A\beta\gamma)$ retaie cercurile (ABC), $(BC\beta)$, $(BC\gamma)$ respectiv în *a, b, c.*

Coardele $A\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ se taie în acelaş punct pe BC.

Dreptele Bb, Cc se taie într'un punct α situat pe cercul $A\beta\gamma$, pe o paralelă dusă prin A la BC.

N. N. MIHĂILEANU.

*4305. Pe laturile BC, CA, AB ale triunghiului ABC se iau respectiv punctele A_1, B_1, C_1. Prin vârful A se duce o dreaptă oarecare Δ, care este întâlnită de dreptele A_1B_1, A_1C_1 respectiv în D_1 şi D_2.

Să se arate că dreptele CD_1, BD_2, B_1C_1 sunt concurente.

N. BOTEA.

4306. Fie A', B', C' proecţiile vârfurilor triunghiului de referinţă ABC pe laturile respective ale triunghiului podar $A_1B_1C_1$ al unui punct M din planul său.

Axul de omologie al triunghiurilor ABC şi A'B'C' este ax radical al cercurilor A'B'C' şi $A_1B_1C_1$.

CONST. IONESCU-BUJOR.

4307. Fie (I_1) cercul înscris triunghiului ABC. Se duce tangenta la cercul (I_1) paralelă la $\overline{BC}$. Fie (I_2) cercul înscris triunghiului format de $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ şi tangenta dusă. Ducem la el o tangentă paralelă cu BC şi în mod analog formăm cercurile (I_3), $(I_4)\ldots(I_n)$ etc. de lungimi l_1, $l_2\ldots l_n$ şi suprafeţe s_1, $s_2\ldots s_n$, etc.

1) Să se demonstreze că sumele:

$$l_1 + l_2 + l_3 + \ldots + l_n + \ldots$$

şi:

$$s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_n + \ldots$$

admit limite L şi S când n tinde la infinit.

2) Dacă notăm cu r raza cercului de lungime L şi cu R raza cercului de suprafaţă S, să se demonstreze că raportul $\frac{R}{r}$ rămâne inferior unui număr fix oricare ar fi forma triunghiului iniţial.

A. PÂRVU.

*4308. Fiind dat polinomul

$$P(x) = x^2 + 3x + 2$$

se cere să se rezolve ecuația

$$27P(x) \cdot P(x+2) \cdot P(x+4) + 320 = 0.$$

GH. TH. GHEORGHIU.

4309. Dacă A, B și C sunt unghiurile unui triunghiu, să se stabilească:

$$3\sin A \sin B \sin C + \Sigma \sin A (\cos B \cos C - 2\cos A) = 0.$$

GH. VASILIU-LEOBEN.

4310. Să se determine natura seriei al cărei termen general este:

$$U_n = \frac{n^n}{(a+1)(2a+1)(3a+1) \ldots (na+1)}$$

a fiind un număr pozitiv.

N. C.

ERATĂ. 1°. Problema 4041 publicată din eroare în numărul trecut la pag. 29, a fost anulată prin erata dela pag. 38, Vol. XXXVIII.

Soluția adevăratei probleme 4041, propusă în Vol. XXXVIII, se va publica ulterior.

2°. La pag. 33 din numărul trecut, rândul 7 de sus trebuie înlocuit cu

$$\overset{\frown}{2MPA} = 180^\circ - \overset{\frown}{MAP} = \pi - \varphi$$

iar în rândul 9 se înlocuește QPO prin 2QPO.

Articolele, notele şi problemele însemnate cu * se referă la matematicile elementare (cursul de liceu).

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Bădescu Em. A. (4244, 54, 59, 66, 76, N); *Cardara G.* (P); *Chiriţă M.* (3961); *Dobrescu D. P.* (4292, 93); *Ghiocel V.* (4251); *Grigorescu A. V.* (4207, 92, 93); *Hornstein* (4292); *Ivănescu C* (4126, 244, 54, 69, 73); *Lenco I.* (3965); *Mănescu M.* (4097, 232, 82); *Margulius M.* (2063, 79, 4254, 69, N); *Mavrodin D. D.* (4179, 296); *Mazilu C. P.* (4244, 51); *Mereuţă Em.* (4083, 97); *Mihăileanu N. N.* (2063, 851, 3085, 845, 74, 970, 76, 4224, 35, 54, 69, 73); *Mihalcea O.* (4293); *Mircea A.* (4199, 224, P); *Negrea A. M. L.* (4093, 273); *Parepeanu C. I. Subloc.* (4199, 296); *Predoescu Tr.* (4251); *Sager I.* (4254); *Savin C. I. Subloc.* (P); *Silaş Gh.* (4255, 84, 92); *Stoica Al.* (4244, 82); *Thébault V.* (A); *Ziff M.* (4179, 251).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie **pe o singură parte a foii şi nu se vor tratà mai multe chestiuni diferite pe aceiaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecțiunea „GAZETEI MATEMATICE“

«Gazeta Matematică» vinde ani completi broșați cu prețul de 400 lei volumul, afară de volumele: X, XVII, XVIII, XIX, XX și XXI care se vând cu prețul de 500 lei volumul.

Volumele: I, XV și XXV sunt epuizate.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu și V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **N. Abramescu,** *Lecțiunile de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediția IV revăzută și adăogită,* 1924 (Epuizată).

3. **A. G. Ioachimescu și G. Țițeica,** *Culegere de probleme de mecanică și geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme și o planșă) (Epuizată).

4. **Tr. Lalescu și Șt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografie* (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu,** *Tratat de geometrie analitică,* Fascicola I *Ediția II revăzută și adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—
Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).
Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).
Idem, Fascicola IV Aplicațiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150,—

6. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10,—

7. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediția III-a revăzută și îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. Lei 180,—

8. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu și G. Țițeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

9. **G. Țițeica,** *Culegere de probleme de geometrie* Lei 150,—

La aceste prețuri se vor adăogà taxele poștale pentru expediție.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul.* (Ediția II) Lei 150,—

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plătește înainte și începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamațiunile și cererile pentru cărți din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete numai D-lui: Inginer **Al. D. Bunescu,** Directorul General al Monitorului Oficial și Imprimeriilor Statului, B-dul Elisabeta 29, București I.

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii și orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie și expediție, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Căluşei 23, București 4.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXXIX

NUMĂRUL 3. — NOEMVRIE 1933

ASOCIAȚIUNEA SIBIIU

SUMARUL

1. Localul Societăţii „Gazeta Matematică".
2. Sur le tétraèdre trirectangle . . . . . *V. Thébault*
3. Două teoreme de geometrie . . . . . *Marius Margulius*
4. Premiul „Vasile Conta".
5. Note matematice: 9—11.
6. Bibliografie.
7. Cereri 229.
8. Diverse.
9. Probleme rezolvate: 2117, 3270, 3875, 3898, 3936, 3974, 3984, 4009, 4025, 4207, 4265, 4292.
10. Exerciţii: 8.
11. Probleme propuse: 4237, 4279, 4311—4320.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1933

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: Colonel **Gh. Buicliu** din Ministerul Apărării Naţionale; **C. D. Orăşanu**, Inginer, Licenţiat în Matematici, Conferenţiar la Şcoala Politechnică «Regele Carol II» din Bucureşti, Profesor la Şcoalele Aeronautice; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice" se vor trimite D-lui Inginer-Şef GH. ILIESCU, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret, Bucureşti 6.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29 Bucureşti 1) în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 691, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 214, 36, 70, 71, 97, 99, 310, 33, 67, 84, 86, 99, 412, 50, 553, 650, 79, 711, 29, 64, 876, 906, 14, 29, 59, 87, 2003, 04, 17, 70, 74, 111, 70, 338, 405, 30, 39, 66, 77, 502, 03, 56, 77, 87, 607, 09, 23, 38, 55, 65, 84, 92, 709, 13, 17, 35, 69, 80, 814, 65, 86, 89, 909, 12, 26, 36, 47, 3005, 45, 69, 81, 127, 61, 69, 208, 30, 55, 60, 98, 300, 04, 09, 10, 16, 18, 50, 405, 12, 24, 25, 45, 72, 89, 93, 522, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 88, 608, 20, 22, 27, 32, 46, 47, 57, 65, 81, 82, 84, 99, 700, 03, 33, 36, 93, 804, 08, 29, 36, 44, 53, 64, 80, 96, 909, 13, 15, 16, 18, 20, 33, 44, 83, 87, 4010, 13, 30, 34, 45, 53, 59, 62, 68, 70, 73, 85, 102, 03, 11, 12, 18, 19, 23, 32, 47, 48, 50, 51, 55, 63, 67, 69, 91, 92, 201, 03, 06, 09, 10, 13, 25, 26, 30, 36, 37, 40, 43, 46, 48, 49, 52, 56, 57, 74, 75, 77, 79, 80, 81, 83, 87, 88, 89, 90, 91, 98, 300, 01, 03, 04, 06, 07, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procură dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29. Bucureşti 1), cu preţul de 12 lei.

LOCALUL SOCIETĂȚII „GAZETA MATEMATICĂ“

SOLEMNITATEA PUNERII PIETREI FUNDAMENTALE

La începutul anului XXXI, când *Gazeta Matematică* păşea în *a patra decadă* de existenţă, D-l I. Ionescu într'un articol având ca titlu prima parte a titlului de mai sus scria la pagina 21 a volumului XXXI «*...nici până azi, nu numai că nu şi-a putut crea un locaş propriu, dar nici nu a fost în stare să-şi poată închiria o căsuţă în care să-şi ţie întrunirile, să-şi păstreze arhiva,...*».

La începutul anului XXXIX, dacă D-l I. Ionescu ar fi primit să redijeze această dare de seamă ar putea începe cu «*ne bucurăm că în preajma încheierei decadei a patra vom avea un locaş propriu pentru...*» şi cu drept cuvânt pentrucă în ziua de Vineri 27 Octomvrie 1933 ora 10, în al 39-lea an de apariţie a *Gazetei Matematice,* s'a pus piatra fundamentală a localului societăţii, local ce se construeşte la intersecţia stradei Pandele Ţărușanu, cu Calea Griviţei.

Solemnitatea acestui act, de covârşitoare însemnătate pentru *Gazeta Matematică,* s'a desfăşurat într'un cadru academic din cele mai sobre, aşa cum a fost, în Septemvrie 1895 apariţiunea primului număr al revistei, fără invitaţi, fără şampanie.

O simplă slujbă religioasă cu un singur preot, *S. S. I. Popescu-Călineşti* dela biserica *Sf. Vineri-Nouă* şi un dascăl.

Au fost de faţă la solemnitate cei trei membri fondatori ai revistei, D-nii:

Tancred Constantinescu, Andrei Gh. Ioachimescu şi Ion Ionescu,

precum şi următorii membri:

Abason Ernest, Antoniu S. Ion, Bruckner Victor, Buicliu Gh., Bunescu D. Al., Buşilă D. C., Ciorănescu Nicolae, Filipescu Em. Gh., Georgescu I. N., Georgescu N. N., Iliescu Gh., Ioanovici Aurel, Lazu Const., Manoilescu Mihail, Mărăcine B., Mareş T., Mateescu Cr., Mititelu C. Claudiu, Nichifor A. G., Nicolau T. M., Nicolau H. C., Orăşanu D. Cezar, Pârvu Aurel, Roşu Al., Sălăgeanu Aurel, Sarian Mihai, Smântânescu Aurel, Stamatescu I. Gh., Stan D., Ţiţeica Gh., Vasilache I., Vasiliu Gh. Dan şi Woinarosky R. şi, după închiderea pergamentului în tubul de oţel, Zamfirescu Gr.

Membrii prezenți și S. S. Preotul *I. Popescu-Călinești* au semnat pergamentul.

După oficierea slujbei religioase și sfințirea fondațiilor, D-l delegat Col. Gh. Buicliu a citit pergamentul și a ținut următoarea cuvântare:

Domnule părinte, D-lor colegi,

Astăzi, când se pune temelia localului Societății **„Gazeta Matematică“**, *delegația Societății găsește nemerit să reamintească și să rezumeze o inițiativă și o activitate, care durează de 39 ani, în domeniul celei mai pure, celei mai corecte și celei mai dezinteresate activități a gândirei omenești, în domeniul matematicilor de fructul cărora beneficiază cu atâta abondență toate ramurile de activitate technică.*

In luna Oct. 1894, după rezultatul dezastruos dela examenul de admitere în Anul I-iu al Școalei Naționale de Poduri și Șosele, 5 ingineri tineri s'au hotărît să ia inițiativa scoaterei unei reviste de matematici, cu scopul de a stimula învățământul matematicelor și a complecta astfel parte din lipsurile de totdeauna, a învățământului matematic, în licee.

Numele acestor 5 inițiatori sunt:

Victor Balaban, Vasile Cristescu, Ion Ionescu, Mihail Roco și Ion Zottu.

Până în August 1895 acești 5 ingineri și-au mai asociat încă 5 ingineri, tineri, pe: Tancred Constantinescu, Emanuel Davidescu, Andrei Ioachimescu, Mauriciu Kinbaum și Nicolae Nicolescu.

Acești 10 ingineri au constituit o bază, nu de numerație, ci o bază de construcție, o bază pe urmele căreia s'a construit și a prosperat an, de an, revista **„Gazeta Matematică“** *la lumina și îndemnul căreia de 39 de ani încoace, s'au pregătit cei mai mulți dintre tinerii cari au îmbrățișat cariere în care științele matematice sunt temelia solidă. Mai mult decât atât, se poate afirma că mulți din mânuitorii de azi ai matematicei și technicei române și-au descoperit numai la* **„Gazeta Matematică“** *înclinarea tainică a minții spre o specialitate către care nu se îndreaptă fie cine.*

Primul număr al **„Gazetei Matematice“** *a apărut la 15 Sept. 1895 şi de atunci cu toate sacrificiile de timp şi bani ale membrilor* **„Gazetei Matematice“, „Gazeta Matematică“** *a continuat să apară regulat la 15 ale fiecărei luni, graţie unui superior spirit de jertfă al membrilor redacţiei dela început şi societăţei de mai târziu.*

Chiar în timpul războiului de întregire, atunci când totul vibra pentru realizarea idealului naţional **„Gazeta Matematică“** *a continuat să apară la Iaşi cu toate greutăţile războiului şi cu toate neajunsurile acelor zile, în care se construia epura Romîniei de azi şi de totdeauna.*

La 1 Sept. 1909 cei 21 de membri ai redacţiei **„Gazetei Matematice“** *s'au constituit în Societate cu numele: Societatea* **„Gazeta Matematică“.**

Numărul mereu crescând al membrilor Societăţei, nevoia de a avea un adăpost pentru şedinţele lunare ale Societăţei, pentru adunările ei generale şi extraordinare, nevoia de a păstra în condiţiuni bune şi în un loc fix arhiva Societăţei, corecţiunile din ce în ce mai numeroase ale volumelor anuale, ale revistei **„Gazeta Matematică“,** *a publicaţiunilor bibliotecei* **„Gazeta Matematică“** *a cărţilor şi revistelor primite în schimb, a făcut să mijească în gândul şi sufletul membrilor Societăţei dorul de a avea un cămin propriu.*

Această dorinţă a avut un început de realizare materială la 28 Septemvrie 1920, când regretatul NICOLAE NICOLESCU *a donat suma de 500 lei pentru înfiinţarea unui fond destinat construcţiei unui local al* **„Gazetei Matematice“.**

Acest început foarte mic şi totuşi infinit de mare găseşte ecou în posibilităţile de entuziasm ale membrilor Societăţei **„Gazeta Matematică“.**

O comisiune specială se instituieşte pentru adunarea de fonduri.

In anul 1923 D-l TANCRED CONSTANTINESCU, *pe atunci director la C. F. R. donează Societăţei noastre o parcelă din locurile Casei Muncii a C. F. R. Societatea îi mulţumeşte aci cu recunoştinţă, după cum mulţumeşte cu pietate memoriei lui* TRAIAN LALESCU, *care în calitate de deputat a pus toată diligenţa să se legifereze de Parlament şi să se promulge legea care consfinţea această donaţie.*

Mai târziu, în 1927, D-l MIHAIL MANOILESCU *în calitate de Subsecretar de Stat la Finanţe stărueşte şi obţine o donaţie de* **un milion** *lei pentru construcţia localului* **„Gazeta Matematică“**, *pentru primul etaj, cum spunea D-lui la acea dată. Îi aducem aci cele mai călduroase mulţumiri.*

Dotată cu parcela de teren şi cu capitalul obţinut prin stăruinţa D-lui MIHAIL MANOILESCU, *Societatea* **„Gazeta Matematică“** *aştepta momentul prielnic începerei construcţiei localului ei.*

Anul acesta în şedinţele lunare şi în adunările generale şi extraordinare Societatea a hotărît să înceapă construcţia localului său.

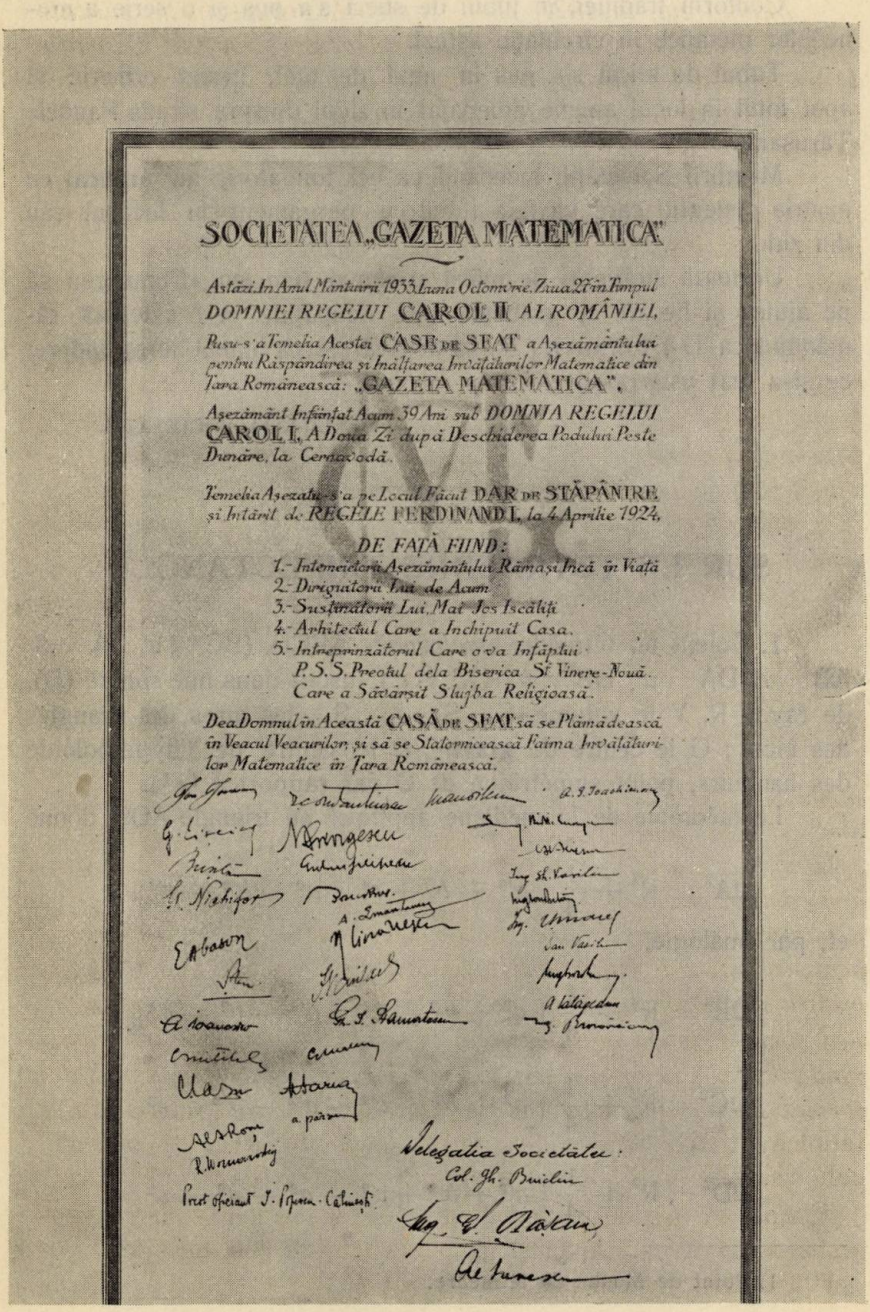
Aducem mulţumiri D-lui arhitect ŞTEFĂNESCU V. *care ne-a întocmit planurile şi colegului de societate, D-lui Inginer* IOANOVICI AUREL *în a cărui antrepriză se construeşte localul numai cu preţul de cost, dându-ne astfel putinţa să realizăm cu un ceas mai de vreme o dorinţă vie şi o necesitate imperioasă.*

Şi acum, când am pus piatra de temelie a clădirei noastre ne îngăduim să subliniem o coincidenţă cu rang de simbol.

Revista **„Gazeta Matematică“** *şi-a luat fiinţă în anul în care se făurea podul dela Cerna-Voda, care leagă material provincia lui* MIRCEA VODĂ *cu pământul ţării, iar averea materială a societăţii, localul, se construeşte azi, în vremea în care se plămădeşte şi se cimentează unirea sufletească a ţării întregite.*

Şi încă ceva, din comisia de supravegherea construcţiei localului face parte şi D-l Inginer Inspector G-ral ION IONESCU, *unul din întemeietorii şi stâlpii* **„Gazetei Matematice“**, *pentru a păstra legătura cu entuziasmul începutului şi pentru a înaripa perspectivele viitorului Societăţii* **„Gazeta Matematică“**, *a cărei menire va continua să fie acea înscrisă în pagina 1 a anului I-iu şi acea determinată simbolic de locul topografic al pietrei fundamentale ce punem astăzi, şi anume: centrul triunghiului format de ansamblul a trei domenii tehnice: de* **Şcoala Politehnică,** *concepţia, de* **Şc. Superioară de Arte şi Meserii,** *ucenicia şi de* **C. F. R. cu atelierele,** *realizarea*».

Apoi s'a pus în un tub de sticlă pergamentul a cărui fotografie se dă la pagina 85 şi un pergament cu lista membrilor Societăţii la data punerii pietrii fundamentale.



SOCIETATEA „GAZETA MATEMATICĂ"

Astăzi în Anul Mântuirii 1933, Luna Octomvrie, Ziua 27 în Timpul DOMNIEI REGELUI CAROL II AL ROMÂNIEI,

Pusu-s'a Temelia Acestei CASE DE SFAT a Așezământului pentru Răspândirea și Înălțarea Învățăturilor Matematice din Țara Românească: „GAZETA MATEMATICĂ".

Așezământ Înființat Acum 39 Ani sub DOMNIA REGELUI CAROL I, A Doua Zi după Deschiderea Podului Peste Dunăre, la Cernavodă.

Temelia Așezată-s'a pe Locul Făcut DAR DE STĂPÂNIRE și Întărit de REGELE FERDINAND I, la 4 Aprilie 1924,

DE FAȚĂ FIIND:

1.- Întemeietorii Așezământului Rămași Încă în Viață
2.- Dirigătorii Lui de Acum
3.- Susținătorii Lui Mai Jos Iscăliți
4.- Arhitectul Care a Închipuit Casa.
5.- Întreprinzătorul Care o va Înfăptui

P.S.S. Preotul dela Biserica Sf. Vineri-Nouă. Care a Săvârșit Slujba Religioasă.

Dea Domnul în Această CASĂ DE SFAT să se Plămădească, în Veacul Veacurilor, și să se Statornicească Faima Învățăturilor Matematice în Țara Românească.

Pergamentul îngropat în fundația localului Societății *«Gazeta Matematică»* în zidul dinspre strada Pandele Țăruşanu.

Conform tradiţiei, în tubul de sticlă s'a pus şi o serie a monedelor metalice în circulaţie astăzi.

Tubul de sticlă s'a pus în unul de oţel, închis ermetic şi apoi totul în locul anume amenajat în zidul dinspre strada Pandele Ţărușanu.

Membrii Societăţii, începând cu cei fondatori, au aruncat cu mistria cimentul care va fixa tubul cu pergament în locaşul său din zid.

Urmează strângeri de mână şi rămas bun, cu «Dumnezeu să ne ajute» şi fiecare se grăbeşte spre ocupaţiile ce-l aşteaptă, rămânând ca D-l IOANOVICI A. să desăvârşească planul întreprinderei ce şi-a luat asupra-şi.

DELEGAŢIA SOCIETĂŢII.

SUR LE TÉTRAÈDRE TRIRECTANGLE

1. Soient un tétraèdre *quelconque* ABCD, ($BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $DA = a'$, $DB = b'$, $DC = c'$), inscrit dans une sphère (O), de rayon R, V le volume, S_a, S_b, S_c, S_d, les aires des triangles des faces; G le centre de gravité, Ω le centre de l'hyperboloïde des hauteurs, point symétrique de O par rapport à G [1]).

Le théorème de la médiane appliqué au triangle AOΩ, donne

$$\overline{\Omega A}^2 = R^2 + \frac{1}{4} \mid a'^2 + b^2 + c^2 - a^2 - b'^2 - c'^2 \mid ,$$

et, par analogie,

$$\overline{\Omega B}^2 = R^2 + \frac{1}{4} \mid a^2 + b'^2 + c^2 - a'^2 - b^2 - c'^2 \mid ,$$

$$\overline{\Omega C}^2 = R^2 + \frac{1}{4} \mid a^2 + b^2 + c'^2 - a'^2 - b'^2 - c^2 \mid ,$$

$$\overline{\Omega D}^2 = R^2 + \frac{1}{4} \mid a'^2 + b'^2 + c'^2 - a^2 - b^2 - c^2 \mid ;$$

---

1) Point de MONGE du tétraèdre.

d'où l'on tire

$$\overline{\Omega A}^2 + \frac{1}{2}\left|a^2+b'^2+c'^2\right| = \overline{\Omega B}^2 + \frac{1}{2}\left|a'^2+b^2+c'^2\right| = \overline{\Omega C}^2 +$$

$$\frac{1}{2}\left|a'^2+b'^2+c^2\right| = \overline{\Omega D}^2 + \frac{1}{2}\left|a^2+b^2+c^2\right| = R^2 + \Sigma\frac{1}{4}a^2,$$

puis,

$$\overline{\Omega A}^2 + \overline{\Omega B}^2 + \overline{\Omega C}^2 + \overline{\Omega D}^2 = 4R^2. \qquad (1)$$

la somme des carrés des distances du centre de l'hypperboloïde des hauteurs aux sommets d'un tétraèdre est égale au carré du diamètre de la sphère circonscrite au tétraèdre [1]).

2. Considérons un tétraèdre ABCD, *trirectangle* en D. Soit H l'orthocentre du triangle ABC, pied de la hauteur DH = h du tétraèdre.

La relation (1) donne les suivantes :

$$a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2 \ , \ a'^2 + b'^2 + c'^2 = 4R^2. \qquad (2)$$

Soient H_a , H_b , H_c , les pieds des hauteurs DH_a , DH_b , DH_c , des triangles rectangles DCB, DAC, DAB. On a aussi

$$\frac{1}{\overline{DH_a}^2} = \frac{1}{\overline{DC}^2} + \frac{1}{\overline{DB}^2} = \frac{1}{c'^2} + \frac{1}{b'^2},$$

et, par analogie,

$$\frac{1}{\overline{DH_b}^2} = \frac{1}{a'^2} + \frac{1}{c'^2} \ , \ \frac{1}{\overline{DH_c}^2} = \frac{1}{b'^2} + \frac{1}{a'^2},$$

d'où, en vertu d'une relation connue,

$$\frac{1}{\overline{DH_a}^2} + \frac{1}{\overline{DH_b}^2} + \frac{1}{\overline{DH_c}^2} = 2\left|\frac{1}{a'^2} + \frac{1}{b'^2} + \frac{1}{c'^2}\right| = \frac{2}{h^2} \ .$$

Mais,

$$DH_a = \frac{b'c'}{a} = \frac{6V}{aa'} \ , \ DH_b = \frac{6V}{bb'} \ , \ DH_c = \frac{6V}{cc'},$$

et l'égalité (2) donne

$$(aa')^2 + (bb')^2 + (cc')^2 = 8\left|S_a^2 + S_b^2 + S_c^2\right| = 8S_d^2. \qquad (3)$$

---

1) Ce théorème, sans doute connu, généralise celui que M. N. A Court a donné pour le tétraèdre *orthocentrique, (Mathesis,* 1928 p. 342).

3. L'expression du carré de la distance du centre de la sphère circonscrite au centre de gravité du tétraèdre découle de (2) :

$$\overline{OG}^2 = R^2 - \frac{1}{16}\Sigma a^2 = \frac{R^2}{4}\ , \text{ soit } OG = \frac{R}{2}\ .$$

Comme le diamètre DO de la sphère (O) perce la face ABC en son centre de gravité G_d [1]), le point G est le milieu du rayon DO, et *les points* A, G, G_d, O, *forment une division harmonique.*

Le centre G de gravité se projette orthogonalement, sur la face ABC, au milieu du segment rectiligne O_aH, (O_a) étant le cercle ABC, c'est-à-dire au centre du cercle des neuf points du triangle ABC. De plus, la perpendiculaire tracée de G sur le plan DAC, par exemple, est parallèle à la fois à l'arête DB et à la médiane OD_1 du triangle OAC ; elle passe donc au milieu de DD_1, c'est-à-dire au centre du cercle des neuf points du triangle DAC. Par analogie, les projections orthogonales de G sur les deux autres faces coïncident avec les centres des cercles des neuf points de ces faces.

Par suite, *dans un tétraèdre trirectangle, les projections orthogonales du centre de gravité sur les plans des faces coïncident avec les centres des cercles des neuf points de ces faces.*

Ajoutons que les médianes DD_1 , DD_2 , DD_3 , des triangles DAC, DCB, DBA, sont perpendiculaires aux droites OD_1, OD_2, OD_3, et *la première sphère des douze points, de centre* G, *du tétraèdre trirectangle* ABCD *passe par le centre* O *de la sphère circonscrite ; son rayon égaleet* ½ R *elle est tangente à la sphère* (O) *au sommet* D.

4. Le conjugué isogonal L du centre de gravité G, par rapport au tétraèdre [2]), a pour coordonnés barycentriques absolues

$$\frac{S_a^2}{S_a^2+S_b^2+S_c^2+S_d^2}, \ldots, \frac{S_d^2}{S_a^2+S_b^2+S_c^2+S_d^2},$$

1) V. Thébault, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1915—477.

2) Point du minimum de la somme des carrés des distances aux plans des faces du tétraèdre, (Voir Neuberg, *Mémoire sur le tétraèdre).*

et les distances du point L aux plans BCD, CDA, DAB, ABC, sont respectivement

$$(G)\quad x'_a = \frac{h^2}{2a'},\ x'_b = \frac{h^2}{2b'},\ x'_c = \frac{h^2}{2c'},\ x'_d = \frac{h}{2}\ .$$

Les points G, L, sont les foyers d'un ellipsoïde (E) de révolution inscrit au tétraèdre fondamental. Son petit axe 2β s'exprime, x_a, x_b, x_c, x_d, étant les distances de G aux plans des faces,

$$\beta^2 = x_a x'_a = x_b x'_b = x_c x'_c = x_d x'_d = \frac{1}{8}h^2,$$

d'où

$$2\beta = \tfrac{1}{2}h\sqrt{2}.$$

Si l'on observe que la distance du centre O un plan ABC égale $\frac{1}{2}h$ puis, que

$$R_a^2 = R^2 - \overline{OO}_a^2 = R^2 - \tfrac{1}{2}h^2\ .$$

R_a étant le rayon du cercle ABC, on a

$$\overline{OL}^2 = R^2 - \frac{5h^2}{4}\ ,\ \overline{LG}^2 = R^2 - \frac{h^2}{2}\ .$$

Le grand axe 2α de la quadrique (E) s'exprime alors

$$2\alpha = \tfrac{1}{2}R\ .$$

Nous avons montré que les droites AH', BH', CH', DH', qu unissent les sommets d'un tétraèdre *orthocentrique* ABCD à l'orthocentre du tétraèdre $G_a G_b G_c G_d$ des centres de gravité des faces, sont conjuguées isogonales des hauteurs AH, BH, CH, DH du tétraèdre [1]).

Dans le tétraèdre *trirectangle* en D, $H' \equiv G_d$, et la hauteur AH est conjuguée isogonale de la droite DG_d. Le point L est donc situé sur AH et, en vertu de (G), coïncide avec le milieu de cette hauteur AH.

---

1) *The Tohoku Matematical Journal*, 1921, p. 232.

La sphère principale de l'ellipsoide (E) est la sphère podaire des points G, L, par rapport au tétraèdre ABCD.

Les perpendiculaires tracées de L sur les plans DAB, DAC, DCB, sont parallèles aux arêtes DC, DB, DA; et percent le plan du triangle ABC aux milieu des hauteurs de ce triangle.

5. Les propriétés contenues dans les paragraphes **3** et **4** permettent donc de définir cette sphère, remarquable dans le tétraèdre *trirectangle:*

Soient un tétraèdre ABCD, *trirectangle en* D; AH_a, BH_b, CH_c, *les hauteurs du triangle* ABC.

L'orthocentre H *du triangle* ABC, *les projections orthogonales des milieux des hauteurs* AH_a, BH_b, CH_c, *sur les faces* DCB, DAC, DAB, *et les centres des cercles des neuf points des triangles des faces du tétraèdre, sont huit points d'une même sphère.*

V. THÉBAULT
Le Mans (France).

DOUĂ TEOREME DE GEOMETRIE

In cele ce urmează, voiu demonstra geometric două teoreme datorite D-lui N. BOTEA.

1°. Δ, M *şi* N *fiind respectiv o dreaptă şi două puncte din planul triunghiului* ABC, *se consideră o involuţie pe dreapta* Δ. A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2; *fiind punctele unde cevienele punctelor* M *şi* N *întâlnesc pe* Δ, *numim* A'_1, B'_1, C'_1 *şi* A'_2, B'_2, C'_2 *omoloagele acestor puncte în involuţia considerată. Dreptele* A'_1 N *şi* A'_2M *şi analoagele întâlnesc laturile* BC, CA, AB *în punctele* A', A", B', B", C', C" *care sunt pe o aceeaşi conică* Γ [1]).

Fie α, β, γ punctele unde Δ tae laturile triunghiului dat. După o cunoscută formă a teoremei lui CARNOT, pentru ca punctele considerate să fie pe o aceeaşi conică Γ, trebue să avem egalitatea:

$$\text{II. } (BCA'\alpha)\ (BCA''\alpha) = 1.$$

Din considerarea fascicolului (N. BCA'α) deducem:

$$(BCA'\alpha) = (B_2C_2A'_1\alpha) = \frac{B_2A'_1}{C_2A'_1} : \frac{B_2\alpha}{C_2\alpha}.$$

[1]) Proprietăţi ale triunghiului I, de N. BOTEA. G. M. XXXVIII, pag. 206.

Teorema lui DESARGUES aplicată patrulaterului N ABC tăiat de secanta Δ, ne spune că perechile de puncte: (α, A_2); (β, B_2); (γ, C_2) sunt în involuţie. Avem deci relaţiunea:

$$\Pi \frac{B_2\alpha}{C_2\alpha} = 1.$$

Putem scrie prin urmare:

$$\Pi\ (BCA'\alpha) = \Pi . \frac{B_2A'_2}{C_2A'_2}.$$

Analog găsim,

$$\Pi\ (BCA''\alpha) = \Pi . \frac{B_1A'_2}{C_1A'_2}.$$

Avem deci:

(1) $$\Pi\ (BCA'\alpha)\ (BCA''\alpha)$$

$$= \frac{B_2A'_1}{C_2A'_1} \cdot \frac{C_2B'_1}{A_2B'_1} \cdot \frac{A_2C'_1}{B_2C'_1} \cdot \frac{B_1A'_2}{C_1A'_2} \cdot \frac{C_1B'_2}{A_1B'_2} \cdot \frac{A_1C'_2}{B_1C'_2},$$

grupele de puncte (B_1, B'_1); (C_1, C'_1); (A_2, A'_2) fiind în involuţie, avem relaţiunea

$$\frac{B_1A'_2}{C_1A'_2} \cdot \frac{C_1B'_1}{A_2B'_1} \cdot \frac{A_2C'_1}{B_1C'_1} = 1$$

sau:

$$\frac{B_1A'_2}{C_1A'_2} \cdot \frac{A_2C'_1}{A_2B'_1} = \frac{B_1C'_1}{C_1B'_1}$$

şi relaţiile analoage:

$$\frac{C_1B'_2}{A_1B'_2} \cdot \frac{B_2A'_1}{B_2C'_1} = \frac{C_1A'_1}{A_1C'_1}$$

$$\frac{A_1C'_2}{B_1C'_2} \cdot \frac{C_1B'_1}{C_2A'_1} = \frac{A_1B'_1}{B_1A'_1}$$

Avem deci:

$$\Pi\ (BCA'\alpha)\ (BCA''\alpha)$$

$$= \frac{B_1C'_1}{C_1B'_1} \cdot \frac{C_1A'_1}{A_1C'_1} \cdot \frac{A_1B'_1}{B_1A'_1} = \frac{A'_1C_1}{A'_1B_1} \cdot \frac{B'_1A_1}{B'_1C_1} \cdot \frac{C'_1B_1}{C'_1A_1}.$$

Insă această ultimă expresie e evident egală cu 1, căci şi punctele (A_1, A'_1); (B_1, B'_1); (C_1, C'_1) sunt în involuţie. Deci relaţia lui CARNOT e satisfăcută şi punctele A', A'', B', B'', C', C'' sunt pe o aceeaşi conică Γ.

Q. E. D.

2°. *O dreaptră* Δ *întâlneşte cevienele unui punct* M *în triunghiul* ABC *în* A_1, B_1, C_1 *iar cevienele altui punct* N *în* A_2, B_2, C_2. *Dreptele* MA_2 *şi* NA_1 *întâlnesc latura* BC *respectiv în* M_a, N_a *şi analog obţinem punctele* M_b, N_b, M_c, N_c. *Punctele* M_a, N_a, M_b, N_b, M_c, N_c *sunt situate pe o conică* [1]).

Fie α, β, γ punctele unde Δ tae laturile BC, CA, AB. Pentru ca M_a, N_a şi analoagele să fie pe o conică, trebue să avem satisfăcută egalitatea, dedusă din teorema lui CARNOT:

$$\Pi.\ (BCM_a\alpha)\ (BCN_a\alpha) = 1.$$

Considerând fascicolul $(M.\ BCM_a\alpha)$ deducem:

$$(BCM_a\alpha) = (B_1C_1A_2\alpha).$$

Dar

$$(B_1C_1A_2\alpha) = \frac{B_1A_2}{C_1A_2} : \frac{B_1\alpha}{C_1\alpha}.$$

Punctele (α, A_1); (β, B_1); (γ, C_1) fiind în involuţie, din cauza teoremei lui DESARGUES aplicată patrulaterului MABC, avem relaţia:

$$\frac{B_1\alpha}{C_1\alpha} \cdot \frac{C_1\beta}{A_1\beta} \cdot \frac{A_1\gamma}{B_1\gamma} = 1$$

din care deducem:

$$\Pi\ (B_1C_1A_2\alpha) = \Pi \frac{B_1A}{C_1A_2}.$$

Analog găsim

$$\Pi\ (BCN_a\alpha) = \Pi\ (B_2C_2A_1\alpha).$$

Dar

$$\Pi\ (B_2C_2A_1\alpha) = \Pi \frac{B_2A_1}{C_2A_1}.$$

Insă:

$$\Pi.\frac{B_1A_2}{C_1A_2} \cdot \Pi \frac{B_2A_1}{C_2A_1} = \frac{B_1A_2}{C_1A_2} \cdot \frac{C_1B_2}{A_1B_2} \cdot \frac{A_1C_2}{B_1C_2} \cdot \frac{B_2A_1}{C_2A_1} \cdot \frac{C_2B_1}{A_2B_1} \cdot \frac{A_2C_1}{B_2C_1} = 1.$$

Deci relaţia lui CARNOT:

$$\Pi\ (BCM_a\alpha) \cdot (BCN_a\alpha) = 1$$

e satisfăcută şi punctele M_a, N_a, M_b, N_b, M_c, N_c sunt pe o aceeaşi conică Q. E. D.

MARIUS MARGULIUS.

---

[1]) Proprietăţi ale triunghiului II, de N. BOTEA, G. M. XXXVIII, pag. 243.

PREMIUL „VASILE CONTA“

In conformitate cu procedeiele Regulamentului fondului «VASILE CONTA», în numărul de față urma *să* se publice raportul Comisiunii asupra lucrărilor prezentate pentru premiere din venitul acestui fond.

Societatea neprimind nici o lucrare până la 1 Iulie 1933, potrivit dispoziţiunilor regulamentului fondului, se va aştepta până la 1 Iulie 1934 prezentarea unei asemenea lucrări, care se va premia cu totalitatea venitului fondului cumulat până la data acordării.

DELEGAŢIA SOCIETĂŢII.

NOTE MATEMATICE

9. *Curiosités arithmétiques.* **1.** Il n'existe pas de *cube* parfait de *six, neuf, douze,* chiffres, $N = a_1a_2 \ldots a_6$, $N = a_1a_2 \ldots a_9$, $N = a_1a_2 \ldots a_{12}$, tels que les nombres

$n_1 = a_1a_2a_3$ et $n_2 = a_4a_5a_6$, puis $n_1 = a_1a_2a_3$,

$n_2 = a_4a_5a_6$ et $n_3 = a_7a_8a_9$, et enfin $n_1 = a_1a_2a_3$,

$n_2 = a_4a_5a_6$, $n_3 = a_7a_8a_9$, et $n_4 = a_{10}a_{11}a_{12}$,

soient aussi des cubes, n_2, n_3, n_4, n'étant pas nuls.

Mais, dans l'écriture des cubes suivants :

$$1003^3 = 1\ 009\ 027\ 027$$
$$1009^3 = 1\ 027\ 243\ 729$$
$$3008^3 = 27\ 216\ 576\ 512$$
$$3009^3 = 27\ 243\ 729\ 729$$
$$9001^3 = 729\ 243\ 027\ 001$$
$$9003^3 = 729\ 729\ 243\ 027,$$

on rémarque trois entiers de trois chiffres cubes parfaits, 001, 027, 216, 512, 729.

Les cubes de 1003 et 3008 contiennent *trois cubes* et *un carré.*

2. L'écriture des nombres

$$|\ 1003^3 - 100^3\ |\ ,\ |\ 1009^3 + 10^5\ |\ ,\ |\ 9003^3 + 10^5\ |\ ,$$
$$|\ 3009^3 + 10^8\ |\ ,\ |\ 9001^3 + 10^8\ |\ ,$$

fait apparaître *quatre* cubes parfaits dans chacun d'eux.

V. THÉBAULT.

10. *Nomenclatura matematică.* Tendința de a se simplifica și clarifica expunerea unor elemente matematice trebue încurajată. Astfel prin cărți și reviste mai noi, și unele mai vechi, găsim pentru aritmetică următoarele cuvinte pe care le dau românizate:

Comultiplu, în loc de «multiplu comun».

Codivizor, în loc de «divizor comun».

Comultiplu minimum, în loc de «cel mai mic comun multiplu».

Codivizor maximum, în loc de «cel mai mare comun divizor».

Coprime, în loc de «prime între ele».

Primalitate pentru proprietatea de a fi număr prim.

In geometrie:

După exemplul cuvântului «*ortocentru*», care a pătruns, se zice azi:

Incentru, la «centrul cercului înscris».

Excentru, la «centrul cercurilor exînscrise».

Circumcentru, la «centrul cercului circumscris».

Centroid nume dat des centrului de greutate când nu intervine considerațiuni de ordin mecanic.

Revista «*Boletin Matematico*» a decis anul acesta să utilizeze exclusiv cuvintele incentru, excentru și circumcentru. Ar fi bine dacă asemenea ameliorări în nomenclatură ar pătrunde și la noi.

I. Ionescu.

11. *Caracterizarea proiectivă a podarei.*

Intr'un articol din Numărul 12, Anul XXXVIII al G. M. se pun în evidență caracterele proiective ale podarei unei conice, adică: ordinul, singularitățile și relația dintre aceste singularități și punctele absolute ale planului, elemente suficiente pentru a defini o curbă ca podara unei conice.

Această caracterizare proiectivă a podarei e cunoscută și presupun că figurează în mai toate culegerile de exerciții de Geometrie Analitică, mai desvoltate. In orice caz, câteva observații geometrice simple fac inutil calculul laborios din articolul menționat și permit enunțarea unui rezultat general.

Consider corespondența T dintre punctele (M) și dreptele (D) ale planului realizată de proiectarea ortogonală a unui punct fix O din plan în M pe dreapta D. Dacă introducem un cerc C de centru

O şi luăm polul N al lui D în raport cu C se ştie că N şi M sunt inverse faţă de cerc.

In baza acestei observaţii transformarea T apare cu produsul dintre polaritatea R şi inversiunea I faţă de cercul C:

1) $$T = RI.$$

Transformarea inversă a lui T este evident

2) $$T^{-1} = IR.$$

Ţinând seamă acum de proprietăţile fundamentale ale transformărilor prin polare reciproce şi prin inversiune, rezultă imediat că:

1) Podara unei conice generale este o cuartică bicirculară cu un punct dublu în O.

2) Reciproc, o cuartică raţională bicirculară poate totdeauna fi concepută ca podara unei conice în raport cu punctul dublu dela distanţă finită.

Dar în baza lui 1) şi 2) rezultă propoziţiile generale:

I) Podara în raport cu O a unei curbe algebrice de clasă m, tangentă de g ori dreptei dela infinit şi de f ori, fiecăreia din isotropele lui O, în parte, este o curbă de ordinul

$$n = 2m - 2f - g$$

ce trece de $m - f - g$ ori prin fiecare din punctele absolute şi de $m - 2f$ ori prin punctul O.

II) Reciproc, orice curbă algebrică de ordin n, de φ ori circulară şi care trece de x ori prin O, poate fi privită ca podara faţă de O a unei curbe de clasa

$$m = 2n - 2\varphi - x$$

tangentă de $n - 2\varphi$ ori dreptei dela infinit şi de $n - \varphi - x$ fiecăreia din isotropele lui O.

Extinderea acestor propoziţii la spaţiul cu trei dimensiuni nu prezintă nicio dificultate. Relaţiile 1) şi 2) subsistă şi în spaţiu.

D. B.

BIBLIOGRAFIE

Bulletin de la Section Scientifique de l'Académie Roumaine. XVI-ème Année No. 1—3. Sur une propriété des fonctions qui n'ont que les discontinuités de première espèce par W. SIERPINSKI. Bucarest 1933.

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. XXIX. No. 8. August 1933. New-York. Secuenţe infinite ce se ivesc în teoriile analizei armonice, în interpolaţiune şi în cuadraturile mecanice, de L. FEJÉR. Unele aspecte matematice ale mecanicei noi, de TULLIO-LEVI-CIVITA. Matrice cu un element în un inel principal ideal, de C. C. MACDUFFEE. Notă asupra teoremei lui DICKSON în ternarii universale, de A. A. ALBERT. O septimică selfduală posedând şapte singularităţi simple de fiecare fel, şi cu polară de şapte iperbole dreptunghiulare şi un cerc, de D. C. DUNCAN. Asupra sistemelor ireductibile de ecuaţii diferenţiale algebrice, de E. GOURIN. Axioma C a lui HAUSDORFF şi proprietatea lui BOREL-LEBESGUE, de S. ROBINSON. Definiţiuni axiomatice spaţiilor metrice perfect separabile, de G. BIRKHOFF. Numărul tangentelor staţionare S_{t-1} la V_k^n în un S_{tk+k-1}, de B. C. WONG. Clasa număr în o algebră linear asociativă, de G. SHOVER. Privitor la continuu compact în un anume spaţiu al lui R. L. MOORE, de J. H. ROBERTS. Analoage suprafeţelor lui STEINER şi curbele lor duble, de A. R. WILLIAMS. Funcţiuni integrale obţinute compunând polinomiale, de J. F. RITT.

Mathesis. Tome XLVII. No. 8. Octomvrie 1933. Gembloux. Problemă asupra patratelor, de V. THÉBAULT. Metamorfoza unei soluţii vechi a problemei din Delos, de GINO LORIA. Asupra suprafeţei cubice având două puncte duble conice, de O. GUILLAUME. Exerciţii de geometrie vectorială: Triunghiu mărginit de patrate, de AD. M. *Papus de Alexandria,* de J. PELSENEER. Asupra dreptelor unei suprafeţe cubice, de L. GODEAUX.

The Mathematical Gazette. Vol. XVII. No. 225. Octomvrie 1933. Londra. *Edward Mann Langley* de J. P. KIRKMAN şi E. T. BELL. Tratarea geometriei elementare prin calculul grupurilor, de G. THOMSEN. Condiţiunea pentru egalitatea bisectoarelor a două unghiuri ale unui triunghiu, de W. J. DOBBS. Echivalentul grafic al principiului momentelor, de T. W. HALL & A. C. WILLIAMS. Transformarea $y = f'(x)$ de R. GARVER. Problema coeficienţilor constanţi ai operatorilor diferenţiali lineari, de D. K. PICKEN. Produsul vectorilor, de D. K. PICKEN. Iuţeala relativă, de H. E. PIGGOT & C. O. TUCKEY

Boletin Matematico. Anul VI. No. 4. Iunie 1933. Buenos Aires. Teoria matematică a gamei muzicale, de A. E. SAGASTUME BERRA. Elemente de teratologie geometrică, de B. I. BAIDAFF.

Journal de Mathématiques Élémentaires. Publié par H. VUIBERT. Anul 58. No. 1. Octomvrie 1933. Paris.

Idem. Anul 58. No. 2. Octomvrie 1933. Paris.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XIII. No. 8. Octomvrie 1933. Sur un théorème de SCHRÖTER, par V. THÉBAULT. Asupra unor triunghiuri podare şi antipodare, de C. IONESCU-BUJOR.

R. ESTEVE & H. MITAULT. *Cours d'algèbre.* Paris 1933.

Tome I. *Le calcul algébrique.* Acest volum de 120 pagini coprinde capitolele următoare: I. Numere algebrice şi operaţiuni asupra lor. Cap. II. Expresiuni algebrice şi operaţiuni asupra lor. Cap. III. Ecuaţii numerice cu una şi cu două necunoscute. Volumul se termină cu 185 exerciţii şi probleme referitoare la materiile tratate.

Tome II. *Le premier degré.* Aci sunt capitolele următoare: Cap. I. Aplicaţiunile numerelor algebrice. Cap. II. Generalităţi asupra ecuaţiilor, ecuaţii de gradul I cu o necunoscută sau reductibile la asemenea ecuaţii. Cap. III. Generalităţi asupra inecuaţiilor. Inegalităţi de primul grad cu o necunoscută sau reductibilă la asemenea inecuaţii. Cap. IV. Sisteme de ecuaţii. Cap. V. Probleme de primul grad. Cap. VI. Generalităţi asupra variaţiunii funcţiunilor, studiul funcţiunii lineare. Volumul se termină cu o colecţiune de 260 exerciţii şi probleme şi conţine 152 de pagini.

Tome III. *Le second degré.* Acest volum are 172 pagini şi conţine capitolele următoare: Cap. I. Ecuaţii şi trinoame de gradul II. Cap. II. Probleme de gradul II. Cap. III. Variaţiunea trinomilui de gradul II. Cap. IV. Variaţiunea funcţiunii homografice. Cap. V. Progresiuni. Cap. VI. Logaritmi vulgari sau zecimali. Cap. VII. Dobânda compusă. Urmează apoi 254 probleme şi exerciţii şi la fine o notă asupra unui mod de introducere a logaritmilor cu ajutorul iperbolei echilatere.

Complements d'Algebre. Acest volum are 76 pagini şi tratează capitolele următoare: Cap. I. Derivate. Cap. II. Aplicaţiile derivatelor la studiul variaţiunii funcţiunilor. Cap. III. Funcţiuni primitive şi utilizarea lor pentru calculul unor arii. Volumul se termină cu o colecţiune de 100 exerciţii şi probleme.

Aceste patru volume constituesc un curs complet de algebră elementară tratată în vederea studiilor viitoare matematice. In ele găsim noţiuni de algebră vectorială, de reprezentări grafice pentru studiul variaţiunilor de funcţiuni lineare şi de gradul II, etc. Volumele pot fi consultate cu folos de cei însărcinaţi cu învăţământul algebrei în licee sau şcolile speciale.

I. IONESCU.

ALEX. VERONNET. *Cours d'algèbre de mathématiques spéciales et de mathématiques générales.* Paris 1933.

E o carte relativă la algebra şi analiza vectorială, pe care în 1914 o tradusese P. APPELL pentru a răspândi în Franţa metoda vectorială. In Prefaţa scrisă de D-l H. VILLAT, membru al Institutului din Paris, D-sa spune că autorul a avut ideia fericită de a suprima aproape orice notaţie nouă pentru operaţiuni vectoriale şi de a se folosi numai de notaţia algebrică şi analitică actuală, atât de simplă şi de atât de clară. Operaţiunile de gradient, divergenţă, rotaţional numai sunt decât operaţiuni de derivare cu notaţiuni ce le pricepe

oricine. Introducerea vectorilor în diferitele ramuri ale matematicilor se face în mod natural. Calculul este extins la axe oblice şi la mai multe dimensiuni. Nu există nici un semn nou de notaţie. Cu notaţiile algebrei şi analizei se merge chiar la calculul tensorial. Aceste simplificări permit introducerea uşoară a calculului vectorial în cursurile de matematici elementare şi speciale şi din acest punct de vedere atragem atenţiunea corespondenţilor noştri asupra acestei cărţi.

Cartea conţine o introducere şi două părţi. Prima parte are capitolele următoare: I. Algebra vectorială, înmulţirea vectorilor. II. Numere, numere incomensurabile, numere vectoriale. III. Extinderea produsului vectorial la numere vectoriale, determinanţi. IV. Ecuaţii lineare. V. Vector şi număr vectorial de al doilea ordin, transformări, forme lineare. VI. Forme cuadratice. VII. Polinoame algebrice. VIII. Imaginare şi variabile complexe, numere vectoriale complexe. In partea a doua sunt capitolele: IX. Derivate şi diferenţiale, variaţiunea unei funcţiuni. X. Desvoltarea unei funcţiuni, serii. XI. Derivate şi diferenţiale ale unei funcţiuni de mai multe variabile. XII. Analiză vectorială, derivarea vectorilor, gradient, divergentă şi rotaţional. XIII. Integrale curbilinii, integrale de suprafeţe, integrale de vectori. XIV. Calculul vectorial în cazul cordonatelor oblice şi cu n dimensiuni. XV. Extinderea calculului vectorial la calculul tensorial, analisele lui Riemann şi Cartan.

I. I.

Cl. Servais. *Sur la géométrie du tétraèdre.* (Supliment la *Mathesis*). Bruxelles 1933.

V. Thébault. *Geométrie et mécanique. Triangle bordé de carrés. Sur les points de* Feuerbach. Bruxelles 1933. (Supliment la *Mathesis*).

Caïus Jacob. *Sur un problème mixte dans l'anneau circulaire.* (Extras din *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* de Paris). Paris 1933.

Caïus Jacob. *Sur quelques problèmes mixtes dans une couronne circulaire.* (Extras din *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* de Paris). Paris 1933.

Caïus Jacob. *Sur quelques problèmes concernant l'écoulement des fluides parfaits compressibles.* (Extras din *Comptes rendus des séances de l'Academie des Sciences* de Paris). Paris 1933.

Prescripţiunile Comisiunii germane petru beton armat 1932. In româneşte de Inginer M. D. Hangan. Bucureşti 1933.

Asociaţiunea Inginerilor Diplomaţi ai Şcoalei Politecnice din Bucureşti. Primul Congres al Asociaţiei. 29—30 Noemvrie 1931. Dare de seamă. Bucureşti 1933.

N. Donici. *Al patrulea Congres al Uniunii Astronomice Internaţionale* ţinut la Cambridge (Massachusetts). Extras din *Memoriile Secţiunii Ştiinţifice ale Academiei Române*, Bucureşti 1933.

Paul Montel. *Leçons sur les fonctions univalentes ou multivalentes.* Paris, Gauthier-Villares, 1933. Preţul 40 fr.

Volumul face parte din colecţiunea de monografii despre teoria funcţiunilor a D-lui Borel şi e scris cu claritatea caracteristică tuturor scrierilor D-lui Montel.

Se zice că o funcţiune analitică este univalentă într'un domeniu închis D, în care funcţiunea e olomorfă sau meromorfă, dacă egalizarea $f(z_1) = f(z_2)$ cere ca $z_1 = z_2$. Se înţelege aproape dela sine ce însemnează o funcţiune multivalentă de ordinul p. In jurul acestor două noţiuni s'au făcut în timpul din urmă numeroase cercetări, multe din ele chiar de D-l Montel, altele sub conducerea D-sale.

Precum era şi natural, o idee care revine în diferitele capitole ale volumului este aceea de familie de funcţiuni univalente supuse la diferite condiţii.

Mi-ar fi foarte greu să dau pe scurt o idee de bogăţia de rezultate şi de perspectivele admirabile pe care le cuprinde fiecare capitol. Deaceea recomand, mai ales tinerilor care se ocupă de teoria funcţiunilor, citirea acestui volum, foarte potrivit pentru iniţiere, îndemn şi sugestii la lucrări originale.

Ţin să adaug că volumul se încheie cu o notă a tânărului analist H. Cartan, despre posibilitatea de a estinde la funcţiunile de mai multe variabile complexe teoria funcţiunilor univalente.

G. Ţ.

CERERI

Răspuns la cererea 226. Ferdela (mierţa) este o măsură de capacitate pentru obiecte uscate, mărunte, ca: cereale, cartofi, poame, etc. folosită în trecut în regiunile de sud ale Ardealului, mai ales în părţile unde Românii trăesc împreună cu Saşii. In relaţiunile lor particulare, ţăranii din aceste regiuni o folosesc adeseori şi astăzi.

Este o măsură de aproape un sfert de hl., de formă cilindrică, din lemn, cu două mânere („urechi"). Conţine 16 cupe (cofe) sau un sfert de găleată, (chivilă). Confr. A. Crişan. O carte de aritmetică din 1822. Natura No. 2—1933 pag. 16.

Legal, o ferdelă este echivalentă cu 0,2264 hl. (Confr. I. Popescu. Computul în Şcól'a poporală. Manual pt. invetietori. Sibiiu. 1864. pag. 208).

Numirea vine din săsescul *fyrdel* (=germ. Viertel, o pătrime) Confr. Acad. Rom. Dicţionarul limbii române Tom. II Fasc. II. pag. 98.

A. C.

229. Cine îmi poate procura „*Buletinul Asociaţiunii de Matematici pure şi aplicate*" anul 1919—1920.

M. Botez
Piatra-Neamţ.

DIVERSE

Societatea română de ştiinţe, Secţiunea Matematică a reînceput seria şedinţelor sale în seara zilei de 23 Octomvrie în Palatul Universităţii din Bucureşti. In acea seară a făcut un referat asupra unor ecuaţiuni diofantine D-l G. SUDAN, a vorbit despre solide sprijinite pe suprafeţe D-l V. VÂLCOVICI şi despre ecuaţii cu diferenţe finite D-l M GHERMĂNESCU. Cu această ocaziune ţinem a spune că Secţiunea Matematică a obţinut în Localul Facultăţii de ştiinţe o sală în care să-şi instaleze arhiva, Biblioteca şi Secretariatul şi care e imediat după intrarea profesorilor prin Bulevard.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2117. *Se dă un triunghiu* ABC *înscris în cercul* O. *Înălţimea şi mediana din* A *întâlnesc latura* BC *în* A_1 *şi* S *iar* AS *taie cercul în* P. T *fiind polul simedianei în raport cu cercul* O *iar* α *punctul de intersecţie al cercului* O *cu cercul descris pe* AT *ca diametru, să se arate că punctele* S, P, α *şi* A_1 *sunt conciclice.*

E. MIRCEA.

Se ştie că simediana AS trece prin polul laturei BC faţă de O, deci polul T al lui AS faţă de O se află pe BC. Cercul de diametru AT trece prin A_1 aşa că patrulaterul $AA_1\alpha T$ este inscriptibil şi deci

$$\sphericalangle \alpha A_1 T = \sphericalangle \alpha AT.$$

Dar

$$\sphericalangle \alpha AT = \sphericalangle \alpha PA$$

ca având aceiaşi măsură în cercul O, prin urmare

$$\sphericalangle \alpha PA = \sphericalangle \alpha A_1 T$$

ceeace arată că patrulaterul $\alpha A_1 SP$ este inscriptibil.

Observaţiuni. 1°. Se vede din demonstraţia dată că după ce am găsit că T este pe BC nu m'am mai servit de ipoteza că AS este simediană. Singura condiţie este ca AT să fie tangentă la O, ceeace echivalează cu aceia că cercul O' de diametru AT este ortogonal cercului O.

2°. Problema a fost rezolvată de D-l N. N. MIHĂILEANU (student, Bucureşti) care a dat o soluţie prin inversiune. Luând A ca pol cercul O şi O' se transformă în două drepte perpendiculare care se taie în α_1, inversul lui α

iar BC în un cerc de diametru Aa_1 unde a_1 este inversul lui A. Inversul lui S se află în s pe acest cerc iar al lui P în p pe una din cele 2 drepte perpendiculare trecând prin α_1. Patrulaterul $a_1\alpha_1ps$ având unghiurile α_1 şi s drepte este inscriptibil, deci şi inversul său $A_1\alpha PS$ va fi inscriptibil.

Soluţia aceasta este însă prea complicată faţă de simplicitatea problemei 2117.

Gh. B.

PROBLEMA 3270. *Fie* A_1, B_1, C_1 *punctele unde transversalele unghiulare* AP, BP, CP *taie laturile opuse* BC, CA, AB *ale triunghiului* ABC. *Fie apoi* A_2, A_3 *proecţiile lui* A_1, *făcute sub un acelaş unghiu* α *şi în acelaş sens, pe laturile* AB, AC; B_2, B_3 *proecţiile punctului* B_1, *făcute în acelaş sens ca mai sus şi sub acelaş unghiu* α *pe laturile* BC, BA ; C_2, C_3 *puncte analoage, obţinute cu ajutorul lui* C_1.

Să se demonstreze că dreptele A_2A_3, B_2B_3, C_2C_3 *determină un triunghiu* A'B'C' *isologic cu triunghiul* ABC.

Mihail I. Focşeneanu.

Triunghiul A'B'C' este omotetic cu triunghiul copidar al lui P de unghiu α. Însă acest triunghiu este isologic de unghiu α, cu triunghiul de referinţă prin chiar definiţia lui. Deci triunghiurile ABC, A'B'C' sunt isologice de acelaş unghiu α.

N. N. Mihăileanu
Student, Bucureşti.

PROBLEMA 3875. *Fie* I *punctul de întâlnire al bisectoarelor triunghiului* ABC *şi fie* A', B', C' *picioarele medianelor aceluiaş triunghiu* ABC. *Se consideră intersecţiunile* D_1, D'_1; D_2, D'_2; D_3, D'_3 *respectiv ale perechilor de drepte:* (AI, B'A'), (AI, C'A'); (BI, C'B'), (BI, A'B'); (CI, A'C'), (CI, B'C'). *Grupele de drepte* (CD_1, AD_2, BD_3) *şi* (BD'_1, CD'_2, AD'_3) *formează triunghiurilor* MNP *şi* QRS *sunt asemenea.*

Th. Gh. Cocea.

I. *Soluţiune* dată de Domnii: N. N. Aldea, N. N. Mihăileanu, N. Antonescu, Al. P. Halperin, Gh. Oprescu, C. Gh. Lupescu, Ioan Bulancea.

Să considerăm de exemplu dreptele AD_2 şi CD'_2 corespunză-

toare bisectoarei BI. *Triunghiul* $BC'D_2$ *este isoscel,* adică $\overline{D_2C'} = \overline{C'B}$; dar $\overline{C'B} = \overline{C'A}$, deci *triunghiul* AD_2B *este dreptunghic* în D'_2.

Asemenea triunghiul BD'_2C este dreptunghic în D'_3. Dreptele AD_2 şi CD'_2 sunt paralele, deci NS || SQ. In acelaş fel rezultă că: MP || RS ; MN || QR. Aşa dar, *cele două triunghiuri* MNP *şi* QRS *sunt asemenea (omotetice).*

II. *Soluţiune şi generalizare.* Dacă în enunţul problemei înlocuim cele trei bisectoare AI, BI, CI prin trei drepte oarecare $A\Delta_1$, $B\Delta_2$, $C\Delta_3$, triunghiurile MNP şi QRS formate de *grupele de drepte* (CD_1, AD_2, BD_3 şi (BD'_1. CD'_2, AD'_3), *sunt asemenea* (omotetice).

Această proprietate este o consecinţă imediată a următoarei proprietăţi interesante: *Dacă prin vârful* B *(de exemplu) al unui triunghiu* ABC, *ducem o dreaptă oarecare* Δ, *care taie laturile* B'C' *şi* B'A' *ale triunghiului său complementar (format* de picioarele medianelor) *respectiv în punctele* D *şi* D', *dreptele* AD *şi* CD' *sunt paralele.* Ea este un caz particular al proprietăţii: *Dacă prin vârful* B *al unui triunghiu* ABC *ducem o dreaptă oarecare* Δ, *iar printr'un punct* B' *al laturei opuse ducem paralele cu celelalte două* BC *şi* BA *respectiv* B'C' *şi* B'A' *obţinem pe dreapta* Δ *două puncte:*

D_a (B'C', Δ) *şi* D_c (A'B', Δ). *Dreptele* AD_a *şi* CD_c *sunt paralele.* (Vezi «Revista Matematică», Timişoara).

Observare. I. Au dat alte soluţii problemei propuse Domnii: S.-LT. I. GH. ZAMFIRESCU, PETRE I. GHIŞOIU, AUREL EM. BĂDESCU, MIRCEA I. GROSSU, MARIUS MARGULIUS.

II. D-l S.-LT. I. GH. ZAMFIRESCU a observat că bisectoarele pot fi înlocuite prin *trei ceviene;* iar D-l M. MARGULIUS a observat că în demonstraţie n'a făcut uz de proprietatea că I este centrul cercului înscris şi bisectoarele ceviene.

O. N. Ţ.

PROBLEMA 3898. *Să se arate prin ajutorul unei interpretări geometrice că între unghiurile unui triunghiu există inegalitatea:*

$$\cos^2(B-C) + \cos^2(C-A) + \cos^2(A-B) \geqslant 24 \cos A \cos B \cos C.$$

C. COŞNIŢĂ.

Soluţie dată de D-l N. N. MIHĂILEANU (Constanţa).

Vom scrie că dreapta lui EULER este mai mare sau cel puţin egală cu distanţa dintre mijlocul unei laturi şi piciorul înălţimii pe aceiaşi latură, sau ţinând seamă de expresia trigonometrică a acestor lungimi, avem:

$$R \sin (B - C) \leqslant R\sqrt{1 - 8 \cos A \cos B \cos C}.$$

Ridicând la patrat şi grupând convenabil termenii obţinem:

$$\cos^2 (B - C) \geqslant 8 \cos A \cos B \cos C.$$

Scriind acum şi analoagele şi însumând dăm tocmai peste inegalitatea propusă.

Observare. Soluţiunile demonstrând inegalitatea direct trigonometric nu s'au luat în considerare.

CPT. GH. N.

PROBLEMA 3936. *Dacă* M *şi* N *sunt două puncte fixe de pe cercul* O, *să se arate că unghiul format de dreptele lui* SIMSON, *ale acestor puncte în raport cu oricare din triunghiurile înscrise în cercul* O, *este constant.*

TH. GH. COCEA.

Se cunoaşte următoarea proprietate: «Dreptele lui SIMSON a «două puncte de pe cercul ABC fac între ele un unghiu ascuţit «egal cu unghiul înscris în segmentul de cerc determinat de coarda «$\overline{MN}$ în cercul ABC». [Vezi TR. LALESCU „Rev. Mat. Timişoara", An. II, pag. 147, MARIN ŞTEFAN «G. M.», Vol. XXX, pag. 174, etc.], din care urmează imediat, observând că punctele M şi N sunt fixe pe cercul ABC, proprietatea enunţată. Dacă M şi N sunt diametral opuse în cercul ABC, unghiul dreptelor lui SIMSON respective, este unghiul drept.

Au rezolvat problema: D-na ŞTEFANIA CĂP. TRUŢESCU, S.-LT. EUGENIU BURLACU, N. N. ALDEA, GH. ST. ROŞCA, S.-LT. TH. N. PANAITE, CEZAR COŞNIŢĂ, S.-LT. I. GH. ZAMFIRESCU, S.-LT. AURELIAN I. STAN (Cluj), HARALAMB P. IONESCU-BISS, NICOLAE N. VELICESCU, NICOLAE N. MIHĂILEANU, VASILE VASU, TRAIAN PUTA, N. ANTONESCU, N. PATRAULEA, R. PATRAULEA, I. A. EPURAN, C. ŞERBU, T. GOSPODIN, IOAN ZARDA, M. MARGULIUS, I. D. CÂRSTOIU, D. I. PATRAULEA.

O. N. Ţ.

PROBLEMA 3974. *Să însemnăm în triunghiul* ABC *cu* A_h, B_h, C_h *picioarele înălțimilor, cu* A_m, B_m, C_m *mijloacele laturilor* BC, CA, AB *și cu* O *centrul cercului circumscris* ABC.

Perechile de drepte ($B_h A_m$, $B_h A_h$) *și* ($C_h A_h$, $C_h A_m$) *determină pe înălțimile* CC_h *și* BB_h respectiv segmentele $\overline{M_c N_c}$ și $\overline{M_b N_b}$.

Să se demonstreze relațiunea

$$(R)\quad \frac{\overline{M_b N_b}}{\overline{OB_m}} = \frac{\overline{M_c N_c}}{\overline{OC_m}}.$$

O. N. ȚINO.

Soluțiune dată de Domnii: S.-LT. I. GH. ZAMFIRESCU (Reg. 6 Art. Pitești), GEORGE ȘT. ROȘCA, C. I. NAFORNIȚĂ, IOAN A. EPURAN (Lic. mil. Tg.-Mureș), NICOLAE PATRAULEA (Lic. mil. Mănăst. Dealu), IOAN ZARDA (Cluj), COSTIN N. TRUFINESCU (Bălți).

H_a, H_b, H_c fiind punctele unde cercul lui EULER taie înălțimile AH, BH, CH în triunghiul ABC, avem relațiunile:

$$\overline{AH_a} = \overline{H_aH} = \overline{OA_m};\ \overline{BH_b} = \overline{H_bH} = \overline{OB_m};\ \overline{CH_c} = \overline{H_cH} = \overline{OC_m}. \quad (1)$$

Dreapta $\overline{H_bH_c}$ este paralelă cu BC, deci arcele $\overset{\frown}{H_bA_h}$ și $\overset{\frown}{A_mH_c}$ ale cercului ω (al lui EULER) sunt egale. Ținând seamă de măsura unghiurilor în cercul ω avem egalitățile:

$$\sphericalangle BB_hA_h = \sphericalangle CC_hA_m;\ \sphericalangle BB_hA_m = \sphericalangle CC_hA_h;\ \sphericalangle B_hM_cC_h = \sphericalangle B_hM_bC_h;$$
$$\sphericalangle B_hN_cC_h = \sphericalangle B_hN_bC_h,$$

deci perechile de triunghiuri:

$$(B_h M_c H \text{ și } C_h M_b H);\ (B_h N_c H \text{ și } C_h N_b H)$$

sunt respectiv asemenea și ca urmare avem:

$$\frac{\overline{HC_h}}{\overline{HB_h}} = \frac{\overline{HM_b}}{\overline{HM_c}} = \frac{\overline{HN_b}}{\overline{HN_c}}. \quad (2)$$

Observând că în cercul BC_hB_hC avem:

$$\overline{HC_h} \cdot \overline{HC} = \overline{HB_h} \cdot \overline{HB}$$

sau

$$\frac{\overline{HC_h}}{\overline{HB_h}} = \frac{\overline{HB}}{\overline{HC}} \quad (3)$$

deducem din (2), aplicând proprietăţile rapoartelor egale relaţiunile:

$$\frac{\overline{HB}}{\overline{HC}} = \frac{\overline{HM_b}}{\overline{HM_c}} = \frac{\overline{HN_b}}{\overline{HN_c}} = \frac{\overline{HM_b} - \overline{HN_b}}{\overline{HM_c} - \overline{HN_c}} = \frac{\overline{M_bN_b}}{\overline{M_cN_c}} . \qquad (4)$$

Dar

$$\overline{HB} = 2\overline{OB_m} \text{ şi } \overline{HC} = 2\overline{OC_m} ,$$

deci

$$\frac{\overline{M_bN_b}}{\overline{M_cN_c}} = \frac{\overline{OB_m}}{\overline{OC_m}} . \qquad \text{C. C. T. D.}$$

Soluţiune dată de D-nii: VASILE VASU, N. N. MIHĂILEANU, TRAIAN PUTA.

Folosind cercul lui EULER şi relaţiunile trigonometrice dintr'un triunghiu găsim:

$$\overline{M_bN_b} = |\overline{BN_b} - \overline{BM_b}| = \overline{OB_m} \left| \frac{\sin 2A \sin (B - C)}{\cos (A - B) \cos (A - C)} \right| . \qquad (6)$$

Asemenea

$$\overline{N_cM_c} = |\overline{HM_c} - \overline{HN_c}| = \overline{OC_m} \left| \frac{\sin 2A \sin (B - C)}{\cos (A - B) \cos (A - C)} \right| , \qquad (14)$$

din care se deduce prin comparare relaţiunea geometrică cerută.

O. N. Ţ.

PROBLEMA 3984. *Se consideră tetraedrul* SABC *în care facem o secţiune oarecare* DEF *(punctele* D, E, F *aflându-se respectiv pe* SA, SB, SC). *Dedesubtul acestei secţiuni şi paralel cu baza* ABC *facem o a doua secţiune* D'E'F' *punctele* D', E', F' *corespund punctelor* D, E, F).

Fie G, H, K *intersecţiunile diagonalelor patrulaterelor* DD'E'E, EE'F'F, FF'D'D, *iar* M, N, P *punctele unde dreptele* SG, SH, SK *întâlnesc pe* AB, BC, CA.

Să se arate că dreptele AN, BP, CM *sunt concurente.*

CEZAR COŞNIŢĂ

Soluţie dată de Domnii: HARALAMB P. IONESCU-BISS, GEORGE ŞT. ROŞCA, S.-LT. C. D. IONESCU-ŢIU.

Fie M', N', P' punctele care corespund punctelor M, N, P pe laturile triunghiului D'E'F'. Din problema 2773 (rezolvată în «G. M».

An. XXXVI, pag. 262) este cunoscut că dreptele D'N', E'P', F'M' sunt concurente în acelaş punct O. Urmează imediat că planele SD'N', SE'P' SF'M' au o dreaptă comună SO, *deci oricare ar fi poziţiunea planului* ABC *faţă cu* D'E'F' dreptele AN, BP, CM trec toate prin punctul în care SO înţeapă planul ABC.

Au rezolvat problema fără a arăta că enunţul este supraabundent Domnii: P. I. Ghişoiu, S.-lt. Aurelian Stan, Nicolae D. Zane, N. N. Aldea, N. N. Mihăileanu, C. I. Naforniţă, N. Patraulea, M. Popescu-Stăneşti, N. Gluşco, I. Macoschi, Vasile Vasu, A. M. Butan, I. D. Cârstoiu, I. Parapeanu, Mircea D. Motoc, Ioan Zarda, Vladimir Bortnovsky, Ion I. Petrescu, M. Margulius.

O. N. Ţ.

PROBLEMA 4009. *Fie* ABC *un triunghiu cu vârfurile* A *şi* B *fixe, iar* C *variabil în plan.*

Să se arate că dacă ortocentrul triunghiului descrie cisoida, care are ca punct dublu pe A, *iar ca asimptotă perpendiculara în* B *pe* AB, *atunci* C *descrie tot o cisoidă.*

Gh. Th. Gheorghiu.

Soluţiune dată de D-nii: Ad. C. Gheorghiu, S.-lt. Aurelian I. Stan, (Cluj), S.-lt I. Gh. Zamfirescu, Vasile Vasu, N. N. Mihăileanu, Cezar Coşniţă (stud. Bucureşti), M. Margulius.

Fie H ortocentrul triunghiului ABC. Să precizăm condiţiunile: triunghiul ABC păstrându-şi baza fixă, ca mărime şi poziţiune, variază astfel că *ortocentrul* H *descrie cisoida definită de o parte de cercul director* O, *de diametru* AB, *şi dreapta directoare* BΔ *perpendiculară pe* AB; *de alta de polul* A. Fie M şi N intersecţiunile înălţimii AH cu cercul O şi dreapta BΔ, respectiv. Avem prin ipoteză:

$$\overline{AH} = \overline{MN}. \qquad (1)$$

Vârful C, pentru această poziţiune a ortocentrului H, este determinat de dreapta BM $\left(\text{căci } \sphericalangle AMB = \frac{\pi}{2}\right)$ şi dreapta HC perpendiculară pe AB. Fie P, punctul unde dreapta BM taie tangenta în A la cercul O. Dreptele paralele AP, HC, BN taie, pe dreptele AN şi BP, segmente respectiv proporţionale:

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{NM}} = \frac{\overline{MC}}{\overline{MH}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{HA}}, \qquad (2)$$

din care, în virtutea egalității (1) rezultă :

$$\overline{BM} = \overline{CP},$$

deci

$$\overline{BM} + \overline{MC} = \overline{MC} + \overline{CP} \text{ , sau } \overline{BC} = \overline{MP}. \qquad (3)$$

Din (3) rezultă *că locul lui* C *este cisoida dreaptă definită de cercul* O, *dreapta* AP *şi polul* B.

Observare. Cele două cisoide drepte descrise de punctele C şi H sunt simetric aşezate față de perpendiculara OS pe AB.

II. Domnii Cezar Coşniță (Student Buc.), N. N. Mihăileanu, M. Margulius, P. I. Ghişoiu (Şc. Pol. Bucureşti), Vasile Vassu (Student Cluj), au dat şi o soluțiune cu ajutorul geometriei analitice pe care din lipsă de spațiu n'o dăm aci.

O. N. Ţ.

PROBLEMA 4025. *Se dă patratul* ABCD *cu centrul în* O *şi cu latura egală cu* a. *Se notează cu* 1, 2, 3, 4 *mijloacele laturilor* AB, BC, CD, DA. *Pe* AB *se ia punctul* A_1 *de la* A *spre* B *şi punctul* B_1 *de la* B *spre* A *aşa în cât:*

$$AA_1 = BB_1 = x < a.$$

Se construesc la fel, pentru aceiaşi valoare x, *punctele* B_2, C_2, C_3, D_3, D_4, A_4 *pe celelalte laturi. Fie* O_b, O_2 *intersecția dreptei* CB_1 *respectiv cu dreptele* OB *şi 42. La fel se obțin punctele* O_c, O_3, O_d, O_4, O_1. *Se cere.*

1°. *Să se demonstreze că există o valoare a lui* x, *şi să se găsească acea valoare, pentru care octogonul* $O_1O_bO_2O_cO_3O_dO_4O_a$ *este regulat.*

2°. *Să se calculeze suprafața acestui octogon şi să i se găsească valoarea numerică cu aproximație de 1|100 pentru* a *egal cu unitatea.*

3°. *Aceleaşi chestiuni pentru* $x > a$.

4°. *Când* x *se ia ca la* 1° *însă în sens contrar, se obține o stea cu 8 vârfuri. Să se calculeze* x *aşa în cât unind vârfurile ieşinde şi vârfurile intrânde ale stelei să se obțină 2 patrate.*

5°. *Să se calculeze suprafața stelei în condițiunile dela* 2°.

Col. Gh. Buicliu.

1°. Pentru claritatea figurei iau $x < \frac{a}{2}$, ceeace nu schimbă nimic din demonstrație.

Deoarece unghiurile O_1OO_b, O_bOO_2, O_2OO_c, ... sunt toate egale între ele și egale cu 45°, figura $O_1O_bO_2O_cO_3O_dO_4O_a$ va fi octogon regulat când OO_1, OO_b, OO_2, ... vor fi egale între ele. Se vede pe figură că

$$O_2 2 = O_4 4 = \frac{x}{2}$$

deci rezultă că OO_1 și OO_4 sunt egale între ele și urmează că sunt egale și cu OO_2, OO_3.

Simetria figurei arată că OO_a, OO_b, OO_c, OO_d, sunt de asemeni egale, ceia ce se poate demonstra și prin considerațiuni triunghiurilor egale OCO_b, ODO_a, ...

Pentru ca OO_2 și OO_b să fie egale este necesar și suficient ca CO_b să fie perpendiculară pe bisectoara unghiului O_bOO_2. Fie M punctul unde această bisectoară întâlnește pe BC. Avem evident

$$\sphericalangle MOC = 45^0 + \frac{45^0}{2}$$

iar din triunghiul OMC

$$\sphericalangle OMC = \pi - \left(45^0 + \frac{45^0}{2} + 45^0\right) = 45^0 + \frac{45^0}{2}$$

deci OCM este isoscel și bisectoara lui OCM este perpendiculară pe OM. — Conform observației de mai sus octogonul va fi deci regulat când $CO_2O_bB_1$ va fi bisectoarea unghiului ACB. — Dar în acest caz avem

$$\frac{BB_1}{AB_1} = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \quad \frac{x}{a-x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \quad x = \frac{a}{\sqrt{2}+1} = a(\sqrt{2}-1) \cdot \qquad (1)$$

2°. Suprafața unui octogon regulat înscris în cercul de rază R este $2R^2\sqrt{2}$. — Raza cercului circumscris octogonului din figură este

$$OO_2 = \frac{a-x}{2}$$

în care x este dat de (1). Deci suprafața cerută este

$$S = 2\left(\frac{a-x}{2}\right)^2\sqrt{2} = \frac{a^2(2-\sqrt{2})^2\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \quad S = a^2(3-2\sqrt{2})\sqrt{2} = (3\sqrt{2}-4)a^2$$

care pentru $a = 1$ devine

$$S = 3\sqrt{2} - 4 = 0{,}23\ldots$$

3°. Condiția ca octogonul să fie regulat rămâne aceiași, adică CB_1 să fie perpendiculară pe bisectoarea unghiului BO2. Pentru aceasta s'a văzut însă la 1° că

$$x = a(\sqrt{2}-1) < a\,.$$

Deci pentru $x > a$ octogonul nu poate fi regulat. De altfel se poate observa pe o figură că în acest caz conturul considerat are forma unei stele.

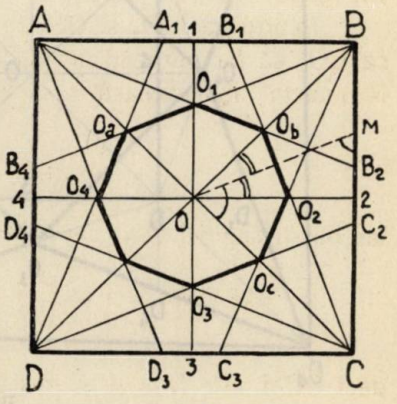


Fig. 1.

4°. Cazul 4° trebue examinat pe 2 figuri după cum $x \lessgtr a$.

Fie N și P intersecția lui AB și 42 cu o paralelă dusă din C la DB.

Consider $x < a$. Dacă B_1 se mișcă dela B la N, O_b se mișcă pe DB dela B la $+\infty$, O_2 se mișcă dela 2 la P, O_c se mișcă dela C la $-\infty$ pe AC. Și fiindcă

$$2O_2 < \frac{BB_1}{2}$$

conturul $O_1O_bO_2O_cO_3O_dO_4O_a$ va avea forma unei stele cu vârfurile intrânde în O_1, O_2, O_3, O_4 ca în fig. 2.

Figura $O_1O_2O_3O_4$ este un patrat ori care ar fi x. In adevăr deoarece

$$20_2 = 10_1 = \frac{x}{2}$$

diagonalele O_1O_3, O_2O_4 sunt egale între ele şi cum sunt şi perpendiculare figura e un patrat.

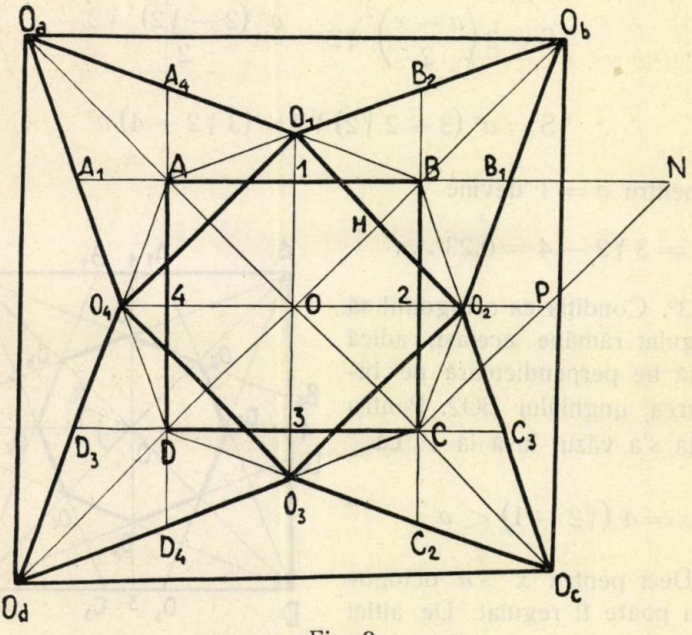


Fig. 2.

La fel se arată că $O_aO_bO_cO_d$ este patrat ori care ar fi x.

Este destul a observa că triunghiurile CBO_a, BCO_c, sunt egale de unde se deduce egalitatea lungimilor OO_b, OO_c.

Consider $x > a$. In acest caz figura numai este o stea, ci un octogon. Vârful O_b se mişcă pe prelungirea lui BD dela D la $-\infty$ iar O_2 pe prelungirea lui O2 dela 2 la $+\infty$.

Pentru ca octogonul să fie regulat trebue ca

$$OO_2 = OO_b$$

căci se arată ca la 1^0 că

$$OO_1 = OO_2 = OO_3 = OO_4$$

şi

$$OO_a = OO_b = OO_c = OO_d.$$

Pentru ca OO_2, OO_b să fie egale, se vede pe fig. 3 că e destul ca $O_2\,O_b$ să fie perpendiculară pe bisectoarea unghiului $O_b\,OO_2$ sau paralelă cu bisectoarea unghiului BOO_2; dar în acest caz CB_1, este bisectoarea exterioară a unghiului BCO_a din triunghiul ACB, ceeace se poate arăta ca la 1^0.

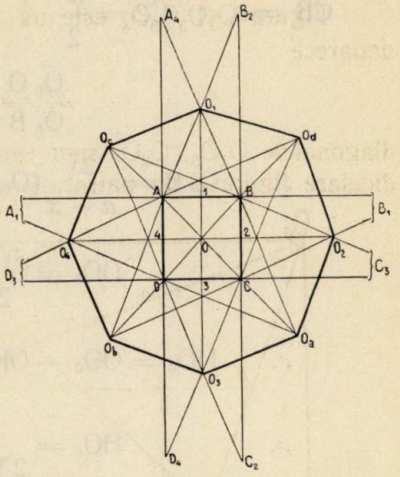


Fig. 3.

Intru acest caz vom avea:

$$\frac{B_1\,B}{B_1\,A} = \frac{CB}{CA}$$

$$\therefore \quad \frac{x}{x+a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore\ x = \frac{a}{\sqrt{2}-1} = a\,(\sqrt{2}+1). \quad (2)$$

5^0. Pentru calculul S a suprafeței stelei din fig. 2 observ că dacă S_1 este suprafața patratului $O_1O_2O_3O_4$ și S_2 este suprafața triunghiului $O_1O_bO_2$, atunci

$$S = S_1 + 4S_2. \quad (3)$$

Din triunghiul dreptunghic isoscel O_1OO_2 se scoate

$$\overline{O_1O_2}^2 = 2\,\overline{OO_1}^2 = 2\left(\frac{(a+x)}{2}\right)^2 = \frac{(a+x)^2}{2} \quad (4)$$

$$\therefore \quad S_1 = \frac{(a+x)^2}{2}.$$

Dacă H este intersecția lui OO_b cu O_1O_2 avem

$$S_2 = \frac{1}{2}\,O_1O_2 \,.\, HO_b\,.$$

Triunghiul O2B tăiat de transversala CO_2O_b dă

$$\frac{O_b\,O}{O_b\,B} \cdot \frac{CB}{C2} \cdot \frac{O_2 2}{O_2 O} \,.\, = 1$$

de unde observând că

$$CB = a \;\; ; \;\; C2 = \frac{a}{2} \;\; ; \;\; O_2 2 = \frac{x}{2} \;\; ; \;\; O_2 O = \frac{a+x}{2}$$

$$\frac{O_b O}{O_b B} = \frac{a+x}{2x}$$

$$\therefore \quad O_b B = \frac{2x}{a-x}(O_b O - O_b B) = \frac{a\sqrt{2}x}{a-x}$$

$$\therefore \quad OO_b = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a+x}{a-x}$$

$$\therefore \quad HO_b = OO_b - OH = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a+x}{a-x} - \frac{a+x}{2\sqrt{2}}$$

$$\therefore \quad HO_b = \frac{(a+x)^2}{2\sqrt{2}\,(a-x)}$$

și atunci

$$S_2 = \frac{(a+x)^3}{8(a-x)} .$$

Ducând în (3) valorile lui S_1 și S_2 se găsește

$$S = \frac{(a+x)^2}{2} + \frac{(a+x)^3}{2(a-x)} = \frac{a(x+x)^2}{a-x} .$$

Pentru calculul suprafeței S' a octogonului din fig. 3 avem

$$S' = 2 \cdot \overline{OO_2}^2 \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \cdot \left(\frac{a+x}{2}\right)^2$$

sau înlocuind pe x prin valoarea dată de (2):

$$S' = \frac{\sqrt{2}}{2}(2+\sqrt{2})^2 a^2 = (3\sqrt{2}+4)a^2$$

care pentru $a = 1$ devine

$$S' = 8{,}23\ldots$$

Dela punctele 1° și 4° se vede că patratul se bucură de următoarea proprietate:

Dacă se iau dela A *spre* B *și dela* B *spre* A *lungimile*

$$AA_1 = BB_1 = AC - AB$$

sau dacă se iau dela B spre $+\infty$ şi dela A *spre* $-\infty$ *lungimile* BB_1 şi AA_1 aşa că

$$AA_1 = BB_1 = AC + AB$$

atunci octogoanele, obţinute prin construcţiile indicate în enunţul problemei 4025, sunt regulate. Suprafeţele lor, în funcţie de latura patratului, sunt respective:

$$S = (3\sqrt{2} - 4)\,a^2 \quad ; \quad S^1 = (3\sqrt{2} + 4)\,a^2.$$

COL. GH. BUICLIU.

Notă. 1°. D-l N. N. MIHĂILEANU a rezolvat bine primele 4° puncte ale problemei, fără a considera la punctul 4° cazul $x > a$. Soluţia d-sale este analitică.

2. D-l S.-LT. I. GH. ZAMFIRESCU a dat soluţia geometrică exactă la primele 3° puncte.

3°. Am compus această problemă cu ocazia redijărei pe care am dat-o problemei 843 rezolvată la pag. 19, Vol. X, *Revista Matematică din Timişoara*. In acea problemă A_1, B_1, ... se confundau cu mijloacele laturilor patratului.

4°. Din valorile lui S şi S' se deduce relaţia simplă

$$S' - S = 8a^2.$$

GH. B.

PROBLEMA 4207. *Să se dovedească inegalitatea*

$$(m - n + 1)^n > m\,(m - n)^{n-1}$$

ştiind că avem

$$m > n > 1.$$

TH. ANGHELUŢĂ.

Corespondenţii noştri au rezolvat problema într'un caz particular, considerând pe n întreg. In felul acesta au dat soluţii bune D-şoarele: DORINA FABIUS; MARGARETA LÉBER şi D-nii: N. N. ALDEA; SUB.-LT. CONST. AVRAM; VASILE CEAUŞESCU; CONST. CHIRIAC; I. CURCHI; CEZAR IVĂNESCU; MARIUS MARGULIUS; D. MAVRODIN; I. PETRESCU; NIC. VELICESCU; MARTIN ZIFF.

Vom stabili inegalitatea propusă în condiţiile cerute, adică vom presupune că m şi n sunt numere oarecare, satisfăcând inegalităţile

(1) $$m > n > 1.$$

Pentru aceasta observăm că inegalitatea propusă se poate pune sub forma echivalentă

$$\frac{(m-n+1)^n}{m\,(m-n)^{n-1}} > 1.$$

Aplicând logaritmii, revine să dovedim inegalitatea

$$\mathrm{L}\frac{(m-n+1)^n}{m\,(m-n)^{n-1}} > 0.$$

Logaritmii sunt consideraţi în baza e.

Pentru stabilirea acestei din urmă inegalităţi, vom studia variaţia funcţiunii

$$f(m) = \mathrm{L}\frac{(m-n+1)^n}{m\,(m-n)^{n-1}},$$

presupunând n constant iar m variabilă independentă în intervalul $(n, +\infty)$.

Calculând derivata $f'(m)$ a funcţiunii $f(m)$ găsim

$$f'(m) = \frac{n}{m-n+1} - \frac{1}{m} - \frac{n-1}{m-n}$$

sau făcând reducerile

$$f'(m) = \frac{n(1-n)}{m\,(m-n)\,(m-n+1)}.$$

Din inegalităţile (1) rezultă că $f'(m)$ este negativ când m variază în intervalul $(n, +\infty)$. Deci $f(m)$ este descrescător în acest interval. Pe de altă parte se vede uşor că avem

$$f(n) = +\infty \quad , \quad f(+\infty) = 0.$$

Prin urmare avem satisfăcută inegalitatea:

$$f(m > 0$$

în condiţiunile (1). Inegalitatea propusă este deci stabilită.

In cazul particular când n este întreg şi pozitiv inegalitatea propusă se stabileşte lesne. Iată cum au procedat corespondenţii noştri. Punând

$$m - n = a,$$

inegalitatea dată se scrie

$$(a+1)^n > (a+n)\,a^{n-1}.$$

Această inegalitate se verifică imediat n fiind întreg şi pozitiv, desvoltând după formula binomului.

*PROBLEMA 4265. *Fie* ABC *un triunghiu oarecare şi* AD, AE *două ceviene izogonale. Se proiectează vârful* B *al triunghiului pe una din izogonale, pe* AD *spre ex., în* B_1; *fie apoi* A_1 *proiecţia lui* A *pe* BC, *iar* E_1 *proiecţia lui* E *pe* AC. *Punctele* A_1, B_1, E_1 *sunt colineare.*

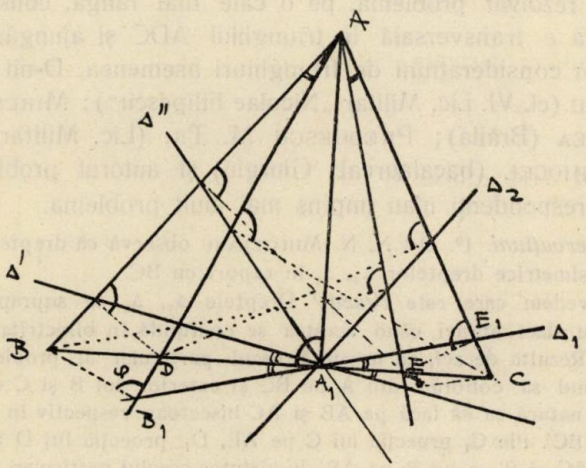
CEZAR IVĂNESCU.

Soluţie şi observări făcute de D-l N. N. MIHĂILEANU (student Bucureşti).

Patrulaterele ABB_1A_1 şi AA_1EE_1 fiind înscriptibile avem:

$$\sphericalangle BA_1B_1 = \sphericalangle BAB_1 = \sphericalangle CAE = \sphericalangle E_1A_1C$$

din cari egalităţi rezultă că: B_1, A_1, E_1 sunt colineare.



Observări. 1°. Proecţiile pot fi făcute sub acelaş unghiu arbitrar şi proprietatea, odată cu soluţia nu suferă nici-o modificare.

2°. Problema este rezolvată de autorul ei în „Revista Matematică" din Timişoara [XIII, 32], ca generalizare a problemei 1018 „R. M." T sau 4196 „G-M". Soluţia dată acolo e însă prea lungă. Teorema transversalelor se aplică cu succes numai când punctele sunt obţinute ca intersecţii de drepte. Când sunt definite prin proecţii e de preferit o soluţie unghiulară.

3°. Fie Δ_1 dreapta $B_1A_1E_1$; când se proectează B pe AE şi D pe AC se obţine dreapta Δ_2. Unghiul dreptelor Δ_1, Δ_2 este unghiul isogonalelor AD, AE căci

$$\sphericalangle (\Delta_1, BC) = \sphericalangle EAC \text{ şi } \sphericalangle (\Delta_2, BC) = \sphericalangle DAC.$$

Proectând C pe AE şi D pe AB obţinem dreapta Δ'.

Proectând C pe AD şi E pe AB obţinem dreapta Δ''.

Dreptele Δ', Δ'' sunt simetrice dreptelor Δ_1, Δ_2 în raport cu BC.

In adevăr $\sphericalangle (\Delta', BC) = \sphericalangle BAD$, etc.

4°. Când variază unghiul de proecţie $\varphi = \sphericalangle BB_1A = \sphericalangle BA_1A = \sphericalangle EE_1A$, etc., fascicolul Δ_1, Δ_2, Δ', Δ'' lunecă pe BC, păstrând paralelismul razelor. Când φ rămâne constant şi variază unghiul izogonalelor, razele Δ_1, Δ_2, Δ', Δ'' se rotesc în jurul vârfului A_1, păstrând unghiurile.

Au rezolvat problema ca mai sus — fără a face vre-o observaţie Domnişoarele: Dorina Fabius şi Margareta Lébec (Cluj) apoi D-nii: Marius Margulius (Buc.); I. C. Parepeanu (Slt. geniu); I. I. Petrescu; I. N. Sager; Al. D. Stoica (Lic. „Marele Voevod Mihai", Buc.); George Sîlaş (st. Cluj); Martin S. Ziff (elev Şc. Potitechnică) şi autorul problemei.

Au rezolvat problema, pe o cale mai lungă, considerând pe $B_1A_1E_1$ ca o transversală în triunghiul ADC şi ajungând la acest lucru prin consideraţiuni de triunghiuri asemenea, D-nii: Paul D. Dobrescu (cl. VI. Lic. Militar „Nicolae Filipescu"); Mircea-Leonte A. Negrea (Brăila); Predoescu M. Tr. (Lic. Militar Craiova); V. V. Ghiocel (bacalaureat, Giurgiu) şi autorul problemei. Nici aceşti corespondenţi n'au împins mai mult problema.

Observaţiuni. 1°. D-l N. N. Mihăileanu observă că dreptele Δ', Δ'' sunt respectiv simetrice dreptelor Δ_1, Δ_2 în raport cu BC.

Să vedem care este *cauza?* Dreptele Δ_1, Δ_2 se suprapun odată cu izogonalele deci atunci când acestea se confundă în bisectriţa triunghiului dat ABC. Rezultă de aci, cu uşurinţă, cazul particular al problemei de faţă. Acestea fiind să coborâm din A pe BC şi exterior lui B şi C dreptele AB' şi AC' de natură ca să facă pe AB şi AC bisectoare respectiv în triunghiurile ADB' şi AEC'. Fie C_1 proecţia lui C pe AE, D_1 proecţia lui D pe AB, C'_1 a lui C' pe AC şi B'_1 a lui B pe AB'. In virtutea cazului particular, în triunghiul AEC' punctele A_1, C_1, C'_1 sunt colineare şi tot aşa şi punctele $A_1D_1B'_1$ în triunghiul ADB'. Dar dreapta Δ' este formată din punctele $C_1A_1D_1$ şi cum putem privi acum pe AB' şi AC' ca izogonale duse exterior laturilor AB şi AC, aplicând enunţul problemei 4265 rezultă că punctele $C'_1A_1B'_1$ sunt colineare. Avem deci cinci punte: $C'_1C_1A_1D_1B'_1$ situate pe aceeaşi dreaptă Δ' care în realitate nu este alta decât dreapta Δ_1 corespunzătoare construcţiei izogonalelor duse exterior laturilor. *O simetrie aduce deci pe alta!*

Acelaşi lucru şi pentru dreapta Δ''.

2°. Avem:

$$\sphericalangle (\Delta', \Delta'') = \sphericalangle (\Delta_1, \Delta_2) \; ; \; \sphericalangle (\Delta_1, \Delta') = \sphericalangle EAC + \sphericalangle DAB$$

adică cu valoarea unghiului A micşorată cu unghiul izogonal;

$$\sphericalangle (\Delta_2, \Delta') = \sphericalangle (\Delta_1, \Delta'') = \hat{A} \; ; \; \sphericalangle (\Delta_2, \Delta'') = \hat{B} + \hat{C} - \hat{I},$$

însemnând cu I unghiul izogonalelor.

3°. Când şi I şi φ variază în acelaş timp, se pot pune probleme frumoase de loc geometric.

4°. In altă ordine de idei, un corespondent distrat a semnat pe autorul problemei: CEZAR PETRESCU! Atenţiune! Ce procese pot surveni!

5°. Problema a mai fost rezolvată şi de D-nii: Subloc. A. EM. BĂDESCU (Reg. 2 Art. Grea); V. CEAUŞESCU (Cl. VI, lic. Militar Iaşi); G. C. MAZILU (bacalaureat, Lic. Internat, Iaşi) şi Subloc. TH. PANAITE (Şc. Apl. Art. Timişoara).

CPT. GH. N.

PROBLEMA 4292. *Un număr de trei cifre se divide cu 11. Dacă permutăm între ele, fie primele două cifre, fie ultimele două dăm peste numere prime. Să se găsească acel număr.*

I. IONESCU.

Soluţie dată de D-nii: G. SILAŞ (Student, Cluj); P. DOBRESCU şi V. A. GRIGORESCU (Liceul militar, Mânăstirea Dealului); P. C. MAZILU (Bacalaureat, Iaşi), S. H. HORNSTEIN (Liceul M. Eminescu, Bucureşti, cl. VI), GH. CARDARA, O. D. KLINGER, M. MARGULIUS, D. D. MAVRODIN, D-RA M. E. MOSTECHY, I. M. PREDOIANU, TR. M. PREDOIANU şi CSEKE WILHELM.

Fie $szu = \overline{szu}11$ numărul căutat şi *zsu*, *suz* numerele prime deduse din primul. Ultimele numere fiind prime u şi z nu pot fi decât 1, 3, 7, 9. Divizibilitatea cu 11 cere $u+s-z=0$ sau 11. Să examinăm fiecare caz în parte:

1. Dacă $z=s+u$, cum s e cel puţin 1 ca şi u, reese că $z>2$. Nu putem lua $z=3$ sau $z=9$ căci atunci $u+z+s=2z$ este $\overline{szu}3$ şi *zsu* nu mai e număr prim. Rămâne numai a lua $z=7$. Numărul căutat ar putea fi 671 sau 473. Primul dă numerele prime 761 şi 617 şi e deci o soluţie a problemei. Al doilea dă $437=19\times23$ şi nu convine.

2. Dacă $s+u=z+11$, cum s şi u sunt cel mult 9, z va fi cel mult 7. Apoi s e cel puţin 1 căci numărul cerut are trei cifre. Pentru $z=7n$ nu putem lua de cât $s=u=9$, deci numărul 879. Dar $799=17\times47$ şi deci nu convine.

Pentru $z=3$ putem avea numerele 737 şi 539. Dar $377=13\times29$ şi deci nu convine, pe când 359 şi 953 sunt numere prime. Deci 539 este o soluţie a problemei.

Pentru $z=1$ putem avea numerele 913, 517, 319. Insă $931=7^2\times19$ şi $391=17\times23$, pe când 157 şi 571 sunt numere prime. Numărul 517 este dar o soluţiune a problemei.

Problema admite dar trei soluțiuni: *517, 539, 671.*
D-l Gh. Cardara (Cl. VI Lc. Corabia) a dat soluția 539.
D-l G. I. Spiru (Lc. Militar, Iași), a dat soluțiile 517, 671.
Unii corespondenți au dat și soluția formală 011.

*EXERCIȚII

8. Să se arate că numerele prime ale lui Gauss:

$$N = 2^{2^n} + 1 \qquad (n \text{ întreg și pozitiv})$$

se termină toate cu cifra 7 dacă $n \geqslant 2$ și că toate aceste numere sunt de forma $3k + 2$.

Nic. N. Velicescu.

R. Pentru $n \geqslant 2$ și întreg 2^n este de forma $4m$, deci:

$$N = 2^{4m} + 1 = 16^m + 1$$

ori se știe că un număr terminat cu 6 ridicat la orice putere se termină tot cu 6, deci numerele prime ale lui Gauss se termină cu cifra 7. Pentru $n \geqslant 1$ și întreg 2^n este de forma $2p$, deci

$$N = 2^{2p} + 1 = (3 - 1)^{2p} + 1 = 3k + 2.$$

PROBLEME PROPUSE

4237 [1]). Știind că numărul $2^{504}+1$ este divizibil prin $p=37.2^{16}+1$, să se arate că numerile

$$2^{504-16n} + (-37)^n \qquad n = 1, 2, \ldots 31$$

sunt divizibile prin p.

M. G.

4279 [2]). Să se calculeze sumele:

$$\sum_{k=1}^{n} \sec[\alpha+(k-1)h]\sec[\alpha+kh] \text{ și } \sum_{k=1}^{n} \operatorname{cosec}[\alpha+(k-1)h]\operatorname{cosec}[\alpha+kh].$$

Gh. Vasiliu.

1) Problema propusă sub acest număr la pag. 319/XXXVIII, fiind identică cu problema Nr. 4277 se anulează și se înlocuește cu prezenta.

2) Problema Nr. 4279, fiind cunoscută din „G. M.", Vol. XVIII, pag. 447—448 și din „Trigonométrie par F. G. M." se anulează și se înlocuește cu prezenta.

*4311. Trei lucrători se angajează să sape un şanţ pentru care li se dă 7560 lei. Ei se învoiesc să lucreze în condiţiuni egale şi să-şi împartă egal suma ce vor lua. La urmă se iau la ceartă, unul zicând că a lucrat mai mult timp, altul că a lucrat mai repede şi altul că a lucrat mai greu săpând partea dela fundul şanţului care erea mai tare şi la care pământul era aruncat mai sus. Ei se duc la un inginer care constată că lucrătorii A, B, C au lucrat un număr de ore ca 9 : 10 : 11; îi pune de sapă în condiţiuni egale de teren şi se stabileşte că în timpul cât A a săpat $7m^3$, B a săpat $6m^3$ şi C numai $5m^3$. Făcându-se o experienţă cu săparea în partea de sus şi cea de jos a şanţului inginerul stabileşte că munca depusă de C care a săpat partea de jos a şanţului, este cu $20^0/_0$ mai multă ca a celorlalţi care au săpat în comun partea de sus. In aceste condiţiuni să se împarţă suma de 7560 şi să se arate cine şi cât a luat mai mult sau mai puţin de cât se învoiseră la început.

I. Ionescu.

4312. Să se demonstreze că numerele întregi

$$2^n + 2\cos\frac{(n-2)\pi}{3}$$

$$2^n - 2\cos\frac{(n-1)\pi}{3}$$

$$2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}$$

se divid prin 3, oricare ar fi n.

Col. Gh. Buicliu.

4313. Să se găsească patratele de şase cifre formate prin sudarea (alipirea) a două patrate de câte trei cifre.

V. Thébault.

4314. Prin centrul radical R a trei cercuri C_1, C_2, C_3 se duc două drepte D_1 şi D_2. Dreapta D_1 întâlneşte cercurile în punctele A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, A_{31}, A_{32}, iar dreapta D_2 întâlneşte cercurile în punctele B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22}, B_{31}, B_{32}. Paralelele duse prin A_{12}, A_{22}, A_{32} la D_2 întâlnesc respectiv paralelele duse prin punctele B_{12}, B_{22}, B_{32} la dreapta D_1 în punctele M, N, P.

Să se arate că triunghiul format de dreptele $A_{11}B_{11}$, $A_{21}B_{21}$, $A_{31}B_{31}$ este omologic cu triunghiul MNP.

N. Botea.

*4315. Există triunghiuri având laturile și înălțimile sau bisectriţele interioare exprimate în numere întregi ?

MAIOR I. LINTEŞ.

*4316. Să se demonstreze că între elementele unui triunghiu avem relația :

$$\left(\frac{p-a}{p+a}\right)^2+\left(\frac{p-b}{p+b}\right)^2+\left(\frac{p-c}{p+c}\right)^2=1+2r\frac{24R-r}{4p^2+r^2}+4r^2\left(\frac{4R-r}{4p^2+r^2}\right)^2$$

GH. TH. GHEORGHIU.

*4317. Porţiunile din înălțimi cuprinse între ortocentru și laturile triunghiului ABC fiind h'_a, h'_b, h'_c, celelalte notațiuni fiind cele obicinuite, să se demonstreze relațiunea :

$$\frac{a^2-b^2}{c\,(h_c+h'_c)}+\frac{b^2-c^2}{a(h_a+h'_a)}+\frac{c^2-a^2}{b(h_b+h'_b)}=\operatorname{tg}(A-B)+\operatorname{tg}(B-C)+\operatorname{tg}(C-A).$$

NICOLAE DONCIU.

4318. Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} x^3-y^3=x^2+xy+y^2 \\ x^5-y^5=211. \end{cases}$$

CONST. A. CRISTOPOL.

4319. Să se arate că rădăcinile ecuației

$$x^n-x^{n-1}-x^{n-2}-\ldots-x-1=0,$$

exceptând rădăcina positivă, au modulul cuprins între $\frac{1}{3}$ și 1.

Să se arate că această ecuație are cel mult două rădăcini reale.

TH. ANGHELUȚĂ.

4320. Se dau fixe în plan punctele O, O' și conicele (F), (G). O dreaptă Δ' dusă prin O' și conjugată față de (F) altei drepte Δ dusă prin O, taie conica (G) în punctele m și n.

Când Δ se mișcă în jurul lui O, se cere locul geometric al punctelor M și N de intersecție ale dreptei Δ' cu tangentele în m și n la conica (G).

ADR. C. GHEORGHIU.

Articolele, notele şi problemele însemnate cu * se referă la matematicile elementare (cursul de liceu).

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Alexiu I. (1364); *Anastasescu I. Mihai* (4268, 93); *Anonim* (4299); *Bădescu Em. A. Subloc.* (4265, 68, 72); *Bungeţeanu D. Preduţa* (4173, 74, 75, 79, 83, 96); *Cardara Gh.* (4295); *Ceauşescu Vasile* (4173, 87, 223, 51, 53, 54, 64, 65, 67, 93, 95); *Cocea G. Th.* (4293, N); *Cseke V.* (4293, 95); *Dobrescu P.* (4251, 61, 95); *Elefterescu M.* (4295); *Ghiocel V. V.* (4267, 68, 72); *Goormaghtigh R.* (A); *Grigorescu A. Vintilă* (4294); *Hornstein H. S.* (4278, 94, 95, 97); *Ivănescu C.* (4253); *Klinger D. O.* (4294, 95); *Mănescu M.* (3908, 4261, 94, 95, 302); *Margulius M.* (3985, 88, 4135, 215, 82, 84, 85, 94, 95, 305); *Marin-Gall-Tica Subloc.* (4179); *Mavrodin D. D.* (4097, 247, 95, 302); *Mazilu C. P.* (4242, 53, 65, 72, 95, 309, N); *Mereuţă E.* (P); *Mostechy E. Maria* (4294, 95); *Negrea-Leonte M.* (4295); *Panaite N. Th. Subloc.* (3824, 39, 977, 4140, 265, C, P); *Parepeanu C. I.* (4215, 95); *Popescu M. I.* (4295); *Predoescu I. Marin* (4242, 51, 53, 95, 308); *Predoescu M. Traian* (4242, 93, 95, 99, P); *Savin C. I.* (N); *Silaş G.* (4264, 78, 85, 95); *Simionescu D. G.* (N); *Spiru I. Gh.* (4295); *Stoica D. A.* (4244, 93, 94); *Tica-Gall P. M. Subloc.* (4179, 295); *Trică P. M. G. Subloc.* (4268); *Zamfirescu Gh. I. Subloc.* (N); *Ziff S. M.* (4179).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie **pe o singură parte a foii şi nu se vor tratà mai multe chestiuni diferite pe aceiaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipì sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecțiunea „GAZETEI MATEMATICE“

«Gazeta Matematică» vinde ani complețî broșați cu prețul de 400 lei volumul, afară de volumele: X, XVII, XVIII, XIX, XX și XXI care se vând cu prețul de 500 lei volumul.

Volumele: I, XV și XXV sunt epuizate.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu și V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **N. Abramescu,** *Lecțiunile de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediția IV revăzută și adăogită,* 1924 (Epuizată).

3. **A. G. Ioachimescu și G. Țițeica,** *Culegere de probleme de mecanică și geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme și o planșă) (Epuizată).

4. **Tr. Lalescu și Șt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografie* (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu,** *Tratat de geometrie analitică,* Fascicola I *Ediția II revăzută și adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—
Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).
Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).
Idem, Fascicola IV Aplicațiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150,—

6. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10,—

7. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediția III-a revăzută și îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. Lei 180,—

8. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu și G. Țițeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

9. **G. Țițeica,** *Culegere de probleme de geometrie* Lei 150,—

La aceste prețuri se vor adăogà taxele poștale pentru expediție.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul.* (Ediția II) Lei 150,—

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plătește înainte și începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamațiunile și cererile pentru cărți din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete numai D-lui: Inginer **Al. D. Bunescu,** Directorul General al Monitorului Oficial și Imprimeriilor Statului, B-dul Elisabeta 29, București I.

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii și orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie și expediție, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Călușei 23, București 4.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXXIX

NUMĂRUL 4. — DECEMVRIE 1933

BIBLIOTECA CENTRALĂ ASTRONOMIE SIBIU

SUMARUL

1. Sur une transformation géométrique . . *R. Goormaghtigh.*
2. Relaţii trigonometrice într'un triunghiu în legătură cu punctele lui Feuerbach . *N. N. Mihăileanu.*
3. Premiul „Inginer Al. Roşu".
4. Note matematice: 12 — 19.
5. Chestiuni de examen.
6. Bibliografie.
7. Cereri: 230 — 232.
8. Diverse.
9. Probleme rezolvate: 2081, 2386, 4033, 4259, 4268, 4295.
10. Exerciţii: 9 — 13.
11. Probleme propuse: 4321 — 4330.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1933

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: Colonel **Gh. Buicliu** din Ministerul Apărării Naţionale; **C. D. Orăşanu**, Inginer, Licenţiat în Matematici, Conferenţiar la Şcoala Politechnică «Regele Carol II» din Bucureşti, Profesor la Şcoalele Aeronautice; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice" se vor trimite D-lui Inginer-Şef GH. ILIESCU, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret, Bucureşti 6.

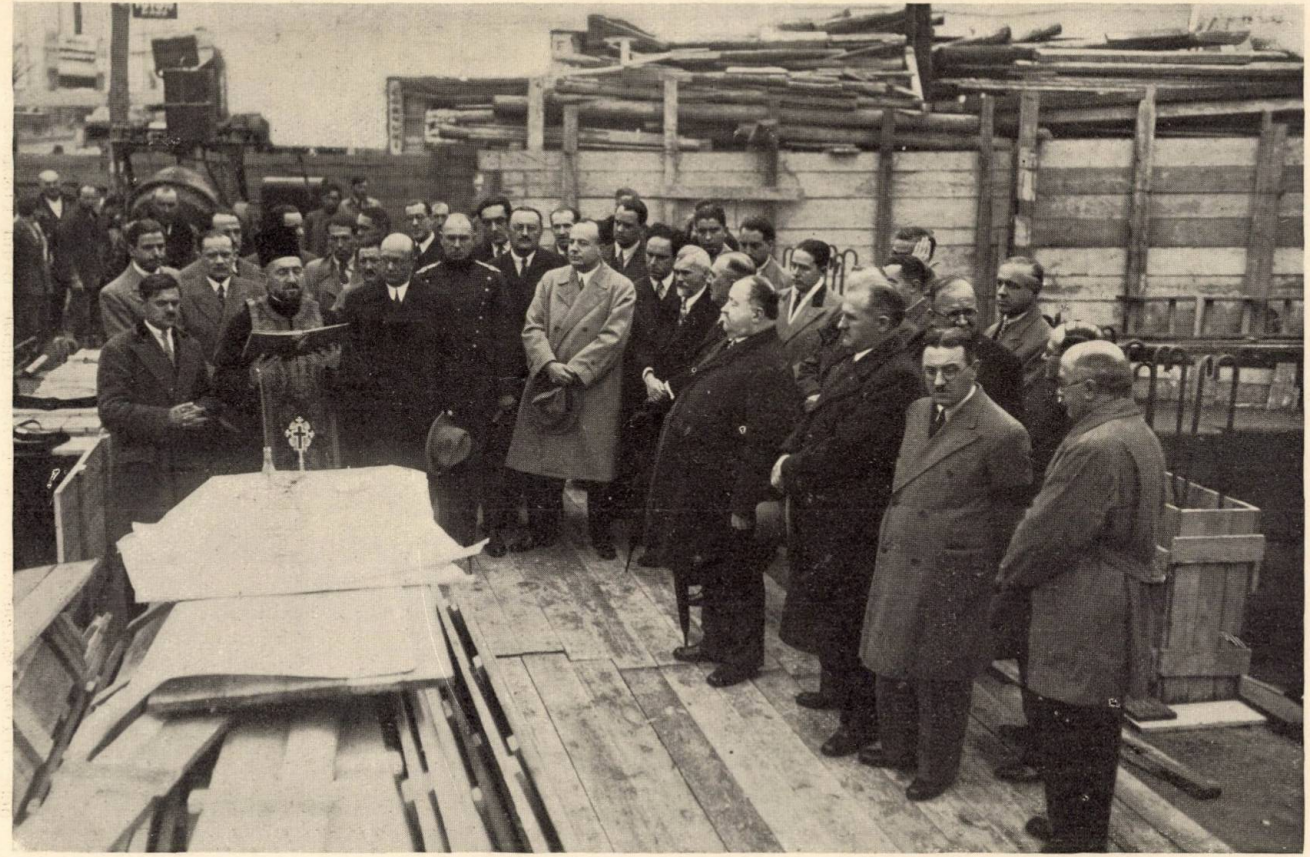
Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijà în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procurà dela „*Gazeta Matematică*" („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29 Bucureşti 1) în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 691, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 214, 36, 70, 71, 97, 99, 310, 33, 67, 84, 86, 99, 412, 50, 553, 650, 79, 711, 29, 64, 876, 906, 14, 29, 59, 87, 2003, 04, 17, 70, 74, 111, 70, 338, 405, 30, 39, 66, 77, 502, 03, 56, 77, 87, 607, 09, 23, 38, 55, 65, 84, 92, 709, 13, 17, 35, 69, 80, 814, 65, 86, 89, 909, 12, 26, 36, 47, 3005, 45, 69, 81, 127, 61, 69, 208, 30, 55, 60, 98, 300, 04, 09, 10, 16, 18, 50, 405, 12, 24, 25, 45, 72, 89, 93, 522, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 88, 608, 22, 27, 32, 46, 47, 57, 65, 81, 82, 84, 99, 700, 03, 33, 36, 93, 804, 08, 29, 36, 44, 53, 64, 80, 96, 909, 13, 15, 16, 18, 20, 33, 44, 83, 4010, 13, 30, 34, 45, 53, 59, 62, 68, 70, 73, 85, 102, 03, 11, 12, 18, 19, 23, 32, 47, 48, 50, 51, 55, 63, 67, 69, 91, 92, 201, 03, 06, 09, 10, 13, 25, 26, 30, 36, 40, 43, 46, 48, 49, 52, 56, 57, 75, 77, 79, 80, 81, 83, 87, 88, 89, 90, 300, 01, 03, 07, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procurà dela „*Gazeta Matematică*" („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29. Bucureşti 1), cu preţul de 12 lei.



Dela solemnitatea punerii pietrei fundamentale a localului Societăţii „Gazeta Matematică".
(A se vedea *Gazeta Matematică,* Vol. XXXIX, pag. 81).

SUR UNE TRANSFORMATION GÉOMÉTRIQUE

Dans la *Gazeta Matematică*, Vol. XXXVIII, pp. 358 — 455 M. M. SAGER et BUICLIU ont envisagé une transformation géométrique qui peut être définie de la manière suivante:

Soit O un point donné sur un axe Δ; l'on projette un point variable M sur Δ en P, puis P en M_1 sur OM, puis M_1 en P_1 sur Δ, puis P_1 en M_2 sur OM et ainsi de suite; la transformation considérée est celle qui fait correspondre à une courbe plane (M) décrite par le point M la courbe (M_n) décrite par le point M_n.

Or, dans le cas où n est quelconque, il existe entre les normales aux points correspondants des courbes (M) et (M_n) une relation très simple, que nous nous proposons d'établir ci-après; elle permet d'ailleurs d'obtenir une construction de la tangente à certaines courbes planes remarquables.

1. Désignons par ω l'angle de OM avec Δ et par $\rho, \rho_1, \ldots, \rho_n$ les segments $OM, OM_1, \ldots, OM_n$; appelons N et N_n les points où les normales en M et M_n aux courbes (M) et (M_n) rencontrent la perpendiculaire élevée en O sur OM. On a

$$\rho_n = \rho\cos^{2n}\omega\ ,\quad \frac{d\rho}{d\omega} = ON\ ,\quad \frac{d\rho_n}{d\omega} = ON_n\ ,$$

$$ON_n = \frac{d\rho_n}{d\omega} = \frac{d\rho}{d\omega}\cos^{2n}\omega - 2n\,\rho\cos^{2n-1}\omega\sin\omega.$$

$$= ON\cdot\frac{OM_n}{OM} - 2n\,OM_n\,\mathrm{tg}\omega.$$

Menons par M_n une parallèle M_nQ_n à MN rencontrant ON en Q_n; prolongeons, d'autre part, $P_{n-1}M_n$ de $(2n-1)$ fois sa longueur jusqu'en L_n, puis par L_n menons à Δ une parallèle qui coupe ON en J_n; on aura alors

$$OQ_n = ON\cdot\frac{OM_n}{OM}\ ,\ OJ_n = 2n\,OM_n\,\mathrm{tg}\omega.$$

Le segment ON_n est donc la différence des segments OQ_n et OJ_n et l'on en déduit la construction suivante de la normale en M_n à la courbe (M_n):

La parallèle à la normale de (M), *menée par le point obtenu en prolongeant* M_nP_{n-1} *de* $2n-1$ *fois sa longueur, rencontre la perpendiculaire élevée en* O *sur* OM *en un point de la normale cherchée.*

2. *Normale à la cissoïde droite.* — Quand $n = 1$ et que la courbe (M) est une droite parallèle à Δ, (M_1) est une cissoïde droite ayant O pour rebroussement et (M) pour asymptote. On trouve ainsi cette construction pour la normale en un point M_1 d'une cissoïde droit (M_1) :

Si, par le symétrique de M_1 *par rapport au point où la normale au rebroussement rencontre la perpendiculaire en* M_1 *sur* OM_1, *on mène une parallèle à l'axe, celle-ci coupe la perpendiculaire élevée en* O *sur* OM_1 *en un point de la normale cherchée.*

L'on voit, d'après ce qui précède, qu'on obtient une construction analogue pour les courbes plus générales ayant pour équation, Δ étant l'axe des x et O l'origine,

$$y\,(x^2 + y^2)^n = ax^{2n} ;$$

alors la parallèle à l'axe est menée par le point obtenu en prolongeant de $2n - 1$ fois sa longueur le segment compris entre le point considéré et celui où la normale au rebroussement rencontre la perpendiculaire menée par le point de la courbe au rayon vecteur mené du rebroussement à ce point.

3. Supposons maintenant que (M) soit une droite perpendiculaire à Δ ; les équations polaires des courbes (M_1), (M_2),..., (M_n) sont alors de la forme

$$\rho_n = a \cos^{2n-1} \omega.$$

Le point P est à l'intersection de (M) avec Δ et la construction devient la suivante :

La parallèle à l'axe polaire, menée par le point obtenu en prolongeant $M_n P_{n-1}$ *de* $2n - 1$ *fois sa longueur rencontre la perpendiculaire élevée au pôle sur le rayon vecteur en un point de la normale cherchée.*

4. Quand (M) est une circonférence de centre O, les courbes (M_n) sont celles représentées en coordonnées polaires par une équation de la forme

$$\rho_n = a \cos^{2n} \omega.$$

La normale en un point M_n *passe par le milieu du segment compris entre le pôle* O *et le point obtenu en prolongeant* $M_n P_{n-1}$ *de* $2n - 1$ *fois sa longueur.*

R. Goormaghtigh
(Bruges, Belgique).

RELAŢII TRIGONOMETRICE INTR'UN TRIUNGHIU IN LEGĂTURĂ CU PUNCTELE LUI FEUERBACH

Intre elementele unui triunghiu — distanţe şi unghiuri remarcabile —, se pot stabili relaţii interesante atât prin forma lor, pe care o expun pe cât posibil geometric, cât şi prin transformările succesive ale acestor relaţii până la forma lor definitivă; nu voi neglija deci nici calculul trigonometric, care poate furniza identităţi, noi sau cunoscute, între unghiurile unui triunghiu — pe această cale.

Fie deci O, H, O_9, I, I_a, I_b, I_c notaţii clasice în triunghiul ABC; R, r, r_a, r_b, r_c notaţii cunoscute şi

$$\rho = 2R \cos A \cos B \cos C \ , \ \rho a = 2R \cos A \sin B \sin C \ldots$$

razele cercurilor tritangente triunghiului ortic Ah Bh Ch.

Notăm încă:

$$ta = \frac{\overline{HAh} \cdot \overline{BC}}{2R} = 2R \sin A \cos B \cos C \ldots$$

şi ţinem seamă şi de alte formule elementare.

* * *

Pentru a evita o discuţie inutilă, considerăm cazul de figură $\hat{B} > \hat{C}$. Unghiul pe care îl face bisectoara şi raza cercului circumscris, relativ la vârful A, e dat de formula cunoscută

$$\sphericalangle IAO = \frac{B - C}{2} \cdot$$

Semidreapta lui Euler

$$OO_9 = \frac{R}{2} \sqrt{1 - 8 \cos A \cos B \cos C}.$$

Lungimea AO_9 calculată ca mediană în triunghiul AOH, este:

$$\overline{AO_9}^2 = \frac{\overline{AO}^2 + \overline{AH}^2}{2} - \frac{\overline{OH}^2}{4} = \frac{R^2}{4}[2 + 8\cos^2 A - (1 - 8\cos A \cos B \cos C)] =$$

$$\frac{R^2}{4}[1 + 8\cos A(-\cos(B+C) + \cos B \cos C)] = \frac{R^2}{4}[1 + 8 \cos A \sin B \sin C].$$

$$(1) \ {}_{*}{}^{*}{}_{*} \ AO_9 = \frac{R}{2} \sqrt{1 + 8 \cos A \sin B \sin C} = \frac{\sqrt{R}}{2} \cdot \sqrt{R + 4 \rho a}.$$

Din triunghiul OAO_9,

$$\cos OAO_9 = \frac{\overline{AO_9}^2 + \overline{AO}^2 - \overline{OO_9}^2}{2 \cdot AO \cdot AO_9}$$

$$= \frac{\frac{R^2}{4}[1 + 8\cos A \sin B \sin C] + R^2 - \frac{R^2}{4}[1 - 8\cos A \cos B \cos C]}{R^2 \sqrt{1 + 8\ \cos A\ \sin B\ \sin C}}$$

$$= \frac{1 + 2\ \cos A\ (\sin B\ \sin C + \cos B\ \cos C)}{\sqrt{1 + 8\ \cos A\ \sin B\ \sin C}} = \ldots$$

$$(2)\ {}^{*}_{*}{}^{*}_{*}\ \cos OAO_9 = \frac{1 + 2\cos A\ \cos(B - C)}{\sqrt{1 + 8\ \cos A\ \sin B\ \sin C}} = \frac{R + \rho + \rho a}{\sqrt{R\,(R + 4\rho a)}}$$

$$\sin^2 OAO_9 = 1 - \cos^2 OAO_9$$

$$= \frac{4\cos A\,[2\sin B \sin C - \cos(B - C) - \cos A \cos^2(B - C)]}{1 + 8\ \cos A\ \sin B\ \sin C}$$

$$= \frac{4\cos^2 A\ [1 - \cos^2(B - C)]}{1 + 8\ \cos A\ \sin B\ \sin C} = .$$

$$(3)\ {}^{*}_{*}{}^{*}_{*}\ \sin OAO_9 = \frac{2\cos A\ \sin(B - C)}{\sqrt{1 + 8\ \cos A\ \sin B \sin C}} = \frac{tb - tc}{\sqrt{R\,(R + 4\ \rho a)}}\ .$$

Deci

$$\sin O_9AI = \sin[OAI - OAO_9]$$

$$= \frac{\sin\frac{B - C}{2}[1 + 2\cos A\ \cos(B - C) - 2\cos\frac{B - C}{2}\cos A \sin(B - C)]}{\sqrt{1 + 8\ \cos A\ \sin B\ \sin C}}$$

$$= \frac{\sin\frac{B - C}{2} - 2\cos A\,[\sin(B - C)\sin\frac{B - C}{2} - \cos(B - C)\cos\frac{(B - C)}{2}]}{\sqrt{1 + 8\ \cos A\ \sin B\ \sin C}} = \ldots$$

$$(4)\ {}^{*}_{*}{}^{*}_{*}\ \sin O_9AI = \frac{\sin\frac{B - C}{2}[2\cos A - 1]}{\sqrt{1 + 8\cos A \sin B \sin C}} = \frac{(AH - R)\sin\frac{B - C}{2}}{\sqrt{R\,(R + 4\,\rho a)}}$$

şi

$$\cos O_9AI = \frac{\cos\frac{B - C}{2}[2\cos A + 1]}{\sqrt{1 + 8\cos A \sin B \sin C}} = \frac{(AH + R)\cos\frac{B - C}{2}}{\sqrt{R\,(R + 4\,\rho a)}}$$

Calculând acum pe $\overline{O_9I}$ din triunghiul AO_9I,

$$\overline{O_9I}^2 = \overline{AO_9}^2 + \overline{AI}^2 - 2 \cdot AO_9 \cdot AI \cdot \cos O_9AI$$

$$\overline{O_9I}^2 = \frac{R^2}{4}[1 + 8\cos A \sin B \sin C] + 10R^2 \sin^2\tfrac{1}{2}B \sin^2\tfrac{1}{2}C$$

$$- 4R^2 \sin\tfrac{1}{2}B \sin\tfrac{1}{2}C \cos\frac{B-C}{2}[2\cos A + 1]$$

$$= \frac{R^2}{4}\{1 + 8\cos A \sin B \sin C + 64\sin^2\tfrac{1}{2}B \sin^2\tfrac{1}{2}C - 2.16\cos A \sin\tfrac{1}{2}B \sin\tfrac{1}{2}C \times$$

$$\cdot [\cos\tfrac{1}{2}B \cos\tfrac{1}{2}C + \sin\tfrac{1}{2}B \sin\tfrac{1}{2}C] - [16 \sin^2\tfrac{1}{2}B \sin^2\tfrac{1}{2}C$$

$$+ 16 \sin\tfrac{1}{2}B \sin\tfrac{1}{2}C \cos\tfrac{1}{2}B \cos\tfrac{1}{2}C]\}$$

$$= \frac{R^2}{4}\{1 + 48 \sin^2\tfrac{1}{2}B \sin^2\tfrac{1}{2}C - 32[1 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}A] \sin^2\tfrac{1}{2}B \sin^2\tfrac{1}{2}C$$

$$- 16 \sin\tfrac{1}{2}B \sin\tfrac{1}{2}C \cos\tfrac{1}{2}B \cos\tfrac{1}{2}C\}$$

$$= \frac{R^2}{4}\{1 + 64 \sin^2\tfrac{1}{2}A \sin^2\tfrac{1}{2}B \sin^2\tfrac{1}{2}C$$

$$+ 16 \sin\tfrac{1}{2}B \sin\tfrac{1}{2}C [\sin\tfrac{1}{2}B \sin\tfrac{1}{2}C - \cos\tfrac{1}{2}B \cos\tfrac{1}{2}C]\}$$

$$= \frac{R^2}{4}\{1 - 16 \sin\tfrac{1}{2}A \sin\tfrac{1}{2}B \sin\tfrac{1}{2}C + 64 \sin^2\tfrac{1}{2}A \sin^2\tfrac{1}{2}B \sin^2\tfrac{1}{2}C\}.$$

(5) $\overline{O_9I} = \frac{R}{2}[1 - 8 \sin\tfrac{1}{2}A \sin\tfrac{1}{2}B \sin\tfrac{1}{2}C] = \frac{R - 2r}{R}$

şi analog :

$$\overline{O_9I_a}^2 = \overline{AO_9}^2 + \overline{AI_a}^2 - 2 \cdot AO_9 \cdot AI_a \cdot \cos O_9AI$$

$$\overline{O_9I_a}^2 = \frac{R^2}{4}[1 + 8\cos A \sin B \sin C] + 16R^2 \cos^2\tfrac{1}{2}B \cos^2\tfrac{1}{2}C$$

$$- 4R^2 \cos\tfrac{1}{2}B \cos\tfrac{1}{2}C \cos\frac{B-C}{2}[2\cos A + 1]$$

$$= \frac{R^2}{4}\{1 + 8\cos A \sin B \sin C + 64\cos^2\tfrac{1}{2}B \cos^2\tfrac{1}{2}C - 32 \cos A \cos\tfrac{1}{2}B \cos\tfrac{1}{2}C \times$$

$$\cdot [\cos\tfrac{1}{2}B \cos\tfrac{1}{2}C + \sin\tfrac{1}{2}B \sin\tfrac{1}{2}C] - [16\cos^2\tfrac{1}{2}B \cos^2\tfrac{1}{2}C$$

$$+ 16 \cos\tfrac{1}{2}B \cos\tfrac{1}{2}C \sin\tfrac{1}{2}B \sin\tfrac{1}{2}C]\}$$

$$= \frac{R^2}{4}\{1 + 48\cos^2\tfrac{1}{2}B \cos^2\tfrac{1}{2}C - 32[1 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}A]\cos^2\tfrac{1}{2}B \cos^2\tfrac{1}{2}C$$

$$- 16\cos\tfrac{1}{2}B \cos\tfrac{1}{2}C \sin\tfrac{1}{2}B \sin\tfrac{1}{2}C\}$$

$$= \frac{R^2}{4}\{1 + 64 \cos^2\tfrac{1}{2}B \cos^2\tfrac{1}{2}C \sin^2\tfrac{1}{2}A$$

$$+ 16 \cos\tfrac{1}{2}B \cos\tfrac{1}{2}C [\cos\tfrac{1}{2}B \cos\tfrac{1}{2}C - \sin\tfrac{1}{2}B \sin\tfrac{1}{2}C]\}$$

$$= \frac{R^2}{4}[1 + 16 \sin\tfrac{1}{2}A \cos\tfrac{1}{2}B \cos\tfrac{1}{2}C + 64 \sin^2\tfrac{1}{2}A \cos^2\tfrac{1}{2}B \cos^2\tfrac{1}{2}C].$$

$$(6)\quad {}^{*}_{*}{}^{*}\ \overline{O_9I_a} = \frac{R}{2}[1 + 8\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C] = \frac{R + 2r_a}{R}\ .$$

Relațiile (5) și (6) verifică teorema lui FEUERBACH, procedeul putând fi considerat ca o demonstrație trigonometrică a ei :

In triunghiul AO_9I,

$$\sin AO_9I = \frac{AI}{IO_9}\sin O_9AI = \frac{8\sin\tfrac{1}{2}B\,\sin\tfrac{1}{2}C\,\sin\dfrac{B-C}{2}[2\cos A - 1]}{[1 - 8\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C]\sqrt{1 + 8\cos A\sin B\sin C}}$$

$$(7)\qquad = \frac{2\,.\,AI\,.\,(AH - R)\,.\,\sin\dfrac{B-C}{2}}{(R - 2r)\sqrt{R\,(R + 4\rho a)}}$$

și

$$(8)\quad \sin AO_9I_a = \frac{8\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C\sin\dfrac{B-C}{2}[2\cos A - 1]}{[1 + 8\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C]\sqrt{1 + 8\cos A\sin B\sin C}}$$

$$= \frac{2\,.\,AI_a\,.\,(AH - R)\,.\,\sin\dfrac{B-C}{2}}{(R + 2r_a)\sqrt{R\,(R + 4\rho a)}}\ .$$

Deasemenea :

$$(9)\ \sin AIO_9 = \frac{\sin\dfrac{B-C}{2}[2\cos A - 1]}{1 - 8\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C} = \frac{(AH - R)\sin\dfrac{B-C}{2}}{R - 2r)}$$

și

$$(10)\qquad \sin AI_a\,O_9 = \frac{\sin\dfrac{B-C}{2}[2\cos A - 1]}{1 + 8\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C} = \frac{(AH - R)\sin\dfrac{B-C}{2}}{R + 2r_a}\ .$$

De aici avem și

$$\cos^2 AIO_9 = 1 - \sin^2 AIO_9 = \frac{(1 - 8\pi\sin\tfrac{1}{2}A)^2 - \sin^2\dfrac{B-C}{2}[2\cos A - 1]^2}{(1 - 8\pi\ \sin\tfrac{1}{2}A)^2}$$

dar patratul numitorului se poate scrie succesiv :

$$E = 1 + 64\sin^2\tfrac{1}{2}A\sin^2\tfrac{1}{2}B\sin^2 C - 16\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C =$$

$$1 - 32\cos A\sin^2\tfrac{1}{2}B\sin^2\tfrac{1}{2}C + 48\sin^2\tfrac{1}{2}A\sin^2\tfrac{1}{2}B\sin^2\tfrac{1}{2}C$$

$$- 16\ \sin\tfrac{1}{2}A\ \sin\tfrac{1}{2}B\ \sin\tfrac{1}{2}C =$$

$$1+32\cos A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C\left[\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C-\cos\frac{B-C}{2}\right]$$

$$+(64-16)\sin^2\tfrac{1}{2}B\sin^2\tfrac{1}{2}C$$

$$-16\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C=1+8\cos A\sin B\sin C+64\sin^2\tfrac{1}{2}B\sin^2\tfrac{1}{2}C$$

$$-16\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C\cos\frac{B-C}{2}(1+2\cos A)$$

şi

$$1+8\cos A\sin B\sin C=1+4\cos A[\cos A+\cos(B-C)]=$$

$$4\cos^2A\left[\sin^2\frac{B-C}{2}+\cos^2\frac{B-C}{2}\right]+\left[\sin^2\frac{B-C}{2}+\cos^2\frac{B-C}{2}\right]$$

$$+4\cos A\left[\cos^2\frac{B-C}{2}-\sin^2\frac{B-C}{2}\right]=$$

$$\sin^2\frac{B-C}{2}[2\cos A-1]^2+\cos^2\frac{B-C}{2}[2\cos A+1]^2$$

deci:

$$E=(1-8\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C)^2=\left\{8\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C-\cos\frac{B-C}{2}[2\cos A+1]\right\}^2$$

$$+\left\{\sin\frac{B-C}{2}[2\cos A-1]\right\}^2$$

şi atunci

$$(11)\quad \cos AIO_9=\frac{8\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C-\cos\dfrac{B-C}{2}[1+2\cos A]}{1-8\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C}$$

$$=\frac{2\cdot AI-(AH+R)\cos\dfrac{B-C}{2}}{R-2r}\ .$$

Pentru $\cos AI_aO_9$, avem o identitate analoagă:

$$[1+8\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C]^2=\left[8\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C-\cos\frac{B-C}{2}(2\cos A+1)\right]^2$$

sau, altfel:

$$\Big|+\left[\sin\frac{B-C}{2}(2\cos A-1)\right]^2$$

$$\cos AI_a O_9 = \frac{\overline{AI_a}^2 + \overline{O_9I_a}^2 - \overline{AO_9}^2}{2 \cdot AI_a \cdot O_9I_a}$$

$$= \frac{16R^2\cos^2\tfrac{1}{2}B\cos^2\tfrac{1}{2}C + \frac{R^2}{4}[1+8\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C]^2 - \frac{R^2}{4}[1+8\cos A\sin B\sin C]}{2 \cdot 4 \cdot R^2 \cos\tfrac{1}{2}B \cos\tfrac{1}{2}C [1 + 8 \sin\tfrac{1}{2}A \cos\tfrac{1}{2}B \cos\tfrac{1}{2}C]}$$

$$= \frac{4\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C + 4\sin^2\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C + \sin\tfrac{1}{2}A - 2\cos A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C}{1 + 8 \sin\tfrac{1}{2}A \cos\tfrac{1}{2}B \cos\tfrac{1}{2}C}$$

$$= \frac{6\cos\tfrac{1}{2}B \cos\tfrac{1}{2}C - 2\cos A \cos\dfrac{B-C}{2} + \sin\tfrac{1}{2}A}{1 + 8 \sin\tfrac{1}{2}A \cos\tfrac{1}{2}B \cos\tfrac{1}{2}C} = \ldots$$

$$(12)\ {}^{*}_{*}{}^{*}_{*}\ \cos AI_a O_9 = \frac{8\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C - \cos\dfrac{B-C}{2}(1 + 2\cos A)}{1 + 8 \sin\tfrac{1}{2}A \cos\tfrac{1}{2}B \cos\tfrac{1}{2}C}$$

$$= \frac{2 \cdot AI_a - (AH + R) \cos\dfrac{B-C}{2}}{R + 2r_a}.$$

(Va urma)

N. N. MIHĂILEANU
Constanța.

PREMIUL „INGINER AL. ROȘU"

Colegul nostru de redacție și membru în comisiunea ce redijează acest raport, D-l AL. AL. ROȘU a donat în memoria tatălui său, Inginer AL. ROȘU († 17 Aprilie 1917), suma de 500 lei pentru a se acorda un premiu corespondenților *Gazetei Matematice* din anul XXXVIII în aceleași condițiuni în care acelaș donator a instituit un premiu de 500 lei pentru anul XXXVII.

Condițiunile premiului «INGINER AL. ROȘU» sunt publicate în *Gazeta Matematică*, Vol. XXXVIII, pag. 124.

D-l ADRIAN C. GHEORGHIU premiatul de anul trecut își menține și anul acesta locul întâi, însă nu i se poate acorda premiul, d-sa fiind licențiat în matematici.

Acela dintre corespondenţi care se impune în rândul al doilea prin cea mai bogată activitate de geometrie avută în paginile volumului XXXVIII, este D-l N. N. MIHĂILEANU, student al Facultăţii de Matematici din Bucureşti. De altfel, d-sa are în general o activitate foarte bogată la *Gazeta Matematică*. Citâm din notele şi problemele de geometrie, publicate sub numele d-sale în vol. XXXVIII pe următoarele:

1°. *Nota 38:* Proprietăţi în legătură cu cubica lui DARBOUX, pag. 254 — 255.

2°. Soluţiunile problemelor 4115 (pag. 73), 4144 (pag. 153) şi 4164 (pag. 429).

3°. Soluţia problemei 4176 (pag. 395) şi observaţiile de la finele acestei soluţii.

Faţă de acestea propunem ca premiul «INGINER AL. ROŞU» să fie acordat d-lui N. N. MIHĂILEANU.

COMISIUNEA PENTRU PREMIUL „INGINER AL. ROŞU":
N. BOTEA, COL. GH. BUICLIU,
AL. A. ROŞU.

Acest raport a fost citit şi aprobat în şedinţa din 29 Noemvrie 1933.

NOTE MATEMATICE

12. *Unităţi aritmetice.* Studiul unităţilor de măsură se începe în Aritmetică cu ale mărimilor geometrice (lungimi, suprafeţe, volume, capacităţi, rare ori unghiuri), se continuă cu unităţi mecanice (greutăţi, timp) şi se termină cu unităţile de valoare (sistemul monetar). Pare însă mai natural să se înceapă cu unităţile aritmetice sau numerice, adică cu cazurile când mai multor obiecte asemenea, dar chiar neidentice, luate la un loc, li se dă, ca număr, un nume special.

Astfel am avea *perechea* pe care o utilizează azi precupeţii; *duzina* care se utilizează de mulţi comercianţi, *suta* şi *mia* cu care se vinde zarzavaturi şi fructe, *claia* de 26 sau 28 snopi prin judeţul Ilfov, cu care se plăteşte seceratul grâului, orzului, etc.; *tisteaua, conţul* şi *topul* în comerţul hârtii; *sorocurile* cu care se denumeşte uneori grupul de 20 de unităţi; *caleapul, jurubiţa* şi *gerba* care se întrebuinţează de ţărance la ţesut; etc.

Prin studiul unor asemenea unităţi în aritmetică s'ar putea fixa invariabilitatea lor şi s'ar stabili cu timpul norme de aplicarea lor, cu certitudine, la anumite cazuri.

I. I.

13. *O lună de zile. Un an de zile.* Un coleg, profesor la Şcoala Politehnică din Bucureşti, se întreba acum câtva timp de unde vine spusele: *„o lună de zile, un an de zile"* când ar fi deajuns să se zică: *„o lună, un an"*.

Am găsit o explicaţie a acestui obiceiu în *„Manualu de Arheologie Biblică"* compus de ISIDORU DE ONCIUL, tipărit la Cernăuţi în 1884, explicaţie pe care autorul o sprijină pe citate din Cărţile I, III şi IV ale lui MOISE, (Geneza, Exodul şi Numeri). La pag. 215 din această carte găsim următoarele:

«Precum însă neci la noi nu se întrebuinţează cuvântul *anu* şi *lună* numai despre ciclul, ce începe şi finesce în înţălesu strinsu astronomicu, ci despre acelaşi restimpu ori când ar începe, aşa întrebuinţa respicăciunile acestea şi Evreii, exprimându-se în acest casu pre'n *uă lună de zile, unu anu de zile"*.

Prin introducerea cuvântului suplimentar *„zile"* se arăta dar că erea vorba de luna civilă, iar nu de epoca dela o lună nouă la luna nouă următoare, care nu corespundea unui număr exact de zile. Tot aşa şi cu anul civil, care avea un număr exact de zile, pe când anul astronomic conţine şi fracţiuni de zi.

I. I.

14. *Primii licenţiaţi în matematici dela Facultăţile de Ştiinţe din România.* După o notă publicată de DR. C. ISTRATI în *Buletinul Societăţii de Ştiinţe Fizice,* primii 25 licenţiaţi în matematici dela Facultăţile de Ştiinţe din Bucureşti şi Iaşi sunt:

1. GR. A. DEMETRESCU	din	Bucureşti	la	11/X 1868.
2. I. STRAVOLCA	»	»	»	29/IX 1870.
3. C. VRANA	»	»	»	19/IV 1874.
4. SPIRU C. HARET	»	»	»	27 VI 1874.
5. C. MĂNESCU	»	Iaşi	»	8/VII 1874.
6. M. M. ROMNICEANU	»	Bucureşti	»	17/VI 1875.
7. C. DEMETRESCU	»	»	»	25/VI 1882.

8. I. V. D. Praja	din	Iaşi	la	28/VI 1882.
9. G. Ciolac	»	»	»	28/VI 1882.
10. G. Lascăr	»	»	»	28/VI 1882.
11. Gr. Casimir	»	»	»	15/IX 1882.
12. D. Bungeţianu	»	»	»	17/IV 1884.
13. C. Vişinescu	»	»	»	25/VI 1884.
14. Gr. Negură	»	»	»	25/VI 1884.
15. I. Otescu	»	Bucureşti	»	23/IX 1886.
16. N. C. Cosăcescu	»	»	»	17/VI 1887.
17. G. Pascu	»	Iaşi	»	15/XI 1887.
18. T. Crivăţ	»	Bucureşti	»	15/X 1888.
19. Em. Constantinescu	»	Iaşi	»	18/I 1889.
20. N. Coculescu	»	Bucureşti	»	III 1889.
21. N. Lăzărescu	»	»	»	VI 1889.
22. St. D. Popescu	»	»	»	VI 1889.
23. N. Mitescu	»	»	»	VI 1889.
24. T. Vasilescu	»	»	»	XI 1889.
25. C. A. Miclescu	»	»	»	II 1890.

După cum se vede de aci, până la 1890 cele două Facultăţi de Ştiinţe din Bucureşti şi Iaşi, nu au dat în mediu nici un licenţiat măcar pe an. Lucrul nu trebuie să surprindă, deoarece după vechea lege a instrucţiunii publice, pentru a ajunge profesor, nu numai de cursul secundar, dar şi de cel universitar, nu se cerea alt titlu decât Bacalaureatul şi concurs.

I. I.

15. *Reciprocitatea unor relaţiuni.* S'a demonstrat în *Gazeta Matematică,* Vol. XXXVIII, pag. 394 că: *dacă între numerele întregi* a, b, c *şi* x, y, z *există relaţiunile*

$$(1) \qquad a^2 + b^2 = c^2 \; ; \; x^2 + y^2 = z^2$$

şi

$$(2) \qquad ax + by = cz$$

atunci există şi

$$(3) \qquad \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} \; .$$

Voiu demonstra că aceste relaţiuni sunt reciproce în sensul că două din ele atrag neapărat pe a treia, ori cum le-am considera.

S'a văzut că (1) şi (2) atrage pe (3).

Zic că *(1) şi (3) atrage pe (2).* In adevăr, din (3) avem

$$\frac{ax}{x^2} = \frac{by}{y^2} = \frac{cz}{z^2} = \frac{ax+by}{x^2+y^2}$$

sau

$$\frac{a^2}{ax} = \frac{b^2}{by} = \frac{c^2}{cz} = \frac{a^2+b^2}{ax+by},$$

de unde se deduce (2).

Apoi *(2) şi (3) atrag relaţiunile (1).* Din (3) se scoate relaţiunile precedente de unde se trece imediat la (1).

Tot la pag. 394 s'a mai demonstrat că dacă avem (1) şi

(5) $$ay + bx = cz$$

atunci

(6) $$\frac{a}{y} = \frac{b}{x} = \frac{c}{z}.$$

Este de observat însă că (5) este tot una cu (2) în care s'a schimbat x cu y. Deci dacă a doua din relaţiunile (1) se scrie

$$y^2 + x^2 = z^2$$

relaţiunea (2) se scrie sub forma (5) iar (3) sub forma (6).

Se mai observă că nicăeri în demonstraţii nu s'a făcut uz de faptul că numerele a, b, c, x, y, z sunt întregi. Deci reciprocitatea relaţiunilor date este generală pentru orice fel de mărimi.

Col. Gh. Buicliu.

16. *Asupra problemei 3490.*

In «Exercices d'Algèbre, d'Analyse et de Trigonométrie» par P. Aubert et G. Papelier, Tome II, se găseşte la pag. 5 formula cunoscută

$$a^n + b^n = (a+b)^n - nab(a+b)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{2!}a^2b^2(a+b)^{n-4} - \ldots$$

$$+ (-1)^p \frac{n(n-p-1)(n-p-2)\ldots(n-2p+1)}{p!} a^p b^p (a+b)^{n-2p} + \ldots$$

Inlocuind în această formulă pe a prin $a+1$, iar b prin $-a$ prima parte devine

(1) $$(a+1)^n + (-1)^n a^n,$$

iar partea a doua devine un polinom în $a(a+1)$. Ori în problema 3490 se cerea tocmai acest lucru: să se arate că expresia (1) este un polinom în $a(a+1)$.

GH. TH. GHEORGHIU.

17. *Asupra problemei 4217.*

Această problemă se rezolvă şi astfel:

Fiind dată funcţiunea

$$f(x) = (a+b)x^2 - 2(ab-1)x - (a+b)$$

calculând pe

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \quad \text{şi} \quad f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

găsim că:

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) = -\frac{(a-b)^2}{a+b}$$

şi

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{(a+b)(a-b)^2}{4}$$

astfel:

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$$

de unde rezultă, că rădăcina pozitivă a ecuaţiei $f(x) = 0$, adică

$$T = \frac{ab - 1 + \sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}}{a+b}$$

este cuprinsă între $\frac{2ab}{a+b}$ şi $\frac{a+b}{2}$.

MARIA NEUMANN.

18. *Instabilitatea la torsiune a aripilor libere a unui avion.* (Calculul vitezei critice).

Intr'o teză de doctorat (vezi Bulletin Technique No. 60—1929 al S. T. Aé francez) D-l LEDUC determină pe o cale lungă şi complicată «viteza critică» a avioanelor pentru care numai există stabilitate la torsiune.

Pe o cale simplă îmi propun a face acelaş lucru aci.

Elasticitatea unei aripi libere, a unui avion, la torsiune ne dă relaţia între moment şi unghiu:

$$1) \qquad M = e \cdot \theta.$$

Dacă egalăm unghiul de atac al aripei cu unghiul de torsiune, alegând o aceiaşi origină, atunci sub acţiunea aerodinamică se naşte asupra aripei un moment:

$$2) \qquad M_G = M_{G_0} + k \cdot \theta,$$

unde k este un coeficient constant, M_{G_0} este momentul în cazul portanţei nule.

Dacă acum avem la un moment dat: $m = M_G$, înseamnă că din 1) şi 2) deducem că:

$$3) \qquad \theta = \frac{M_{G_0}}{e - k}$$

unde θ poate deveni infinit (instabilitate) pentru:

$$4) \qquad e = k.$$

Pe cale aerodinamică se poate lesne dovedi că:

$$5) \qquad k = \frac{\rho}{2} \cdot C_z \cdot S \cdot V^2 \cdot \left(d - \frac{l}{4}\right)$$

pentru aripa unui avion, unde:

ρ, este massa specifică a aerului;
C_z, este coeficientul unitar de portanţă;
S, este suprafaţa portantă;
V, este viteza în m/sec;
d, depărtarea marginei de atac a aripei la centru de greutate al avionului şi
l, coarda medie a aripei.

Inlocuind pe k în 4) obţinem:

$$6) \qquad V_c = \sqrt{\frac{e}{\frac{\rho}{2} \cdot C_z \cdot S \cdot \left(d - \frac{l}{4}\right)}}$$

care este expresiunea *vitezei critice*, când numai avem stabilitate la torsiune.

Maior I. Linteş.

19. *Asupra influenței vibrațiunilor.* Știm că vibrațiunile unui sistem pot fi transformate în eforturi, cari pot pune în pericol rezistența sistemului.

In adevăr, fie u o deplasare vibratorie oarecare a unei secțiuni într'o bară care vibrează și f efortul ce s'ar putea naște în bară, atunci produsul $f.u$ ar putea fi reciproc, socotit drept o cauză care produce vibrațiuni și în acest caz, ecuația diferențială a mișcărei va fi:

$$1) \qquad f.u = e.u + a \cdot \frac{du}{dt} + I \cdot \frac{d^2 4a}{dt^2}$$

unde e este coeficientul de elasticitate al barei, a coeficientul de amortizare (viscozitate) și I momentul de inerție.

Scriind ecuația caracteristică a acestei ecuații diferențiale, ai cărei coeficienți sunt:

$$(e - f) \quad , \quad a \quad \text{și} \quad I$$

atunci ajungem lesne la concluziunea că:

$$f \geqslant e - \frac{a^2}{4\,I} \text{ , în cazul vibrațiilor } \textit{aperiodice,}$$

și

$$f < e - \frac{a^2}{4\,I} \text{ , în cazul vibrațiilor } \textit{periodice.}$$

In cazul *motoarelor* urmărim f mare, iar în cazul *rezistențelor mecanice,* f trebuie să fie cât mai mic, fapt ce ușor se poate discuta din condițiunile de mai sus.

MAIOR I. LINTEȘ.

CHESTIUNI DE EXAMEN

UNIVERSITATEA DIN CLUJ, FACULTATEA DE ȘTIINȚE

Secțiunea de Matematici

(Sesiunea Iunie 1933)

ALGEBRA ELEMENTARĂ

Algebră

1. Intr'un semicerc de rază R să se înscrie un dreptunghiu a cărui arie este dată și egală cu a^2. Una din laturile dreptunghiului e așezată pe diametrul ce mărginește semicercul.

1°. Să se discute problema după valorile parametrului a.

2°. Din discuție să se deducă dreptunghiul de arie maximă și să se construiască geometric.

3°. Să se dea dimensiunile dreptunghiului fără radicali suprapuși.

II. Intr'un triunghiu ABC se dau (1) înălțimea $AD = h$, (2) mediana $BE = m$; (3) $2 \operatorname{cotg} A = \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C$.

a) Să se transforme relația (3) intr'o relație metrică.

b) Să se arate că $S = \frac{1}{4}\sqrt{4b^2c^2 - a^4}$.

c) Calculându-se in două feluri suprafața să se determine a.

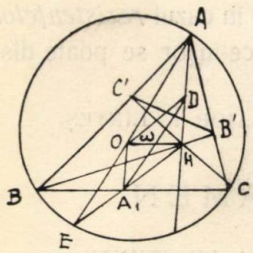
Mecanica

Să se determine poziția centrului de greutate a unei plăci omogene obținută scoțând dintr'un patrat de latură a un sfert de cerc cu centrul intr'unul din vârfurile patratului și cu o rază egală cu a.

ANUL I

GEOMETRIE

Se dă triunghiul ABC inscris in cercul cu centru O. Fie A_1 mijlocul lui BC, CC' și BB' înălțimile din B și C, H ortocentrul triunghiului ABC, D mijlocul lui AH, E punctul diametral opus lui A in cercul O.



Să se arate: 1) Că punctele H, A_1, E sunt colineare; 2) $OA_1 = \frac{1}{2}AH$; 3) centrul ω al cercului celor 9 puncte (al lui EULER) este mijlocul lui OH și că acest cerc trece prin picioarele înălțimilor, mijloacele laturilor, mijloacele distanțelor dela vârfuri la ortocentru; 4) A_1 ω D este paralelă cu AOE, perpendiculară pe mijlocul lui B'C' și deci perpendiculara din centrul ω al cercului lui EULER pe B'C' trece prin mijlocul lui BC; 5) B'C' este antiparalelă cu BC și deci perpendiculara din ω pe antiparalela lui BC trece prin mijlocul lui BC; 6) diametrul AO este perpendicular pe B'C' și este isogonala înălțimii AH in raport cu unghiul A.

MATEMATICI ELEMENTARE

(Secțiunile Matematici, Fizico-Matematică, Fizică)

Aritmetica

Un tren personal pleacă din Cluj spre București la $6^h 30^m$ dimineața și ajunge în București la $9^h 18^m$ seara. La ora $9^h 45^m$ dimineața pleacă tot din Cluj un tren accelerat cu o viteză de 900 m. pe minut.

1°. Ştiind că lungimea căii ferate dela Cluj la Bucureşti este de 503,2 km., se cere să se calculeze la ce oră trenul accelerat ajunge trenul personal şi la ce distanţă de Cluj. Timpul se va calcula în ore, minute şi secunde, iar distanţa în m.

2°. Fiind în trenul accelerat, vedem trecând în sens contrar, timp de 3 sec, un al treilea tren, lung de 75 m. Care a fost viteza acestui tren?

Trigonometrie

Intr'un triunghiu ABC se dau lungimile laturilor a, şi c; între unghiurile $\hat{B}$ şi $\hat{A}$ avem relaţia $\hat{B} = 2\hat{A}$.

1°. Să se arăte cum se poate rezolva triunghiul şi ce relaţie trebuie să existe între a şi c pentru ca problema să fie posibilă.

2°. In ce caz triunghiul e dreptunghic.

3°. Să se rezolve triunghiul în cazul particular $a = 1$, $c = \frac{5}{2}$.

MATEMATICI ELEMENTARE

(Secţiunile Fizico-Chimie, Chimie şi Geografie cu Matematici)

Avem pe o masă un vas metalic în formă de paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile interioare proporţionale cu numerile 4, 7 şi 2,4. Vasul este plin cu apă şi are capacitatea de 11,1804 l. Avem 1000 de bile sferice de cupru cu diametrul de 11 mm.

Să se calculeze:

1°. Dimensiunile interioare ale vasului.

2°. Cu cât sporeşte greutatea vasului, când se introduc în el aceste 1000 de bile de cupru, ştiind că densitatea cuprului este 8,85.

3°. Se scot toate bilele din vas. La ce nivel rămâne apa în vas.

4°. Se ridică fundul vasului numai dela un capăt al lungimii lui până la înălţimea de 8 cm. Să se spună câtă apă curge din vas.

5°. Ce unghiu face, în această poziţie, fundul vasului, cu suprafaţa orizontală a mesei.

MATEMATICI GENERALE

Proba teoretică

1. Să se verifice dacă expresiunea

$$(yz - Lz)\,dx + (xz - Lz)\,dy + \left(xy - \frac{x+y}{2}\right)dz$$

este o diferenţială totală exactă şi în caz afirmativ să se integreze.

2. Să se determine soluţiunea generală a ecuaţiei diferenţiale

$$(y+1)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial z}{\partial x} + (y-1)z = xy - x - y .$$

3. Să se determine punctele curbei

$$y = x + \frac{\sqrt{2}}{x}$$

în cari raza de curbură este minimă şi să se calculeze valorile acestor raze de curbură, precum şi coordonatele centrelor de curbură corespunzătoare.

Proba practică

Să se calculeze cu 3 zecimale exacte valoarea integralei

$$\int_1^3 \frac{x^4 - 8x^3 - 18x^2 - 8x - 3}{(x^3 + x^2 + x + 1)^2}\, dx .$$

ALGEBRA SUPERIOARĂ

Proba teoretică

1. Intr'un con de revoluţie cu raza bazei R şi cu înălţimea h să se înscrie un cilindru de revoluţie având volumul dat şi egal cu $\pi\frac{h}{R}m^3$. Discuţie după valorile lui m.

2. Să se deriveze funcţia

$$y = \operatorname{arctg}\frac{x}{1-x}$$

şi să se explice rezultatul. Să se studieze variaţia funcţiei y, arcul fiind cuprins între $-\frac{\pi}{2}$, $+\frac{\pi}{2}$. Se va cerceta şi concavitatea curbei.

3. Să se găsească natura seriei cu termenul general

$$U_n = \sin\frac{2n+1}{2n(n+1)} \sin\frac{1}{2n(n+1)}$$

şi să se calculeze suma $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$.

4. Să se reducă forma quadratică

$$F = 2xy + 2zx + 2zy$$

la forma canonică cu ajutorul unei substituţii ortogonale.

Proba practică

Să se determine numărul rădăcinilor reale ale ecuației

$$x^4 + 3x - 1 = 0$$

și să se calculeze rădăcina pozitivă cu o aproximație mai mică decât $\frac{1}{100}$.

GEOMETRIE ANALITICĂ

Proba teoretică

Se consideră parabola (P) tangentă în origină la axa Ox, ce are pe Oy ca axă și trece prin punctul (2,1). Să se scrie ecuația unei iperbole echilatere (I), tangentă parabolei (P) în vârf și care trece prin punctele de intersecție ale parabolei cu o dreaptă Δ variabilă dusă prin focar. Să se afle locul geometric al centrelor acestor iperbole când Δ variază. Să se afle locul polului dreptei Δ în raport cu iperbola (I) când Δ variază. Să se afle ecuația redusă a acestei iperbole (I) și axele sale. Să se afle ecuația asimptotelor acestei iperbole.

Proba practică

Să studieze și să se construiască curba

$$yx^2 = x^3 - 3x + 2 .$$

GEOMETRIA DESCRIPTIVĂ

ANUL II

Intersecția a două cilindre

Cadrul are dimensiunile orizontale și verticale de 270, mm. și 380 mm. Linia de pământ este paralelă cu marginea orizontală, la distanță de 160 mm. de sus în jos. Cilindrul C are baza în planul orizontal cercul O, cu centrul O (— 60, 87, 0), raza 32 mm. iar o generatoare de contur aparent orizontal trece prin punctul (— 29, 43, 37). Cilindrul C_1 are baza în planul orizontal cercul O_1 cu centrul în O_1 (48, 130, 0), raza 40 mm., iar o generatoare de contur aparent vertical trece prin punctul (33, 19, 83).

ANALIZA MATEMATICĂ

Partea I-a

Proba teoretică

Se dă suprafața:

$$(S) \quad \begin{cases} x = u^2v - v - \frac{1}{3}v^3 \\ y = uv^2 - u - \frac{1}{3}u^3 \\ z = 2uv. \end{cases}$$

1°. Să se determine liniile de curbură, liniile asimptotice şi razele de curbură principale într'un punct oarecare. Ce relaţie avem între R_1 şi R_2.

2°. Să se arate că liniile de curbură sunt plane şi să se scrie ecuaţia planului P al unei linii de curbură oarecare. Să se găsească învelitoarea planelor P pentru fiecare din cele două familii de linii de curbură.

3°. Să se arate că liniile asimptotice ale suprafeţei (S) sunt curbe BERTRAND, adică se bucură de proprietatea $\frac{R}{T} = \text{const.}$

Proba practică

Se dă integrala

$$\int \frac{\operatorname{tg} x\, dx}{(a + b \cos 2x)^2 \sqrt{\cos 4x}}.$$

Se cere:

1°. Să se reducă la integrala unei fracţii raţionale.

2°. Făcându-se $a = b$, să se calculeze integrala dată, între limitele 0 şi arc sec $2\sqrt{2}$.

ASTRONOMIE

I. Să se calculeze anomalia excentrică şi anomalia mijlocie a unei planete, ştiind că anomalia adevărată a ei este egală cu 201° 39′ 29″ şi excentricitatea orbitei planetei este $e = 0{,}205605$.

II. Coordonatele stelei α din Ursa Mare sunt:

$$\alpha = 10^h\, 56^m\, 19^s\,, \quad \delta = +\, 62^\circ\, 25'\, 54''.$$

La ce oră siderală distanţa ei zenitală este de 38° 25′ 18″?

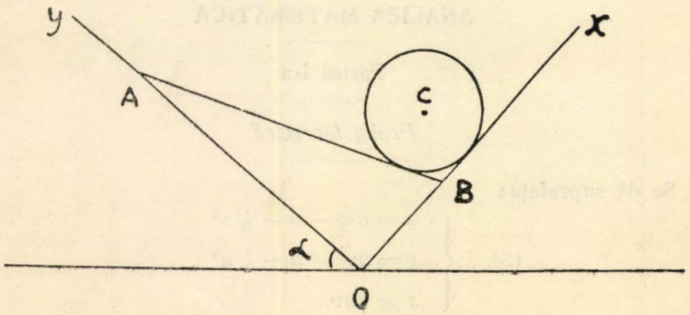
Latitudinea Clujului este 46° 41′ 16″.

MECANICA RAŢIONALĂ

Partea 1-a

Proba teoretică

Într'un plan vertical se consideră două vergele fixe Ox şi Oy perpendiculare între ele, Oy făcând unghiul α cu planul orizontal aşa cum este indicat pe figură.



Un sistem material greu este format dintr'o bară AB şi un disc circular C. Bara AB de lungime egală cu $3a$ se sprijină fără frecare pe Ox şi Oy în B şi A. Ea este neomogenă şi are centrul de greutate într'un punct G astfel ca $AG = 2GB$. Discul C este omogen, are raza egală cu a şi se sprijină fără frecare pe Ox şi pe bară.

Se cere să se studieze echilibrul acestui sistem.

1°. Să se găsească ecuaţia de echilibru luându-se ca parametru unghiul $OAB = \theta$. Se va găsi această ecuaţie aplicându-se teoremele generale.

2°. Să se găsească ecuaţia de echilibru aplicând teorema travaliului virtual.

3°. Se presupune $\alpha = 75^0$, să se determine raportul dintre greutăţile P şi Q ale barei şi discului, astfel ca în poziţie de echilibru să avem $\theta = 30^0$.

4°. Să se calculeze în acest caz toate reacţiunile.

Proba practică

Se consideră lănţişorul

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

şi fie P punctul de absciză u şi A vârful lănţişorului corespunzător lui $x = 0$ Pe tangenta în P la lănţişor îndreptată către Ox, se ia punctul M, astfel ca MPsă fie egal cu arcul de lănţişor AP. Locul geometric al punctului M când u variază este o curbă (Γ) numită *tractrice*. Să se verifice că coordonatele lui M în funcţie de u sunt date de formulele :

$$x = u - a\frac{e^{\frac{u}{a}} - e^{-\frac{u}{a}}}{e^{\frac{u}{a}} + e^{-\frac{u}{a}}}, \quad y = \frac{2a}{e^{\frac{u}{a}} + e^{-\frac{u}{a}}}$$

1°. Se presupune că mobilul M parcurge curba (Γ) astfel ca ograful mişcării în raport cu O să fie cercul $X^2 + Y^2 - 2kX = 0$. Să se găsească legea mişcării punctului M pe tractrice, determinând pe u în funcţie de timp. La momentul iniţial $t = 0$ punctul M se găseşte în A.

Din O se descrie ca centru un cerc de rază OA. Paralela dusă prin M la Ox întâlneşte acest cerc în punctul M' astfel ca M şi M' să fie deoparte şi de alta a axei Oy. Să se arate că timpul întrebuinţat de mobil ca să meargă din A în M este proporţional cu segmentul MM'.

2°. Să se calculeze acceleraţia tangenţială şi normală. Să se arate că acceleraţia lui M este proporţională cu ordonata punctului M.

Să se arate că bisectoarea unghiului format de acceleraţie şi de perpendiculara dusă din M pe Ox este viteza punctului M.

3°. Să presupunem că un punct material M de massă m, este obligat să se mişte fără frecare pe tractrice. El este atras de axa Ox cu o forţă proporţională cu distanţa. Să se găsească legea de mişcare a punctului M pe

tractrice, presupuuând că la momentul inițial $t = 0$, el este plasat în A fără viteză inițială. Să se calculeze reacțiunea curbei în funcție de ordonata punctului M.

TEORIA FUNCȚIILOR

Probă teoretică

I. 1°. Să se determine funcția analitică a cărei desvoltare în domeniul originii este dată de seria:

$$1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \cdots + \frac{z^n}{(n-1)n} + \cdots$$

2°. Să se dea desvoltarea acestei funcțiuni în domeniul punctului $z = -1$. Să se spună dinainte care este raza cercului de convergență, și apoi ca verificare să se calculeze.

3°. Să se integreze această funcțiune dealungul unui cerc cu centrul în origină.

II. 1°. Se dă seria de funcțiuni analitice:

$$\sum_0^\infty \frac{1}{n^2} \left(\frac{z^2-1}{z^2+1}\right)^n .$$

2°. Să se găsească domeniul (D) în planul variabilei z în care această serie este uniform convergentă.

3°. Să se arate că seria e convergentă pe frontiera domeniului.

Proba practică

Să se arate că avem egalitatea:

$$I = \int_0^1 \frac{Lx}{x^2-1}\,dx = \int_1^\infty \frac{Lx}{x^2-1}\,dx$$

apoi să se calculeze cu ajutorul reziduurilor, și să se deducă de aici suma seriei

$$1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$$

MECANICA RAȚIONALĂ

Partea II-a

Proba teoretică

Se consideră un sistem material greu format din patru bare identice omogene de lungime a, care sunt articulate astfel ca să formeze un romb OABC. Vârful O al rombului este fix, iar vârful opus B este obligat să se miște fără frecare pe verticala descendentă Oz.

Articulaţiile sunt realizate fără frecare.

1°. Să se studieze mişcarea sistemului cu ajutorul teoremelor generale. Să se facă discuţia mişcării.

2°. Să se găsească ecuaţiile mişcării, aplicându-se ecuaţiile lui LAGRANGE.

3°. Să se scrie ecuaţiile canonice ale mişcării şi să se integreze.

4°. Să se aplice teorema lui JACOBI pentru determinarea mişcării.

Proba practică

Un sistem material greu este format dintr'o placă care are forma unui triunghiu isoscel OAB şi o bară BC articulată în B de placă. Punctul O al plăcii este fix şi întreg sistemul se mişcă într'un plan vertical care trece prin O.

Se cere să se studieze micile mişcări ale acestui sistem în vecinătatea poziţiei de echilibru stabil. Se presupune că $AB = BC = 2$ şi că înălţimea OD a triunghiului isoscel OAB este egală cu 3. Se mai presupune că massa M_1 a plăcii este egală cu 1 şi că massa M_2 a barei este egală cu $\sqrt{3}+1$.

ANALIZA MATEMATICĂ

Partea II-a

Proba teoretică

Să se integreze ecuaţia diferenţială

$$x^2\,(3x^2+1)\,y''+2x\,(3x^2+2)\,y'-2\,(3x^2-1)\,y=6x.$$

Proba practică

I. Fie P planul tangent la o suprafaţă S într'un punct M; D intersecţia planului P cu planul xoy; T punctul unde dreapta D taie axa Oy. Să se determine suprafeţele S pentru care dreapta D e perpendiculară pe dreapta TM, pentru orice punct M al suprafeţei.

II. Să se calculeze

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u\,du\,dv}{(a\sin^2 u\,\cos^2 v+b\sin^2 u\,\sin^2 v+c\cos^2 u)^{3/2}}.$$

GEOMETRIE INFINITESIMALĂ

Studiul geometric al cicloidei.

BIBLIOGRAFIE

Bulletin de la Section Scientifique de l'Académie Roumaine. XVI-ème Année No. 5—5. Bucureşti 1933. Observation de l'eclipse totale de soleil du 31 Août 1932, par M. N. Donici. Un théorème équivalent à l'hypotèse du continu, par Waclaw Siepinscki. Sur l'équation de Fredholm dans le domaine complexe, par Radu Badesco.

Bulletin of the American Mathematical Society. Volumul XXXIX. No. 9. Septemvrie 1933. Adunarea de vară din Chicago, de M. H. Ingraham. Tezele de calculul variaţiunilor din 1931—1932, de A. Dresden. Hancock asupra numerelor algebrice, de O. Ore. Sumare de comunicări.

Boletin Matematico. Anul IV. No. 5. Iulie 1933. Buenos Aires. Asupra sistemului Diferenţial al funcţiunilor *theta* şi *sigma*, de A. Blochi. Asupra infăşuratelor, de B. I. Baidaff.

Boletin Matematico Elemental. Anul IV. No. 7. Septemvrie 1933 Buenos Aires.

Idem. Supliment informativ. Anul I. No. 6. Septemvrie 1933.

Bulletin de Mathématiques et de Physiques pures et appliquées de l'Ecole Polytechnique „Roi Carol II". IV-ème Année. No. 1. Fasc. 10. 1933. Bucureşti. Sur un théorème de M. Pompeiu, par N. Botea. Sur une manière intrinsèque d'envisager la distribution des vitesses dans un solide en mouvements, par R. Woinarosky. Sur la comparaison de deux séries de mesure, par C. C. Teodoresco. Champ magnétique d'un circuit électrique infiniment petit, par N. Vasilesco Karpen. Sur le coefficient de déformation d'une fonction non sinusoïdale, par E. Abason. Nouvelles études sur le récepteur téléphonique, par M. Marinesco. Fontes austénitiques au nickel-manganèse-silicium, par T. T. Negresco et I. C. Stefanesco.

Journal de Mathematiques elementaires. publié par H. Vuibert. Anul 58. No. 3. Noemvrie 1933. Paris.

Idem. No. 4. Noemvrie 1933. Paris.

Sphinx. Anul III. No. 11. Noemvrie 1933. Bruxelles. Marile numere prime. Parodoxul economic al lui Edgeworth, de S. V.

Idem. No. 12. Decemvrie 1933. Patrate perfecte şi numere prime, de V. Thébault.

Ad. Mineur. *Aritmétique. II. Fractions. III. Les fractions décimales et les nombres décimaux. IV. Les nombres irrationnels. V. Les problèmes et le système métrique.* Bruxelles 1933. Librairie classique J. Van. Dijl. 38 et 38-a Rue des Etudiants. Bruxelles.

Despre partea I a acestei Aritmetici am vorbit în volumul XXXIV, pag. 344 al acestei reviste. Coprinsul volumului actual e arătat în titlul dat mai sus. La studiul fracţiilor găsim şi tratarea elementară a unor neegalităţi, proprietăţi comutative, distributive, fracţii generalizate, câturi apropiate, rapoarte şi proporţii. La fracţiuni zecimale se dau şi operaţiunile prescurtate. Numerele iraţionale sunt tratate pe larg. Se dau şi transformarea fracţiilor şi calculul erorilor absolute şi relative. In ultima parte se tratează măsurile, sistemul metric, reguli de trei, de asociaţiuni, de amestecuri, aliage, apoi dobânzi, sconturi, scadenţe comune şi medii. Volumul se termină cu *Note* şi *Adaose*. Aci găsim tratate *numerele sistematice*, adică cele de forma N/B^n, în care N e un întreg oarecare şi B baza sistemului de numeraţie în care este scris N; teoria abstractă a fracţiilor ordinare considerate ca perechi de numere complexe. După aceasta urmează o colecţiune de chestiuni propuse. Volumul coprinde în total 167 pagini.

Ca şi în primul volum, chestiunile sunt tratate elementar, pe baza primelor cunoştinţe de algebră. Cartea poate fi folositoare liceenilor noştri care vor să-şi desvolte şi să-şi complecteze slabele cunoştinţe care se dau azi la noi în studiul aritmeticii, în primele trei clase liceale, şi de acea le-o recomandăm cu insistenţă.

I. Ionescu.

M. Biernacki. *Sur les zéros des fonctions holomorphes.* (Extras din *Mathematica*). Cluj 1930.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XIII. No. 9. Noemvrie 1933. O problemă de divizibilitate, de Col. Gh. Buicliu. O nouă teorie a întinderii universului, de Ghiţescu Spiridon.

P. Sergescu. *Quelques points de la théorie des équations algébriques.* (Extras din Actele Congresului Internaţional al Matematicienilor ţinut la Zürich în 1932). Zürich 1933.

P. Sergescu. *Quelques propriétées des polynomes.* (Extras din *Comptes rendus des séances de la Société des sciences et de letres de Varsovie* XXIV. 1931 Classe III). Varşovia 1932.

P. Sergescu. *Histoire des sciences mathématiques et physiques en Roumanie.* (Extras din *Bulletin du Comité international des sciences historiques*). Paris 1933.

P. Sergescu. *Spiritul cel nou în legea învăţământului Universitar.* Bucureşti 1932.

P. Sergescu. *Istoria calculului numeric.* Rezumatul lecţiunii făcute la Universitatea populară „N. Iorga" din Vălenii de Munte la 16 Iulie 1932. Vălenii de Munte 1933. (Extras din „*Cuget clar*").

P. Sergescu. *Les sciences mathématiques.* (Extras din *Tableau du XX siècle en France*). Paris. Les Editions Denoël et Steele. Rue Amélie 19.

P. Sergescu. *O schiță de istorie a științelor matematice.* (Extras din *Cuget clar*). Vălenii de Munte 1933.

Miron Nicolescu. *Sur les fonctions mesurables.* (Extras din *Bulletin des sciences mathématiques*). Paris 1933.

Miron Nicolescu. *Fonction de Green d'ordre p.* (Extras din *Buletinul Facultății de Științe din Cernăuți*). Cernăuți 1932.

Miron Nicolescu. *Remarques sur un théorème de moyenne de* M. Luigi Amoroso. (Extras din *Bulletin de la classe des sciences de l'Academie royale de Belgique*). Bruxelles 1932.

Miron Nicolescu. *Sur une classe d'équations fonctionelles.* (Extras din *Bulletin des sciences mathématiques*). Paris 1932.

Miron Nicolescu. *Sur la décomposition des polynomes différentiels en facteurs de premier ordre.* (Extras din *Mathematische Zeitschrift*). Berlin 1932.

Miron Nicolescu. *Sur les fonctions de n variables, harmoniques d'ordre p.* (Extras din *Bulletin de la Société mathématique de France*). Paris.

Miron Nicolescu. *Sur quelques propriétés élémentaires de la mesure au sens de* Jordan. (Extras din *Buletinul Facultății de Științe din Cernăuți*). Cernăuți 1932.

Miron Nicolescu. *Sur quelques points de géométrie finie directe.* (Extras din *Bulletin de la classe des sciences de l'Académie de Belgique*). Bruxelles 1933.

Miron Nicolescu. *Sur quelques points de géométrie finie directe.* (Extras din *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences* de Paris). Paris 1933.

Miron Nicolescu. *Extension d'un théorème de* M. F. Riesz *aux fonctions harmoniques d'ordre p.* (Extras din *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences* de Paris). Paris 1932.

Miron Nicolescu. *Sur le problème de* Riquier. (Extras din *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences* de Paris). Paris 1932.

Miron Nicolescu. *Sur les harmoniques et sous-harmoniques d'ordre p.* (Extras din *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences* de Paris). Paris 1931.

G. Vranceanu. *Sur l'indépendance des secondes formes fondamentales d'une* V_m. (Extras din *Buletinul Societății de Științe din Cernăuți*). Cernăuți 1929.

G. Vranceanu. *Connexions affines liées aux systèmes de Pfaff.* (Extras din *Buletinul Facultății de Științe din Cernăuți*). Cernăuți 1932.

G. Vranceanu. *Studio geometrico dei sistemi anolomoni.* (Extras din *Annali di Matematica*). Bologna 1929.

G. VRANCEANU. *Sulla stabilita del rotolamento di un disco.* (Extras din *Rendinconti della R. Accademia nazionale dei Lincei*). Roma 1924.

G. VRANCEANU. *Sopra le ecuazioni del moto di un sistema anolnomo.* (Extras din *Rendinconti della R. Accademia nazionale dei Lincei*). Roma 1926.

G. VRANCEANU. *Sur la stabilité trigonométrique de l'équilibre dans la dynamique.* (Extras din *Rendinconti della R. Accademia dei Lincei*). Roma 1927.

G. VRANCEANU. *Sopra le ecuazioni del problema dei due corpi di masse variabili.* (Extras din *Rendinconti della R. Accademia dei Lincei*). Roma 1928.

G. VRANCEANU. *Sulle condizioni di rigidità di una* V_m *in un* S_1S_n. (Extras din *Rendinconti della R. Accademia nazionale dei Lincei*), Roma 1930.

G. VRANCEANU. *Sopra i sistemi anolomoni a legami dipendenti dal tempo.* (Extras din *Rendinconti della R. Accademia dei Lincei*). Roma 1931.

G. VRANCEANU. *Sopra l'interpretazione geometrica dei sistemi mecanici.* (Extras din *Rendinconti della R. Accademia dei Lincei*). Roma 1933

G. VRANCEANU. *Sur les espaces de Riemann ayant leurs coefficient de rotation constants.* (Extras din *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* de Paris). Paris 1929.

G. VRANCEANU. *Sur quelques théorèmes relatifs aux variétés non holonomes et aux systèmes de formes de Pfaff.* (Extras din *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* de Paris). Paris 1931.

G. VRANCEANU. *Sur le nombre des différentielles d'un système de Pfaff.* (Extras din *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* de Paris). Paris 1933.

G. VRANCEANU. *Sur le groupe d'Applicabilité des variétés non holonomes.* (Extras din *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* de Paris). Paris 1930.

MARCEL GEORGESCU. *Asupra necesității studiului istoriei tehnice în Școlile Politehnice.* București 1932.

CERERI

230. Cine îmi poate procura și cu ce preț, cursul de algebră predat de D-l profesor V. TEODOREANU la liceul militar Iași?

SB.-LOC. PANAITE N. THEODOR.
(Școala de aplicație a Artileriei Timișoara).

231. Care este numărul de zile ce poate trece dela primirea *Gazetei Matematice* până la trimiterea problemelor la Gazetă?

GH. CARDARA.

Răspuns. Nu există un număr determinat în această privinţă. Problemele se publică când s'au primit soluţiuni bune. Cine vrea să nu piarză menţiunea sau reproducerea soluţiunii trimise să se grăbească să le trimită mai de grabă, mai ales pe cele uşoare, fapt care se poate constata uşor cercetând pagina treia a copertei.

I. I.

232. Dăm aci adresa la care se poate face abonamentul la *Journal de mathématiques élémentaires* publié par H. VUIBERT pe care ne-a cerut-o unii corespondenţi:

Librairie Vuibert. Boulevard St.-Germain 63. Paris 5-e. Abonamentul este de 25 franci francezi anual pentru străinătate. Toate abonamentele încep dela 1 Octomvrie, la orice epocă din cursul anului s'ar trimite suma.

DIVERSE

Societatea română de Ştiinţe, Secţiunea Matematică, a ţinut şedinţă în seara zilei de 6 Noemvrie când a făcut un referat D-l O. ONICESCU asupra bazelor calculului probabilităţilor, şi au făcut comunicări D-nii G. ŢIŢEICA şi M. GHERMĂNESCU.

In dimineaţa zilei de 26 Noemvrie, Societatea Matematică a ţinut o şedinţă pentru sărbătorirea D-lor Profesori D. POMPEIU şi G. ŢIŢEICA, cu ocaziunea împlinirii a 60 ani etate în cursul lunei Octomvrie. La această serbare patronată de M. S. REGELE, au fost de faţă D-l Ministru al Instrucţiunii publice, D-l Preşedinte al Academii române, D-l Rector al Universităţii din Bucureşti, D-l Rector al Şcoalei Politehnice din Bucureşti, D-l Decan al Facultăţii de Ştiinţe din Bucureşti, Delegaţi ai Facultăţilor de Ştiinţe din Iaşi, Cluj şi Cernăuţi, şi ai Şcoalei Politehnice din Timişoara, delegaţi ai Societăţilor ştiinţifice, colegi, foşti şi actuali elevi ai sărbătoriţilor, etc.

Seria cuvântărilor a deschis-o D-l V. VÂLCOVICI, preşedintele societăţii matematice, după care a urmat representanţii Instituţiunilor de cultură arătate mai sus, cărora le-a răspuns la urmă cei doi sărbătoriţi. D-l Ministru al Instrucţiunii publice a înmânat sărbătoriţilor decoraţiuni din partea M. S. REGELUI, iar D-l V. VÂLCOVICI şi D-l Rector al Şcoalei Politehnice, câte un volum omagial al căror conţinut îl vom da la Bibliografie după primirea lor.

Din partea *Gazetei Matematice* D-l C. ORĂŞEANU, membru al Delegaţiunii, a ţinut o lungă cuvântare în care a preaslăvit opera sărbătoriţilor.

In seara zilei de 27 Noemvrie a avut loc o masă intimă, la care a participat peste 120 persoane.

O dare de seamă mai amănunţită a acestei sărbătoriri va apare în revista *Natura.*

In ziua de 27 Noemvrie s'a constituit la Tribunalul Ilfov *Asociaţiunea Profesorilor de Matematici din România*, care va urmări ridicarea învăţământului matematic in şcolile secundare şi profesionale, perfecţionarea metodelor de învăţământ, pentru a corespunde scopului lor educativ şi necesităţilor moderne ale învăţământului superior, precum şi luminarea publicului asupra necesităţii propăşirii matematicilor în ţara noastră.

Până la viitoarea Adunare generală al fost ales preşedinte al Asociaţiei D-nul V. Vâlcovici. S'au proclamat membri de onoare D-nii: A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, D. Pompeiu şi G. Ţiţeica. Sediul Asociaţiei este la Liceul „Spiru Haret" din Bucureşti.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2081. A_1, B_1, C_1 *fiind picioarele înălţimilor unui triunghiu oarecare* ABC, A_2, B_2, C_2 *punctele de intersecţie a perechilor de drepte* (B_1C_1, BC), (C_1A_1, CA), (A_1B_1, AB) *şi* M, N, P *mijloacele segmentelor* $\overline{B_1C_1}$, $\overline{C_1A_1}$, $\overline{A_1B_1}$; *să se demonstreze că cercurile* AMA_2, BNB_2, CPC_2 *trec prin acelaşi punct.*

I. Banciu.

Soluţiune dată de D-l N. N. Mihăileanu (Student, Bucureşti).

Fie A' mijlocul lui $\overline{BC}$; K proiecţiunea lui A pe B_1C_1, H ortocentrul triunghiului ABC şi L intersecţiunea dreptelor A_2H, AA'. Triunghiurile AB_1C_1 şi ACB sunt asemenea, iar AK şi AM sunt respectiv omoloagele dreptelor AA_1 şi AA'; urmează că

$$\sphericalangle A'AA_1 = \sphericalangle MAK,$$

deci, scăzând unghiul comun $\sphericalangle MAA'$, avem:

$$\sphericalangle HAM = \sphericalangle A_1AM = \sphericalangle A'AK = \sphericalangle LAK.$$

Dar A_2H fiind polara punctului A în raport cu cercul BC_1B_1C de diametru BC, este perpendiculară pe dreapta ce uneşte punctul A cu centrul A' al cercului, adică $\sphericalangle A_2LA$ este un unghiu drept. Rezultă imediat că

$$\sphericalangle LA_2K = \sphericalangle LAK = \sphericalangle HAM,$$

deci punctele A, M, H, A_2 sunt pe acelaşi cerc.

Analog, arătăm că (B, N, H, B_2) de o parte şi (C_2, P, H, C) de alta sunt pe câte un cerc, de unde rezultă proprietatea din enunţ.

Observare. Domnul N. N. MIHĂILEANU a dat în afară de soluțiunea elementară, o soluțiune cu ajutorul geometriei triunghiului, alta cu ajutorul geometriei analitice și alta cu ajutorul relațiunilor trigonometrice dintr'un triunghiu; toate bune.

O. N. Ț.

PROBLEMA 2386. *Se consideră un cerc* O *și două diametre perpendiculare* AB, CD. *Fie* M *un punct oarecare luat pe cerc. Se consideră cercurile de centru* A *și rază* AM, *de centru* B *și rază* BM. *Se proiectează* C *și* D *în* C' *și* D' *pe una din tangentele comune la aceste două cercuri.*

Să se arate că $\overline{OC'} = \overline{OD'} = R\sqrt{2}$, R *fiind raza cercului* O.

E. N. BARISIEN.

Fie A' și B' punctele de contact ale tangentei comune A'B' la cercurile A și B arătate în enunț; O' proiecțiunea lui O pe A'B'; M_1 și N_1 punctele unde AA' și CC' taie respectiv cercul O. Segmentele $\overline{O'C'}$ și $\overline{O'D'}$ sunt egale deoarece O este mijlocul segmentului $\overline{CD}$, pe care l'am proiectat. BM_1 fiind perpendicular pe AA' este paralel cu A'B'; razele punctelor de contact AA' și BB', fiind perpendiculare pe tangenta AA', segmentele BM_1 și A'B' sunt egale.

Triunghiurile dreptunghiuri AM_1B și CN_1D (având $\overline{AB} = \overline{CD} = 2R$ și $\sphericalangle DCN_1 = \sphericalangle ABM_1$) sunt egale, deci:

$$\overline{DN_1} = \overline{AM_1} = |\overline{AA'} - \overline{BB'}| = |\overline{AM} - \overline{BM}|$$

și ca urmare:

$$\overline{O'D'} = \overline{O'C'} = \frac{\overline{AM} - \overline{BM}}{2}.$$

De altă parte observăm că

$$\overline{OO'} = \frac{\overline{AA'} + \overline{BB'}}{2} = \frac{\overline{AM} + \overline{BM}}{2}.$$

Considerând triunghiurile dreptunghiuri OO'D' și AMB avem

$$\overline{OD'}^2 = \overline{OO'}^2 + \overline{O'D'}^2 = \tfrac{1}{2}(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2) = \tfrac{1}{2}\overline{AB}^2 = 2R^2,$$

deci

$$\overline{OC'} = \overline{OD'} = R\sqrt{2}.$$

Soluţiunea II-a. T fiind punctul unde A'B' taie pe AB, dacă descriem cercurile de diametre CT şi DT, observăm că OC' şi OD' sunt egale, arcele întinse de ele măsurând acelaşi unghiu. Fie O_1 şi I astfel că:

$$\overline{CO_1} = \overline{O_1T} = \tfrac{1}{2}\overline{CT} \quad \text{şi} \quad \overline{OI} = \overline{IC'} = \tfrac{1}{2}\overline{OC'}.$$

Avem imediat:

$$\overline{OI} = \tfrac{1}{2}\overline{OC'} = \overline{OO_1}\sin\widehat{OO_1I} = \tfrac{1}{2}\overline{CT}\sin\widehat{OTC'} = \tfrac{1}{2}\overline{CT}\sin\widehat{ATA'};$$

deci

$$\overline{OC'} = \overline{CT}\sin\widehat{ATA'} = \overline{CT}\cdot\frac{\overline{AA'}}{\overline{AT}} = \overline{CT}\cdot\frac{\overline{AM}}{\overline{AT}} = \overline{AM}\cdot\frac{\overline{CT}}{\overline{AT}}.$$

Unind punctul M al cercului A cu centrul de similitudine T al cercurilor A şi B, dreapta TM taie pe B a doua oară în P, astfel că BP este paralelă cu AM, deci perpendiculară pe BP, şi ca urmare $\sphericalangle BPM = \sphericalangle BMP = \frac{\pi}{4}$ şi cum şi $\sphericalangle CMA = \frac{\pi}{4}$, punctele C, M, T sunt coliniare, deci

$$\sphericalangle ACT = \sphericalangle ACM = \pi - \sphericalangle ABM.$$

Astfel:

$$\frac{\overline{CT}}{\overline{AT}} = \frac{\sin\widehat{CAB}}{\sin\widehat{ABM}} = \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\widehat{ABM}},$$

dar $\overline{AM} = 2R\sin\widehat{ABM}$, deci:

$$\overline{OD'} = \overline{OC'} = 2R\sin\widehat{ABM}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\widehat{ABM}} = R\sqrt{2}.$$

Au rezolvat problema cu ajutorul relaţiunilor trigonometrice din triunghiul dreptunghiu, Domnii: Ion C. Vasiliu (elev inginer), Ad. C. Gheorghiu (student, Bucureşti), Panaite N. Theodor (cl. VII Lic. Militar, Iaşi).

Observarea I. Domnul N. N MIHĂILEANU a dat o schiță de soluțiune bună, care corespunde cu soluțiunea a doua.

Rezolvitorii din alte timpuri au fost anunțați pe copertele numerelor din G. M. din acele timpuri.

Observarea II. Proprietatea dată poate fi enunțată ca loc geometric observând că oricare ar fi poziținea punctului M pe cercul O, distanța punctelor D' și C' la O este constantă, fiind egală cu latura pătratului inscris în cercul O.

O. N. T.

PROBLEMA 4033. *Să se găsească numerele* A *și* B *întregi, știind că produsul lor este de* k *ori* (k *întreg*) *mai mare decât suma lor. Caz particular:* $k = 2$.

MIRON NICOLESCU.

Soluție dată de D-l I. AURIAN. Problema revine la rezolvarea în numere întregi a ecuației

$$AB = k\,(A + B).$$

Rezolvând această ecuație în raport cu B, obținem:

$$B = \frac{kA}{A-k} = k + \frac{k^2}{A-k}\cdot$$

Fie d unul oarecare dintre divizorii lui k^2. Va trebui să avem

$$A = k + d, \tag{1}$$

de unde

$$B = k + \frac{k^2}{d}\cdot \tag{2}$$

Relațiile (1) și (2) constituesc soluția problemei.

Caz particular $k = 2$. — Divizorii lui 4 sunt ± 1, ± 2, ± 4. Inlocuind, în (1) și (2), pe d prin aceste valori, obținem soluțiile:

$$A = 0\ ,\ B = 0;$$
$$A = 3\ ,\ B = 6;$$
$$A = 1\ ,\ B = -2;$$
$$A = 4\ ,\ B = 4;$$
$$A = 6\ ,\ B = 3;$$
$$A = -2\ ,\ B = 1.$$

Observări. 1°. Soluția $A = B = 0$ este evidentă *a priori*, oricare ar fi, de altfel, valoarea lui k. Ea se obține din relațiile (1) și (2), luând $d = -k$.

Dacă luăm, în aceleași relații, $d = k$, obținem soluția

$$A = B = 2k,$$

singura soluție trimisă de unii corespondenți.

2°. D-l I. C. Șova-Grigoreni ia în considerare numai soluțiile pozitive și numai divizorii lui k. Soluția D-lui George Roșca, impecabilă ca prezentare, este incomplectă, deși cuprinde o discuțiune de o lungime mult prea mare (patru pagini!) pentru ordinul de dificultate al problemei.

M. N.

PROBLEMA 4259. *Să se stabilească identitatea:*

$$\sin^2(a+b+c) - [\sin(a+b)\cos c + \cos a \cos b \cos c][\sin(a+b+c) - \sin a \sin b \sin c] = \sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c.$$

N. C.

Soluție dată de D-ra Dorina Fabius (Cluj).

Știm că

$$\sin(a+b+c) = \sin[(a+b)+c] = \sin(a+b)\cos c + \cos(a+b)\sin c$$

$$\sin(a+b+c) = \sin(a+b)\cos c + (\cos a \cos b - \sin a \sin b)\sin c$$

$$\sin(a+b+c) = \sin(a+b)\cos c + \cos a \cos b \sin c - \sin a \sin b \sin c.$$

Deci

$$\sin(a+b)\cos c + \cos a \cos b \cos c = \sin(a+b+c) + \sin a \sin b \sin c.$$

Inlocuim în relația dată:

$$\sin^2(a+b+c) - [\sin(a+b+c) + \sin a \sin b \sin c][\sin(a+b+c) - \sin a \sin b \sin c]$$

$$= \sin^2(a+b+c) - [\sin^2(a+b+c) - \sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c]$$

$$= \sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c.$$

Deci identitatea este stabilită.

Soluţii identice dela D-rele: MARIA DRĂGUŢ şi ELIZA MOISE şi D-nii: N. P. BORZA, WILH. CSEKE şi G. SILAŞ (toţi Cluj); C. IVĂNESCU, EM. MEREUŢĂ, GALLILED FERRARI şi D. D. MAVRODIN. O generalizare fără importanţă dela D-l I. CURCHI. Acestui exerciţiu i-au căzut victimă D-nii: C. CRISTOPOL şi DAN D. NICOLESCU (lic. mil. N. F.) cari trimit soluţii cu calcule îndesate pe trei pagini.

N. C.

PROBLEMA 4268. *Să se demonstreze identitatea:*

$$\frac{\sin^2 2p - \sin^2 2q}{\sin^2 p - \sin^2 q} = 4 \cos (p + q) \cdot \cos (p - q).$$

ALEXANDRU NICULESCU.

I. *Soluţie* dată de D-l CEZAR IVĂNESCU (student, Bârlad).

Ţinând seamă de identitatea:

$$\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta \equiv \sin (\alpha + \beta) \cdot \sin (\alpha - \beta),$$

prima parte a identităţii propuse se poate scrie succesiv:

$$\frac{\sin^2 2p - \sin^2 2q}{\sin^2 p - \sin^2 q} = \frac{\sin 2(p + q) \cdot \sin 2(p - q)}{\sin (p + q) \cdot \sin (p - q)}$$

$$= \frac{4 \sin (p+q) \cdot \cos (p+q) \cdot \sin (p-q) \cdot \cos (p-q)}{\sin (p + q) \cdot \sin (p - q)}$$

$$= 4 \cos (p + q) \cdot \cos (p - q).$$

Q. e. d.

II. *Soluţie* dată de D-şoarele: CORNELIA NANEŞ (Şc. Centrală Buc.), DORINA FABIUS şi de D-nii: M. I. ANASTASESCU (Bac. Târgovişte), APOSTOLESCU EMIL (Lic. Militar, Iaşi), BĂDESCU EM. A. (S.-Lt. R. 2 Art. Grea), CSEKE VILHELM (student, Cluj), CHIRIŢĂ M. (Lic. Militar, Craiova), GHIOCEL V. (Bac. Giurgiu), IVĂNESCU CEZAR (student, Bârlad), MĂNESCU MIRCEA (cl. VII Lic. M. Eminescu, Buc.), MARGULIUS M. (Buc.), MATEIU ALEX. (Şc. Sup. Arte şi Meserii, Buc.), MAZILU P. (Bac. Lic. «Internat», Iaşi), MEREUŢĂ EM. (student, Buc.), LEONTE M. NEGREA (Brăila), PETRESCU C. ION, SAGER N. IANCU, V. CEAUŞESCU (Lic. Militar, Iaşi), B. FERDERBER (Lic. Militar N. Filipescu), PAPARIZU IOAN (Elev plot. cl. 7-a, Lic.

Militar N. Filipescu), Gh. I. Stănculescu (cl. 7-a Lic. Militar Iaşi), Ilie Zaharescu (Lic. Militar Iaşi) şi Tica P. M. Gall (S.-Lt. Şc. aplic. Art.).

Descompunem diferenţele de patrate în factori şi aplicăm formulele calculabile prin logaritmi; vom obţine succesiv :

$$\frac{\sin^2 2p - \sin^2 2q}{\sin^2 p - \sin^2 q} = \frac{(\sin 2p + \sin 2q) \cdot (\sin 2p - \sin 2q)}{(\sin p + \sin q) \cdot (\sin p - \sin q)}$$

$$= \frac{4\sin(p+q) \cdot \cos(p-q) \cdot \sin(p-q) \cdot \cos(p+q)}{4\sin\frac{p+q}{2} \cdot \cos\frac{p-q}{2} \cdot \sin\frac{p-q}{2} \cdot \cos\frac{p+q}{2}}$$

$$= 4\cos(p+q) \cdot \cos(p-q).$$

Q. e. d.

III. D-nii: Sub.-Lţi C. N. Avram şi I. C. Parepeanu (din geniu), Mavrodin D-tru (cl. VII Lic. M. Eminescu, Buc.), Silaş George (stud. Cluj), Ziff Martin au dat soluţiuni mai lungi, descompunând ambele părţi ale identităţii şi arătând că fiecare se reduce la expresia: $(1 - \sin^2 p - \sin^2 q)$.

Observaţie. Datorăm D-lui C. Ivănescu (student Bârlad) următoarele interesante identităţi, deduceri şi extinderi ale celei propuse:

1) $$\frac{\cos^2 2q - \cos^2 2p}{\cos^2 q - \cos^2 p} = 4\cos(p+q) \cdot \cos(p-q);$$

care se obţine înlocuind sinusurile în funcţie de cosinusuri.

2) Înlocuind cantităţile p şi q prin np şi nq obţinem o formă mai generală a identităţii propuse:

$$E = \frac{\sin^2 2np - \sin^2 2nq}{\sin^2 np - \sin^2 nq} = 4\cos n(p+q)\cos n(p-q)$$

de unde rezultă :

$$\lim_{n=0} E = 4.$$

3) Dacă în identitatea propusă facem succesiv

$p = 2a$, $q = a$; $p = 3a$, $q = 2a$; . . . şi sumăm, obţinem :

$$\sum_{1}^{n} \frac{\sin^2 2(k+1)a - \sin^2 2ka}{\sin^2 (k+1)a - \sin^2 ka} = 4\cot a \cdot \cos(n+2)a \cdot \sin na.$$

A. N.

PROBLEMA 4295. *Să se demonstreze identitatea:*

$$\frac{x^2-1}{x^2+1}+\frac{y^2-1}{y^2+1}+\frac{z^2-1}{z^2+1}+\frac{x^2-1}{x^2+1}\cdot\frac{y^2-1}{y^2+1}\cdot\frac{z^2-1}{z^2+1}$$

$$=\frac{4(x^2y^2z^2-1)}{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)}.$$

GH. TH. GHEORGHIU.

Soluţie dată de D-nii: GH. CARDARA, V. CEAUŞESCU, CSEKE V., DOBRESCU P., M. ELEFTERESCU, S. H. HORNSTEIN, O. D. KLINGER, M. MARGULIUS, M. MĂNESCU, D. MAVRODIN, D-RA M. E. MOSTECHY, P. C. MAZILU, MIRCEA-LEONTE A. NEGREA, I. PAREPEANU, I. M. POPESCU, M. I. PREDOIESCU, T. M. PREDOIESCU, S.-LT. TICA P. M. GALL şi GH. I. SPIRU.

Insemnând primul membru cu E, avem:

$$E=\frac{\Sigma(x^2-1)(y^2+1)(z^2+1)+(x^2-1)(y^2-1)(z^2-1)}{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)}$$

$$=\frac{\Sigma(x^2-1)(y^2z^2+y^2+z^2+1)+(x^2-1)(y^2-1)(z^2-1)}{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)}$$

$$=\frac{\Sigma[x^2y^2z^2+(x^2y^2+z^2x^2-y^2z^2)+(x^2-y^2-z^2)-1]+(x^2-1)(y^2-1)(z^2-1)}{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)}$$

$$=\frac{3x^2y^2z^2+(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)-(x^2+y^2+z^2)-3+(x^2-1)(y^2-1)(z^2-1)}{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)}$$

şi cum:

$$(x^2-1)(y^2-1)(z^2-1)=x^2y^2z^2-(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)+(x^2+y^2+z^2)-1$$

rezultă că:

$$E=\frac{3x^2y^2z^2-3+(x^2y^2z^2-1)}{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)}=\frac{4(x^2y^2z^2-1)}{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)}$$

adică tocmai membrul al doilea.

Observări. 1) Când am propus problema 4295 i-am adăogat în enunţ condiţia: (1) $x+y+z=0$. Cauza a fost că eu am stabilit identitatea din enunţ pe o cale cu totul alta decât cea dată aci şi unde am folosit această condiţie. De altfel toţi corespondenţii care au rezolvat problema au remarcat că nu avem nevoie de condiţia suplimentară (1).

2) Soluţie parţială dela D-l G. SILAŞ.

*EXERCIŢII

9. Să se calculeze suma :

$$S = \sum_{0}^{\infty} \frac{a^{2n}}{(2n+2)(2n+1).n!} .$$

HARALAMB P. IONESCU-BISS.

R. Dacă însemn cu u_n termenul general al dezvoltărei :

$$e^{a^2} = 1 + \frac{a^2}{1!} + \ldots + \frac{a^{2n+4}}{(n+2)!} + \ldots$$

suma propusă devine :

$$2a^4 S = \sum_{0}^{\infty} \frac{n+2}{2n+1} u_n$$

de unde deduc că

$$S = \frac{\theta}{a^4}(e^{a^2} - 1 - a^2) \text{ unde } \tfrac{1}{4} \leqslant \theta \leqslant 1.$$

10. Să se stabilească relaţia :

$$i_a \cdot i_b \cdot i_c = 4p\, s_1$$

i_a , i_b , i_c fiind lungimile bisectoarelor interioare, s_1 suprafaţa triunghiului format din unirea picioarelor bisectoarelor interioare iar p semi-perimetrul triunghiului ABC.

S.-LT. C. V. COSTĂCHESCU.

R. Se va ţine seama de relaţiile cunoscute (vezi Ex. de Geom. F. G. M. pag. 285) :

$$i_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{p(p-a)bc}, \text{ etc... şi } \frac{s}{s_1} = \frac{\pi(a+b)}{2abc} .$$

11. Să se determine pe cateta AB a triunghiului OAB dreptunghic în A, un punct B_1, aşa fel ca :

$$AB = 2\frac{AB_1 \cdot OA}{\overline{OA}^2 - \overline{AB_1}^2} .$$

GH. VASILIU.

R. Relaţia dată se poate scrie şi sub forma:

$$\frac{AB}{OA} = \frac{2\,\frac{AB_1}{OA}}{1-\left(\frac{AB_1}{OA}\right)^2} = \operatorname{tg}\widehat{AOB}$$

şi ţinând seama de formula care exprimă tangenta unui unghiu în funcţie de tangenta unghiului pe jumătate deduc că B_1 este piciorul bisectoarei unghiului cu vârful în O pe cateta AB.

12. In triunghiul ABC, fie A', B', C' picioarele înălţimilor, B_1, C_1 proecţiile vârfurilor B, C pe B'C'. Presupunând B', C' fixe, iar B_1C_1 de lungime l constantă, se cere locul lui A'.

N. N. Mihăileanu.

R. $A'B' + A'C' = R\,[\sin 2B + \sin 2C] = 2R \sin A \cos(B - C) =$

$$BC \cdot \cos\left(\overline{BC}, \overline{B'C'}\right) = B_1C_1 = l.$$

Locul lui A' este elipsa cu focarele B', C' şi axa mare l.

13. Să se arate că avem

$$\frac{(\cos x)^{(n)} + (\sin x)^{(n)}}{\sin\left[x + \frac{2n+1}{4}\pi\right]} = \sqrt{2}$$

unde am notat prin $(\cos x)^{(n)}$ şi $(\sin x)^{(n)}$ derivatele de ordinul n ale funcţiunilor $\cos x$ şi $\sin x$.

Sub.-Loc. I. C. Savin.

R. Avem

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{şi} \quad (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

aşa dar prima parte a expresiei din enunţ se poate scrie succesiv

$$\frac{\cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left[x + \frac{2n+1}{4}\pi\right]} = \frac{\sin\left[x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right] + \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left[x + \frac{2n+1}{4}\pi\right]}$$

$$= \frac{2\sin\left[x + \frac{2n+1}{4}\pi\right]\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\left[x + \frac{2n+1}{4}\pi\right]} = 2\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}.$$

PROBLEME PROPUSE

4321. Să se găsească cubul de cinci cifre *dmszu* în care numerele de câte două cifre *dm* şi *zu* sunt consecutive.

COL. GH. BUICLIU.

4322. Să se demonstreze că răsturnatul unui număr întreg nu poate fi egal cu jumătatea acelui număr.

U. M. FLORESCU.

*4323. De care din bisectoarele BB' şi CC' ale unui triunghiu ABC este mai aproape vârful A?

I. IONESCU.

4324. Bisectoarele interioare ale unui triunghiu ABC tae cercul circumscris triunghiului în A_1, B_1, C_1 şi fie:

$$C_2 \equiv (CC_1 \ , \ A_1B_1) \ , \ B_2 \equiv (BB_1 \ , \ A_1C_1) \text{ şi } A_2 \equiv (AA_1 \ , \ B_1C_1).$$

Să se demonstreze că triunghiul $A_2B_2C_2$ este egal cu complementarul triunghiului ABC.

GH. VASILIU.

*4325. Să se găsească condiţiunile necesare şi suficiente pentru ca punctul lui FEUERBACH să se găsească pe o bisectoare, sau pe o înălţime sau pe o simediană a unui triunghiu.

V. THÉBAULT.

4326. Se dau două drepte fixe şi două direcţii oarecare în plan.

Drepte paralele cu aceste direcţii formează cu dreptele fixe, patrulatere oarecare.

Se cere locul geometric al punctelor cari divid într'un acelaş raport, dreptele lui GAUSS-NEWTON ale patrulaterelor formate.

Dreapta lui GAUSS-NEWTON uneşte mijloacele diagonalelor.

AL. A. ROŞU.

4327. Notaţiunile fiind cele obişnuite să se demonstreze identitatea :

$$\frac{(r_a - r_b)^3 + (r_b - r_c)^3 + (r_c - r_a)^3}{(h_b - h_a)^3 + (h_c - h_b)^3 + (h_a - h_c)^3} = 2\frac{R^2}{r^2}.$$

SUB-LT. I. C. SAVIN.

*4328. α, β, γ fiind arce oarecari, există relaţia :

$$\frac{1 + \cos 4\alpha + \cos 4\beta + \cos 4\gamma - 4\cos 2\alpha \cos 2\beta \cos 2\gamma}{1 + \cos 4\alpha + \cos 4\beta + \cos 4\gamma + 4\cos 2\alpha \cos 2\beta \cos 2\gamma} =$$

$$= \operatorname{tg}(\alpha + \beta + \gamma) \operatorname{tg}(\alpha - \beta - \gamma) \operatorname{tg}(\beta - \gamma - \alpha) \operatorname{tg}(\gamma - \alpha - \beta).$$

C. IONESCU-BUJOR.

4329. Să se calculeze câtul şi restul împărţirii polinomului

$$x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12$$

prin $(x - 4)^2$, cu ajutorul rădăcinilor polinomului, fără să se facă împărţirea.

D. GEORGESCU-PITEŞTI.

4330. Dintr'un punct al sferei O_1 se descrie sfera O_2. Sfera O_3 are centrul pe sfera O_2 şi trece prin centrul sferei O_1. Se cere invelitoarea planului radical al sferelor O_1 şi O_3, când centrul sferei O_3 descrie sfera O_2.

ION S. ANTONIU.

Rectificări. 1°. La problema 3368 (Vol. XXXI, p. 160) în partea întâia a egalităţii se va ceti $(-1)^{p+i}$ în loc de $(-1)^{p+i-1}$.

2°. La problema 4283 (Vol. XXXVIII, p. 479) în rândul al patrulea se va ceti *oricare ar fi* $N > 6$ în loc de *oricare ar fi* N.

„SPHINX“

REVUE MENSUELLE DES QUESTIONS RÉCRÉATIVES

FONDÉE EN 1931

REVUE UNIQUE DANS SON GENRE

DANS LE MONDE ENTIER

Abonnements 1 an: Belgique, 30 fr.; France 25 fr.
Etranger, 7 belgas

ADMINISTRATION:

SPHINX, 75, Rue Philippe Baucq

R. C. 51922 Tel: 33.48.58

Ch. postaux { Bruxelles No. 192338
Paris No. 160061

Articolele, notele şi problemele însemnate cu * se referă la matematicile elementare (cursul de liceu).

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Alexiu I. (4310); *Avram N. C. Subloc.* (4274, 94, 98); *Bădescu A. Em. Subloc.* (4259, 66, 76); *Botez S. M.* (E); *Bungeţeanu D. Preduţa* (3874, 4194, 99, 223, 94); *Bursan C.* (4293, 95); *Caracudovici M. D-ra* (4296); *Ceauşescu V.* (4178, 94, 232, 38, 59, 66, 68, 76, 78, 94); *Ciucă I. I.* (4295, 96); *Cocea Th.* (4214, P); *Cosma V.* (4187, 96, 259, 67); *Coşovliu St.* (4317); *Cristopol C.* (4296); *Dobrescu D. P.* (4239, 96, 308, P); *Ferdeber B.* (4268); *Finkelstein I.* (4308); *Geier H. A.* (4293, 304, P); *Georgescu I. Subloc.* (P); *Ghiuţă Gh. Subloc.* (4293, 94); *Grigorescu A. V.* (4304, 11); *Ioana V.* (4296); *Klinger O.* (4308); *Lencó I.* (4296); *Mănescu M.* (2469, 4291); *Margulius M.* (3987, 4286, 310); *Martés Gr.* (4295, 96, 317, P); *Mavrodin D.* (4266, 76, 96); *Mazilu C. P.* (4179, 294, 311); *Mihăileanu N. N.* (4305, 06, N); *Moscovici G. G.* (4308); *Mostecky M. El. D-ra* (4296, 310); *Musceleanu Chr. M.* (4293); *Negrea A. M. Leonte* (4293, 96, 99, 317); *Panaite N. Th. Subloc.* (3620, 817, 19, 4084, 173, 96, 295, 317, C); *Paparizu I.* (4268); *Parepeanu I. Subloc.* (4293, 96, E); *Preda C. C.* (4294, 95); *Predoiescu I. M.* (4178, 79, 259, 76, 96, 313, 17, E); *Sager N. I.* (4194, 228, 38, 39); *Şcodranu Al.* (4269); *Silaş G.* (4237), 93, 304); *Simionescu D. Gh.* (P); *Şova C. I.* (4294, 310, E, P); *Stănculescu I. Gh.* (4239, 59, 66, 67, 68, 308, 10); *Ştirbu Gh.* (4187, 96, 259, 67); *Stoica D. Al.* (4278); *Şuşală I. Gh.* (4295, 317, P); *Ţarălungă Gh. D.* (4294); *Tica Marin Gall Subloc.* (4259, 96); *Valerin Gh.* (4291, 96); *Zaharescu I.* (4259, 67, 68, 95, 308, 10).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie**, *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie **pe o singură parte a foii şi nu se vor tratà mai multe chestiuni diferite pe aceiaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipì sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecțiunea „GAZETEI MATEMATICE“

«Gazeta Matematică» vinde ani completi broșați cu prețul de 400 lei volumul, afară de volumele: X, XVII, XVIII, XIX, XX și XXI care se vând cu prețul de 500 lei volumul.

Volumele: I, XV și XXV sunt epuizate.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu și V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **N. Abramescu,** *Lecțiunile de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediția IV revăzută și adăogită,* 1924 (Epuizată).

3. **A. G. Ioachimescu și G. Țițeica,** *Culegere de probleme de mecanică și geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme și o planșă) (Epuizată).

4. **Tr. Lalescu și Șt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografie* (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu,** *Tratat de geometrie analitică,* Fascicola I *Ediția II revăzută și adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).

Idem, Fascicola IV Aplicațiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150,—

6. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10,—

7. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediția III-a revăzută și îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. Lei 180,—

8. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu și G. Țițeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

9. **G. Țițeica,** *Culegere de probleme de geometrie* Lei 150,—

La aceste prețuri se vor adăogà taxele poștale pentru expediție.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul.* (Ediția II) Lei 150,—

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plătește înainte și începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamațiunile și cererile pentru cărți din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete numai D-lui: Inginer **Al. D. Bunescu,** Directorul General al Monitorului Oficial și Imprimeriilor Statului, B-dul Elisabeta 29, București I.

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii și orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie și expediție, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Călușei 23, București 4.

M 2530

Biblioteca ASTRA
SIBIU

0 - MAR. 2014

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXXIX

NUMĂRUL 5. — IANUARIE 1934

SUMARUL

1. † Paul Painlevé . . . . . *G. Ţiţeica.*
2. Cărţi vechi de matematică . . . . . *I. Ionescu.*
3. Asupra rezolvării în numere întregi a unei ecuaţii omogene de gradul II cu n necunoscute . . . . . *Ioan B. Florescu.*
4. Note matematice: 20 — 21.
5. Bibliografie.
6. Cereri: 233 — 234.
7. Diverse.
8. Probleme rezolvate: 1364, 2359, 2440, 3925, 3989.
9. Exerciţii: 14 — 15.
10. Probleme propuse: 4296, 4331 — 4340.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1934

74308

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: Colonel **Gh. Buicliu** din Ministerul Apărării Naţionale; **C. D. Orăşanu,** Inginer, Licenţiat în Matematici, Conferenţiar la Şcoala Politechnică «Regele Carol II» din Bucureşti, Profesor la Şcoalele Aeronautice; **Al. D. Bunescu,** Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice" se vor trimite D-lui Inginer-Şef GH. ILIESCU, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret, Bucureşti 6.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procurà dela „*Gazeta Matematică*" („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29 Bucureşti 1) în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 691, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 214, 36, 70, 71, 97, 99, 310, 33, 67, 84, 86, 99, 412, 50, 553, 650, 79, 711, 29, 64, 876, 906, 14, 29, 59, 87, 2003, 04, 17, 70, 74, 111, 70, 338, 405, 30, 39, 66, 77, 502, 03, 56, 77, 87, 607, 09, 23, 38, 55, 65, 84, 92, 709, 13, 17, 35, 69, 80, 814, 65, 86, 89, 909, 12, 26, 36, 47, 3005, 45, 69, 81, 127, 61, 69, 208, 30, 55, 60, 98, 300. 04, 09, 10, 16, 18, 50, 405, 12, 24, 25, 45, 72, 89, 93, 522, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 88, 608, 22, 27, 32, 46, 47, 57, 65, 81, 82, 84, 99, 700, 03, 33, 36, 93, 804, 08, 29, 36, 44, 53, 64, 80, 96, 909, 13, 15, 16, 18, 20, 33, 44, 83, 4010, 13, 30, 34, 45, 53, 59, 62, 68, 70, 73, 85, 102, 03, 11, 12, 18, 19, 23, 32, 47, 48, 50, 51, 55, 63, 67, 69, 91, 92, 201, 03, 06, 09, 10, 13, 25, 26, 30, 36, 40, 43, 46, 48, 49, 52, 56, 75, 77, 80, 81, 83, 87, 88, 89, 90, 300, 01, 03, 07, 14, 15, 18, 19, 20, 21, 22, 26, 27, 28, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procurà dela „*Gazeta Matematică*" („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29. Bucureşti 1), cu preţul de 12 lei.

† PAUL PAINLEVÉ

La sfârşitul lunii Octomvrie 1933 a încetat din viaţă, la Paris, unul dintre cei mai mari analişti ai Franţei, PAUL PAINLEVÉ. Născut la Paris, la 5 Decemvrie 1863, el avea prin urmare aproape 70 ani şi s'a stins după o carieră universitară şi ştiinţifică strălucită şi o viaţă politică şi socială plină de activitate folositoare Franţei şi omenirii.

Puţini oameni au putut desfăşura o energie aşa de bogată, pe planul întâi, în două domenii aşa de deosebite, cum sunt matematica şi politica, mai ales plecând dintr'un strat social aşa de jos ca PAINLEVÉ. Căci tatăl său fusese desenator-litograf şi, de sigur, dela el moştenise acea fineţă minuţioasă de gândire pătrunzătoare şi de simţire aleasă.

In anul 1883 PAINLEVÉ intră în Şcoala Normală Superioară şi în anul 1887 îşi susţine teza de doctorat având ca subiect «*Sur les lignes singulières des fonctions analytiques*». In această lucrare apare PAINLEVÉ ca adevărat om de ştiinţă, atacând dintr'odată o chestie grea şi vastă cu mijloace bogate de cercetare. El s'a arătat că stăpâneşte nu numai cele două metode curente şi fecunde din teoria funcţiunilor, a lui CAUCHY şi a lui WEIERSTRASS, dar, ceeace era mai rar şi cu totul nou pe atunci, teoria subtilă a mulţimilor lui CANTOR. In această lucrare fundamentală PAINLEVÉ atinge în treacăt problema ecuaţiilor diferenţiale cu integrală generală uniformă, care l-a dus mai târziu la rezultate admirabile.

In urma numeroaselor rezultate, obţinute în această direcţie, PAINLEVÉ este invitat, în toamna anului 1895, de către REGELE OSCAR II al Suediei şi Norvegiei să ţină un curs de un semestru la Stockholm. Lecţiunile făcute au apărut într'un volum de aproape 600 pagini şi cuprind numeroase chestiuni extrem de grele atacate de PAINLEVÉ cu îndrăzneală neobişnuită şi cu succes deosebit.

Clasa de ecuaţii diferenţiale de ordinul al doilea cu integrala generală având punctele critice fixe descoperită de PAINLEVÉ îl aşează definitiv între cei mai mari analişti şi-i deschid porţile Academiei de ştiinţe.

Desvoltări în serii de polinoame printr'o metodă generală ingenioasă, clase de invarianţi pentru unele transformări şi către alte probleme interesante fac parte din opera ştiinţifică bogată a lui PAINLEVÉ.

In anul 1891, pe când era profesor la Universitatea din Lille, a fost însărcinat să facă cu studenții niște conferințe de Mecanică. Conferințele, publicate în volum, sunt magistrale. Cu această ocazie s'a ocupat PAINLEVÉ pentru întâia oară de legile foarte delicate ale formării și rezultatele obținute, publicate și ele, au rămas clasice. De atunci a rămas cu o înclinare deosebită pentru problemele de mecanică teoretică și practică.

Astfel, în volumul «*De la méthode dans les sciences*», publicat de P. FÉLIX THOMAS se găsește un capitol admirabil despre Mecanică scris de PAINLEVÉ cu mână de maestru. Iar când a început lumea să se ocupe de primele experiențe de aviație, el a fost unul din cei dintâi care a încurajat experiențele, care a studiat partea teoretică a chestiei și a scris, împreună cu D-l EMILE BOREL cel dintâi volum fundamental despre aviație.

Acum în urmă, după Război, când EINSTEIN a fost invitat la Collège de France să ție conferințe despre Relativitate, PAINLEVÉ a pus cele mai subtile și turburătoare întrebări la care cu greu a putut găsi EINSTEIN răspunsul potrivit.

De pe timpul afacerii Dreyfuss, problemele sociale și politice încep să preocupe pe PAINLEVÉ din ce în ce mai mult și îl ademenesc, încetul cu încetul, spre luptele politice. Aceasta se vede de altfel și din unele preocupări științifice cu caracter special. Așa, în anul 1909, PAINLEVÉ scrie o prefață extrem de interesantă la traducerea în limba franceză a unui Tratat vorbit de Economie politică a lui W. STANLEY JAVONS. Această prefață merită să fie citită pentru ideile sale interesante.

In anul 1910 PAINLEVÉ își pune candidatura și intră în Parlament. De aci înainte succesele politice se țin lanț.

A fost de mai multe ori ministru, prim-ministru, președinte al Camerei și a fost vorba, la un moment dat, să fie ales Președinte al Republicei.

Om cu o cultură largă și aleasă, el a ținut numeroase conferințe, care, prin ideile sale înalte și sincere, i-au dat o mare autoritate.

Pierderea acestei minți clare, care vedea cu aceeaș pătrundere problemele matematice cele mai grele, ca și problemele politice cele mai delicate, a fost adânc simțită, nu numai de Franța, dar și de toată lumea civilizată.

G. ȚIȚEICA.

CĂRȚI VECHI DE MATEMATICĂ *)

II. O a doua carte din Biblioteca D-lui Inginer DUMITRU LEONIDA este un tratat curios de geometrie practică, cu următorul titlu lung:

„Erz-Herzogliche | Handgriffe | des | **Zirkels** und **Linials;** | Oder: | *Auserwälter Anfang* | zu denen | *Mathematischen Wissenschaften.* | Worinnen man durch eine leichte und neue Art ihm | einen geschwinden Zutritt zu der Feldmesseren / und andern | daraus entspringenden Wissenschafften / machet. | Beschrieben von | *A. E. B. V. P.* | Sammt einem | *Anhang oder Beschreibung* | Derer in denen Geometrischer-Kupffer-Figuren beygefügten | Ungarische Städten / Vestungen und Schlössern / unter welchen | nicht wenige / so bishero in keinen Reiss-und Land-Beschreibungen des | Königreichs Ungarn vor Augen gestellet worden. | **Mit Rom. Kayserl Majest. Befreyung.** | *Augspurg* | Gedruckt und verlegt durch Jacob Kopfmayer / 1698.

Trăsăturile verticale țin loc de trecerea dela un rând la altul iar cele înclinate de virgule și parenteze.

Autorul și-a pus numai inițialele numelui, dar dintr'o notiță scrisă în capul paginei se vede că autorul ar fi un PIRKSTEINER *„Lehrer des Errherzogs"*. Dintr'un pasagiu al prefaței reese că autorul a predat acest curs de geometrie practică elementară unui arhiduce care a devenit în urmă Prinț moștenitor al Coroanei Ungarii. Pe pagina din fața titlului dat mai sus este reprodus, de altfel, prin cupru un tablou care reprezintă pe un tânăr, care ținut de mâini de doi bătrâni savanți, se urcă pe tronul Ungariei. Unul dintre aceia ține în mână un compas și are la picioarele lui, rigle, echere, un glob terestru, etc. La spatele lor sunt demnitari și armate cu steaguri și drapele. Mai în depărtare se văd soldați, călăreți, turnuri, corturi etc. Pe deasupra un înger, sunând din goarnă, aduce o coroană.

Cartea începe cu o *„Precuvântare către respectivul onorat cititor"* în care se vorbește de științele matematice privite în general. Ea începe astfel:

*) A se vedea *Gazeta Matematică*, Anul XXXIX, pag. 44.

„Matematica, al cărui nobil început este mânuit în prezentul tratat, este o anumită parte, sau o bucată, din înțelepciunea lumii... Ultimul scop al acestei minunate științe... e ca omul să locuiască pe acest pământ mai comod și mai sigur și de a-și putea organiza avantagios activitatea și munca spre folosința și plăcerea sa".

Matematica este *teoretică* și *practică*. Ea coprinde *Aritmetica*, care este știința numerelor și pe care o generalizează *Algebra*. Aceasta poate fi *„numerosa"* dacă se servă de cifre și de *Cos, Cosa, Cossica* (numiri ce se dedeau pe atunci necunoscutelor) și poate fi *„speciosa"* dacă întrebuințează litere, descoperire făcută de VIÈTE și complectată de «incomparabilul» CARTESIO. Matematica coprinde apoi *Geometria, Astronomia, Cosmografia, Geografia, Topografia, Hidrografia, Anemografia* (știința vânturilor), *Nautica, Perspectiva, Scenografia, Muzica, Mecanica, Fortificația*, etc. Cine crede că poate să învețe aceste științe fără matematică este ca bavarezul care pornise pe o plută ca să se ducă la Indii.

Cap. I. Tratatul de geometrie de care ne ocupăm, începe cu *„Despre Geometrie în general"*. Autorul spune că scopul cărții este de a arăta cum se fac construcțiunile geometrice cu rigla și cu compasul. Celelalte Capitole sunt următoarele:

„Despre foloasele artei de a măsura". Autorul ne spune aci un adevăr care pare că s'a cam uitat azi: *„Este folositor ca un Stat puternic să îngrijească foarte mult ca arta de a măsura să fie învățată și exercitată în mod public"*. Această artă a făcut ca oamenii să cunoască fața pământului, mersul cerurilor și ca inginerii și militarii să poată opera fără erori. Ce să zicem noi azi când vedem la concursurile de admitere în Anii preparatori că se prezintă bacalaureați care nu știu ce e un hectar și care nu știu cum să transforme măsurile de suprafețe vechi în cele noi când li se dau echivalența măsurilor lineare!

„Despre originile artei de a măsura". Aci se reproduce ideia celor vechi, că geometria a apărut în Egipt, din cauza inundațiilor Nilului, care cerea anual împărțirea locurilor și restabilirea de hotare ale propietăților. Autorul încheie capitolul cu firma lui PLATON. *„Der die Erd-Mess-Kunst nicht verstehe, der gehe nicht in die Schul herein"*.

După aceasta urmează o a doua Parte a tratatului referitoare

la *„Interpretarea cuvintelor întrebuinţate“*. Aci se arată ce este un punct, ce sunt liniile drepte, frânte, curbe, ovale, spirale, perpendiculare, paralele; care e poziţiunea dreptelor faţă de cercuri. Se arată ce sunt unghiurile, a căror mărime o explică prin deschizătura unor foarfeci, şi cum se clasifică ele: trece la suprafeţele plane şi curbe la care spune că: *„Învăţaţii se întreabă ce e faţa exterioară a unui corp, culoare sau figură“ !* Se vorbeşte apoi de triunghiuri de diferite feluri, de patrulatere şi poligoane, despre arii, despre egalitatea şi asemănarea figurilor, despre poliedre regulate şi neregulate, despre sfere, cilindre, conuri, prisme, piramide etc.

O nouă parte a cărţii o formează *„Axiomata“*. Aci se dau axiomele geometriei, ca de exemplu: două linii egale cu o a treia, sunt egale între ele; mărind cu aceeaşi linie două linii egale, găsim noi linii egale; totul este mai mare ca partea lui, etc.

O nouă parte tratează despre mânuirea instrumentelor de desemn. Se arată aci cum se duce o dreaptă prin un punct, cum se prelungeşte o dreaptă, cum se descrie un cerc; descrierea de arce egale; de drepte egale.

La pag. 34 (paginile cu prefaţă nu sunt numerotate) încep construcţiunile geometrice, care coprind 6 Cărţi.

Cartea I. Aci se rezolvă următoarele probleme: construirea de unghiuri egale; împărţirea dreptelor şi a unghiurilor în două părţi egale; prelungirea dreptelor; cum se trasează o dreaptă când rigla e mai scurtă ca distanţa dintre punctele date prin care ea trece; cum se duce o paralelă la o dreaptă prin un punct dat şi ce ne facem dacă depărtarea dela punct la dreaptă întrece deschizătura compasului de care dispunem; cum se duce o perpendiculară pe mijlocul unei drepte şi ce ne facem dacă dreapta este la marginea unei foi aproape paralelă cu aceasta; cum se duc perpendiculare din un punct exterior unei drepte sau la extremitatea acestora; cum se împarte o dreaptă sau mai multe deodată în părţi egale sau proporţionale cu lungimi date; cum se face o *scară compusă;* cum se determină precis intersecţia a două drepte ce se taie sub un unghiu prea mic; cum se determină precis punctul de tangenţă al unei tangente date la un cerc; cum se duc tangente din un punct, pe cerc sau afară din el; cum se desemnează un melc care se deschide uniform, sau a cărui deschidere creşte uniform, sau un melc eliptic. Sunt aci 22 probleme.

Cartea II. Aci se construiesc diferite feluri de triunghiuri; se caută înălțimile lor; se construiesc patrate, dreptunghiuri, romburi, paralelograme, patrulatere, poligoane regulate de 5, 6, 7, 8, 9 și 10 laturi, unele exacte și altele aproximative interesante. Apoi dându-se latura unui poligon cu 6—24 laturi se caută cercul în care s'ar putea înscrie. Se caută centrul unui cerc sau al unei porțiuni de cerc; se duce cercul ce trece prin trei puncte date; se construiesc curbe policentrice eliptice; se arată cum descriu grădinarii elipsa; cum putem găsi axele unei elipse trasate; cum se desemnează figura unui ou. Sunt aci 24 probleme.

Cartea III. Aci avem *înscrierea figurilor.* Se înscriu în cerc poligoanele de 3, 6, 12 ; 4, 8 ; 5, 10 ; 7, 9 și 11 laturi: se dă un mijloc de a înscrie aproximativ un poligon regulat de un număr oarecare de laturi; se împarte cercul în 360 părți egale; se rezolvă problema segmentului capabil de un unghiu dat; se înscrie în cerc triunghiuri cu unghiuri egale sau cu unghiuri date; se înscrie cercul în triunghiu; cercul în patrat și în pentagonul regulat; se înscriu în un triunghiu dat un patrat sau un pentagon regulat; se înscriu un triunghiu în un patrat sau în un pentagon regulat. Sunt aci 19 probleme.

Cartea IV are de scop *circumscrierea figurilor* și anume triunghiul echilateral, patratul și pentagonul regulat unui cerc; un cerc unui patrat; un pentagon regulat unui triunghiu, un triunghiu echilateral și un pentagon regulat unui patrat; un poligon altuia la fel. Sunt aci 9 probleme.

Cartea V. Aci se tratează liniile proporționale. Astfel găsim media și extrema rație, media proporțională, a treia și a patra proporțională; înscrierea a două medii proporționale cu rigla și cu compasul sau cu echerul; găsirea a două drepte la care li se cunoaște media geometrică și suma ori diferența lor; tăierea unei porțiuni dintr'o dreaptă care să fie medie geometrică între rest și o altă dreaptă dată; construirea unui patrat când se știe cu cât întrece diagonala latura lui; construirea de dreptunghiuri cu ariile proporționale cu anumite lungimi; desfacerea a două drepte fiecare în câte două părti așa ca acele patru părți să formeze o proporție; reducerea sau mărirea figurilor rămâind asemenea cu ele însuși, cu ajutorul scărilor, razelor vectorii sau pătrățelelor. Această carte are 17 probleme.

Cartea VI. Aci sunt probleme asupra corpurilor solide, ca desemnarea poliedrelor regulate, a piramidelor, obeliscurilor sau digurilor; se arată mijloacele prin care am putea face din hârtie cele cinci poliedre regulate sau corpuri platonice. Aci sunt 13 probleme.

Multe din problemele aci enunţate ar fi interesant de dat şi azi ca aplicaţiuni la cursul de geometrie.

Partea însă mai interesantă şi caracteristică a acestei cărţi este însă modul de prezentare al chestiunilor, despre care voiu vorbi în numărul viitor.

(Va urma) I. IONESCU.

ASUPRA REZOLVĂRII ÎN NUMERE ÎNTREGI A UNEI ECUAŢII OMOGENE DE GRADUL II CU *n* NECUNOSCUTE

Imi propun să demonstrez că:

Soluţia generală în numere întregi a ecuaţiei omogene de gradul II cu n *necunoscute:*

$$(1) \qquad f(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n) = 0, \qquad n \geqslant 3,$$

este dată de formulele:

$$(2) \qquad \begin{cases} x_1 = x'_1 f(0, a_2, a_3, \ldots a_n) \\ x_i = x'_i f(0, a_2, a_3, \ldots a_n) - a_i \sum_{k=2}^{n} a_k f'_{x'_k} \\ (i = 2, 3, \ldots n) \end{cases}$$

unde $x'_1, x'_2, \ldots x'_n$ *este o soluţie particulară oarecare a ecuaţiei* (1), $a_2, a_3, \ldots a_n$, $(n-1)$ *parametri întregi, iar* $f'_{x'_k}$ *înseamnă derivata lui* $f(x_1, \ldots x_n)$ *în raport cu* x_k *în care necunoscutele* $x_1, x_2 \ldots x_n$ *se înlocuiesc respectiv cu* $x'_1, \ldots x'_n$.

Intr'un articol, purtând acelaşi titlu ca şi acesta, publicat în *Gazeta Matematică,* Vol. XXXVII pag. 45, am arătat că dacă x'_1, $x'_2, \ldots x'_n$, dau o soluţie particulară a ecuaţiei (1) atunci şi

$$(3) \qquad x_i = Ax'_i - 2a_i B \qquad i = (1, 2, \ldots n)$$

unde:

$$A = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_k a_l f''_{x'_k x'_l} \quad ; \quad B = \sum_{k=1}^{n} a_k f'_{x'_k}$$

iar a_1 , a_2 . . . a_n , n parametri, este de asemenea soluție a ecuației (1). [In redactarea articolului citat s'a strecurat o eroare care trebuește corijată în sensul celor de mai sus]. O cercetare sumară m'a făcut să conchid că sistemul (3) nu cuprinde soluția generală a ecuației (1) decât în unele cazuri particulare, ceeace nu este adevărat deoarece cum se va vedea mai jos nu numai că sistemul (3) cuprinde toate soluțiile ecuației (1), dar însuși sistemul (2), mai restrictiv decât (3), le cuprinde pe toate.

In prealabil se observă că ecuația (1) fiind de gradul II, $f''_{x'_k x'_l}$ este o constantă și deci:

$$f''_{x'_k x'_l} = f'_{a_k a_l} ,$$

și în virtutea proprietăților polinoamelor omogene:

$$A = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_k a_l f''_{x'_k x'_l} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_k a_l f''_{a_k a_l} = 2f(a_1, a_2, \ldots a_n).$$

Deci sistemul (3) este tot una cu:

$$(3') \qquad x_i = Ax'_i - Ba_i \quad , \qquad i = 1, 2, \ldots n ,$$

$$A = f(a_1 , a_2 , \ldots a_k) , \qquad B = \sum_{1}^{n} a_k f'_{x'_k} ,$$

deoarece ecuația (1) fiind omogenă, putem oricând suprima factori comuni ai unei soluțiuni, obținând o altă soluție; de altfel două soluțiuni, care diferă numai printr'un factor, sunt echivalente.

Metoda care voiu întrebuința-o ca să arăt că sistemul (3') dă soluțiunea generală este aceea de a arăta că se pot întotdeauna alege parametri a_1 , a_2 , . . . a_n astfel încât (3') să ne dea o soluție mx''_1 , mx''_2 , . . . $m''x_n$ oarecare, m fiind un factor de proporționalitate, adică există valori întregi pentru a_1 , a_2 , . . . a_n astfel încât:

$$(4) \qquad mx''_i = Ax'_i - Ba_i .$$

Din (4) deducem:

$$(5) \qquad a_i = \frac{Ax'_i - mx''_i}{B} ,$$

și:

$$(6) \qquad A = \frac{mx''_1 + Ba_1}{x'_1} .$$

Punem:

$$m = nx'_1 \ , \ a_1 = x'_1 b_1 :$$

$$\therefore \qquad A = nx''_1 + Bb_1 .$$

Inlocuind în (5) avem

$$a_i = \frac{n\,(x''_1 x'_i - x'_1 x''_i) + Bb_1 x'_i}{B} .$$

a_i devine întreg dacă luăm $n = pB$,

$$\therefore \quad a_i = p\,(x''_1 x'_i - x'_1 x''_i) + b_1 x'_i .$$

Inlocuind valorile lui a_i în valoarea lui B, avem:

$$B = \sum_{k=1}^{n} a_k f'_{x'_k} = px''_1 \sum_{k=1}^{n} x'_k f'_{x'_k} - px'_1 \sum_{k=1}^{n} x''_k f'_{x'_k} + b_1 \sum_{k=1}^{n} x'_k f'_{x'_k}$$

Insă

$$\sum_{k=1}^{n} x'_k f'_{x'_k} = 2f\,(x'_1 \ , \ x'_2 \ , \ \ldots \ x'_n) = 0.$$

$$(7) \qquad \therefore \quad B = - px'_1 \sum_{k=1}^{n} x''_k f'_{x'_k} .$$

Calculăm la fel şi pe A; avem:

$$A = f(a_1, a_2, \ldots a_n) = f[(px''_1 + b_1)x'_1 - x'_1 x''_1 ; \ldots ; (px''_1 + b_1)x'_n - x'_1 x''_n ;]$$

$$= (px''_1 + b_1)^2 f\,(x'_1 \ , \ x'_2 \ldots x'_n) - x'_1\,(px''_1 + b_1) \sum_{k=1}^{n} x''_k f'_{x'_k}$$

$$+ \frac{(x'_1)^2}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} x''_k x''_l f''_{x'_k} x'_l .$$

Insă avem

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} x''_k x''_l f''_{x'_k x'_l} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} x''_k x''_l f''_{x''_k x''_l} = 2f(x''_1 x''_2, \ldots x''_n) = 0$$

deoarece $x''_1 \ , \ x''_2 \ , \ \ldots \ x''_n$ sunt o soluţie a ecuaţiei (1).

$$\therefore \quad A = - x'_1 (px''_1 + b_1) \sum_{k=1}^{n} x''_k f'_{x'_k} .$$

Pe de altă parte valoarea lui A din (6) este:

$$A = (px''_1 + b_1)\,B = - px'_1 (px''_1 + b_1) \sum_{k=1}^{n} x''_k f'_{x'_k} .$$

Pentru ca cele 2 valori să fie identice este necesar şi suficient ca $p = 1$, deci:

$$(8) \qquad a_i = x''_1 x'_i - x'_1 x''_i + b_1 x'_i \qquad i = 1, 2, \ldots n.$$

Aceste valori întregi ale lui a_i verifică sistemul (4), deci formulele (3') conţin soluţia generală a ecuaţiei (1); mai mult deoarece (8) verifică sistemul (4) oricare ar fi b_1 urmează că (3') va fi soluţie generală a problemei oricare ar fi valoarea lui b_1, deci şi pentru $b_1 = 0$, adică $a_1 = b_1 x'_1 = 0$ prin urmare şi sistemul (2) este soluţiune generală a ecuţiei (1) aşa cum am spus la începutul acestui articol.

Din (8) se vede că pentru $b_1 = 0$ şi $mx'_i = x''_i$ toţi a_i trebuesc luaţi egali cu 0; ori făcând în (2) $a_2 = a_3 \ldots a_n = 0$ găsim soluţia banală $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$; iar nu mx'_1 , mx'_2,... mx'_n, deci mai precis trebue spus:

Formulele (2) conţin toate soluţiile în numere întregi ale ecuaţiei (1) în afară de soluţia x'_1 , x'_2 , , . . x'_n dela care s'a plecat.

Observaţie. Deoarece atât formulele (3') cât şi formulele mai restrictive (2) conţin soluţia generală a ecuaţiei (1) înseamnă că trebue să existe o substituţie care să transforme formulele (3') în (2). Această substituţie, uşor de găsit, este următoarea:

Facem în (3'):

$$(9) \qquad a_i = \frac{t_n + a_1 x'_n}{x'_1}$$

$$\therefore x'^2_1 x_i = x'_i f[t_n + a_1 x'_1 ; t_2 + a_1 x'_2 ; \ldots ; t_n + a_1 x'_n]$$

$$- (t_i + a_1 x'_i) \sum_{k=1}^{n} (t_k + a_1 x'_k) f'_{x'_k}$$

$$= x'_i f(t_1, t_2 \ldots t_n) + a_1 x'_i \sum_{k=1}^{n} x'_k f'_{t_k} + a_1^2 x'_i \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} x'_k x'_l f''_{t_k t_l}$$

$$- t_i \sum_{k=1}^{n} t_k f'_{x'_k} - a_1 x'_i \sum_{k=l}^{k} t_k f'_{x'_k} - a_1 (t_i + a_1 x'_i) \sum_{1}^{k} x'_k f'_{x'_k}.$$

Insă

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} x'_k x'_l f''_{t_k t_l} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} x'_k x'_l f''_{x'_k x'_l} = 2f(x'_1, \ldots x'_n) = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} x'_k f'_{x'_k} = 2f(x'_1, \ldots x'_n) = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} x'_k f'_{t_k} = \sum_{k=1}^{n} x'_k \sum_{l=1}^{n} t_l f''_{t_k t_l} = \sum_{l=1}^{n} t_l \sum_{k=1}^{n} x'_k f''_{x'_k x'_l} = \sum_{l=1}^{n} t_l f_{x'_l},$$

deci:

$$(10)\quad x'^2_1 x_i = x'_i f(t_1, t_2, \ldots t_n) - t_i \sum_{k=1}^{n} t_k f'_{x'_k} \quad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Formulele (10) nu diferă de (2) decât prin notație și factorul de proporționalitate x'^2_1, deoarece $t_1 = 0$.

IOAN B. FLORESCU.

NOTE MATEMATICE

20. *O chestiune de prioritate și o soluție aritmetică a problemei 4221.* La pag. 73, Vol. XXXIX al acestei reviste s'a dat soluția problemei 4221 propusă de D-l V. THÉBAULT cu următorul enunț:

Să se găsească un număr de 3 cifre așa fel ca suma cifrelor lui să fie un multiplu al fiecărora din ele.

Dacă *abc*, k, k', k'' sunt numărul căutat și 3 coeficienți întregi pozitivi, atunci condițiile problemei se pot scrie sub forma

$$(1)\quad a+b+c = \frac{a+b+c}{k} + \frac{a+b+c}{k'} + \frac{a+b+c}{k''}.$$

Sub această formă se vede că problema 4221 este un caz cu totul particular al problemei 572 pe care am propus-o în *Revista Matematică din Timișoara,* Vol. VI cu următorul enunț:

Să se găsească numărul întreg N, *divizibil prin numerele întregi* k, k', k'' *știind că* N *este egal cu suma câturilor sale prin cei 3 divizori.*

Soluția acestei probleme s'a dat la pag. 96 Vol. VII, *Revista Matematică din Timișoara.* Ecuația problemei este

$$(2)\qquad N = \frac{N}{k} + \frac{N}{k'} + \frac{N}{k''}$$

adică tot ecuația (1) de mai sus.

Soluţiile ecuaţiei (2), date cu ocazia rezolvărei problemei 572 în R. M. T. sunt cuprinse în tabelul

(3)

	I	II	III
k	2	2	3
k'	3	4	3
k''	6	4	3
N	6 $\mathcal{M}$	4 $\mathcal{M}$	3 $\mathcal{M}$

în care valorile numerelor k, k', k'' pot fi schimbate între ele în toate modurile posibile, din cauza simetriei ecuaţiei (2).

Să revin la problema 4221. Soluţia dată la pag. 73 din acest an în *Gazeta Matematică* este bazată pe consideraţiuni de algebră, chiar face uz de determinanţi şi în plus conţine şi rezultate eronate când afirmă că 100, 200,... sunt soluţii ceeace nu este adevărat căci, de exemplu pentru 200:

$$2 + 0 + 0 = 1 \times 2 \neq k' \times 0 \neq k'' \times 0 \neq 0.$$

Iată o soluţie mai elementară a acestei probleme, soluţie bazată pe rezultatele pe care le-am stabilit în *Revista Matematică din Timişoara,* Vol. VII.

Observ că oricare ar fi a, b, c:

$$a = b = c$$

este soluţie a problemei, corespunzând sistemului III din tabelul (3). Deci următoarele 9 soluţiuni:

111 ; 222 ; 333 ; 444 ; 555 ; 666 ; 777 ; 888 ; 999.

Nici una din cifrele a, b, c nu este nulă, căci altfel din

$$a + b + c = ka = k'b = k''c$$

ar rezulta că şi celelalte cifre sunt nule.

Dacă abc este o soluţie a problemei, din ea se vor mai obţine alte soluţii schimbând între ele în toate felurile posibile cifrele a, b, c.

Numesc *soluție primitivă* soluția în care $a < b < c$ și în care nu toate cifrele sunt egale. Toate *soluțiile primitive* se vor afla utilizând coloanele I și II a tabloului (3). Observând că

$$a + b + c \leqslant 27$$

și dând lui $\mathcal{M}$ din linia ultimă a tabelului (3) valori consecutive începând cu 1 se găsesc cu ușurință următoarele 7 *soluțiuni primitive* ale problemei 4221 :

123 ; 246 ; 369 corespunzătoare coloanei I

112 ; 224 ; 336 ; 448 » » II.

Problema are deci *7 soluțiuni primitive* și *9 soluțiuni cu toate cifrele identice.*

Col. Gh. Buicliu.

21. *Curiozități aritmetice.* Dau mai jos două forme curioase de pătrate perfecte de $2n$ cifre. Sunt singurele pătrate care micșorate cu o unitate, sunt formate din două grupe egale, consecutive, de cifre identice.

$(3+1)^2 = 15+1$ $\quad$ $(6+1)^2 = 48+1$

$(33+1)^2 = 1155+1$ $\quad$ $(66+1)^2 = 4488+1$

$(333+1)^2 = 111555+1$ $\quad$ $(666+1)^2 = 444888+1$

$(33\ldots33+1)^2 = 11\ldots11\ 55\ldots55+1$ $\quad$ $(66\ldots66+1)^2 = 44\ldots44\ 88\ldots88+1.$

(Repetările indicate se fac de același număr de ori).

Rădăcinile acestor pătrate, micșorate și ele cu o unitate, sunt formate din câte o grupă de n cifre identice.

Grupa de cifre identice ale rădăcinii, este egală cu semisuma grupelor de cifre identice ale pătratului respectiv.

Diferența între două cifre din cele două grupe de cifre identice ale unui pătrat este totdeauna aceeași, egală cu *4.*

De remarcat că cifrele care formează grupa de cifre identice ale unei rădăcini sunt multipli de *3.* Formarea de pătrate după regulele văzute mai sus, poate fi privită ca o proprietate generală și exclusivă (în baza *10*) a multiplilor de *3,* căci *9,* singurul multiplu de *3,* de o cifră, rămas (afară de *0*), nu poate forma asemenea pătrate, a doua grupă de cifre identice a acestor pătrate trebuind să fie formată din cifre egale cu *11.*

M. Mănescu
Elev.

BIBLIOGRAFIE

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. XXXIX. No. 10. Octomvrie 1933. New-York. Mecanica quantum şi seriile asimptotice, de G. D. BIRKHOFF. Progrese recente la teorema lui WARING şi generalizările ei, de L. E. DICKSON. Teoria idealelor abstracte, de O. ORE. Algebra diviziunii normale asupra câmpurilor numerice algebrice de grad ne finit, de A. A. ALBERT. Incă câteva teoreme asupra valorii medii, de M. MARDEN. Asupra numărului punctelor duble ale unui V_k^n în un S_{2k+1}, de B. C. WONG. Reziduuri patratice în factorizare, de M. HALL. O determinare complectă a patratelor magice de 4×4, de D. N. LEHMER. Asupra teoriei transformatorilor lui FOURIER, de E. HILL & J. D. TAMARKIN. Notă asupra localizării punctelor critice ale funcţiunii lui GREEN, de J. L. WALSH. Simplificarea unui sistem de patru postulate pentru algebra Boleană, în termeni de rejecţiune, de B. A. BERNSTEIN. Asupra unei secţiuni din Principia Mathematica, de B. A. BERNSTEIN. Asupra familiilor naturale de curbe, de C. H. ROWE. Asupra condiţiunii ca două matrice ZEHFUSS să fie egale, de D. E. RUTHERFORD. O curbă plană eliptică de ordinul $4k+2$ cu singularităţi toate reale şi distincte şi autopolară la $4k+4$ conice, de D. C. DUNCAN. O problemă inversă în ecuaţiunile diferenţiale de R. E. LANGER. Asupra sumabilităţii şi a sumelor generalizate a unei serii de polinomiale ale lui LEGENDRE, de W. C. BRENKE.

Mathesis. Tome XLVII. No. 9. Noemvrie 1933. Gembloux. Numere egale cu cele formate de ultimele cifre ale puterilor lor, de R. GOORMAGHTIGH. Asupra unei extensiuni a teoremelor lui LINDELOF şi POINCARÉ la unele ecuaţiuni cu derivate parţiale, de R. J. H. GERMAY. Asupra a patru sfere tangente două câte două, de N. ALTSCHILLER-COURT. Mişcarea irotaţională a unui lichid în o parte a spaţiului limitată de un cilindru eliptic animat de o mişcare de rotaţie în jurul axei sale, de L. DUFOUR. Asupra curburii suprafeţelor în spaţiu, de R. DEAUX. Probleme asupra patratelor, de V. THÉBAULT.

The Mathematical Gazette. Vol. XVII. No. 226. Decemvrie 1933. Londra. Matematica la Asociaţiunea Britanică, 1933, de J. H. C. WHITEHEAD. Al patrulea Congres internaţional de mecanică aplicată. Infăşurata liniilor lui SIMPSON ale unui triunghiu, de A. LODGE. O demonstraţiune a formulei binomului, de S. BARNARD. Game de schimb. I. Clopotul bancherului, de S. T. SHOVELTON. Aplicaţiunea statisticei la problemele tecnice. Chestiunea cantităţii de mişcare, de G. H. GRATTAN-GUINNESS. Sumabilitatea absolută a seriilor lui FOURRIER, de L. S. BOSANQUET. Integralele abeliane ataşate la varietăţile algebrice, de W. V. D. HODGE. Invăţământul geometriei, de E. H. NEVILLE. Probleme în legătură cu poligoanele regulate de n laturi, de J. TRAVERS. Notă asupra naturi trigonometriei, de V. NAYLOR.

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Tomul CXVI. Fascicola IV. Octomvrie 1933. Buenos Aires.

Boletin Matematico Elemental. Anul IV. No. 8. Octomvrie 1933. Buenos Aires.

Idem. *Suplemento informativo.* Anul I. 7 Octomvrie 1933.

Boletin Matematico. Anul VI. No. 6. August 1933. Buenos Aires. 150 ani dela moartea lui EULER.

Journal de Mathématiques Élémentaires, publié par H. VUIBERT. Anul 58. No. 5. Decemvrie 1933. Paris.

Idem. No. 6. Decemvrie 1933. Paris.

Sphinx. Anul IV. No. 1. Ianuarie 1934. Bruxelles.

Bulletin Mathémathique de la Société Roumaine des Sciences. Tome 35. Volume du Jubilé de MM. D. POMPEIU et G. TZITZÉICA. (60—e). Anniversaire. Bucureşti 1933. Sur le trapèze parabolique de M. POMPEIU, par E. ABASON. Sur le développement d'une fonction suivant les puissances croissantes d'un polynome et applications à la détermination des courbes de convergences de certaines séries de polynomes, par N. ABRAMESCO. Sur le principe de LEGENDRE, par A. ANGELESCO. Sur une classe nouvelle de noyaux pour une équation FREDHOLM, par TH. ANGHELUTZA. Ueber rationale Normalkurven, von D. BARBILIAN. La logique de MR. BROUWER. Etat de la question, par MM. M. BARZIN et A. ERRERA. Le théorème des accroissement finis et les fonctions holomorphes par N. G. BOTEA. Sur les systhèmes orthogonaux du plan et de l'espace à trois dimensions, par G. BOULIGAND. La cinématique newtonienne et les espaces à connexion euclidiennes par M. ELIE CARTAN. Quelques propriétés générales des fonctions continues, par N. CIORANESCO. L'additivité métrique vectorielle des ensembles et les discontinuités tangentielles sur les courbes rectifiables, par A. DENJOY. Courbes loxodromiques sur une surface, par C. DRÂMBĂ. Sur la propriété de M. POMPEIU, concernant les intégrales des fonctions à deux variables réelles, par A. FRODA. Note sur une inégalité de CAUCHY, par S. A. GHEORGHIU. Ecuations différentielles et equations aux différences finies, par M. GHERMANESCO. Sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes, par A. GHIKA. Le théorème de FUCHS, par D. V. IONESCO. Sur un théorème de limite, par G. MIHOC. Sur un théorème de M. POMPEIU, par PAUL MONTEL. Sur un théorème de M. TZITZÉICA, par PAUL MONTEL. Sur l'équation de LAPLACE, par M. NICOLESCO. Sur la translation analytique et ses invariants, par O. ONICESCU. Sur certaines congruences spéciales, par AL. PANTAZI. Une interprétation ondulatoire pour la condition de la frécuence quantique de BOHR, par I. I. PLACINTEANU. Sur une extension des théorèmes de MM. SCHUR et POLYÀ, par M. SERGESCU. Sur une surface universelle pour les fonctions de BAIRE, par W. SIERPINSKI. Sur les transformations continues des espaces topologiques, par S. STOILOV. Sur certains nombres principaux, par G. SUDAN. Sur la cinématique du corps solide dans l'espace euclidien, par L. TEODORIU. Remarque sur le problème de CAUCHY pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles, par N. THÉODORESCO. Sur l'équilibre d'un solide appuyé sur une surface, par V. VÂLCOVICI. Sur les systèmes intégrés d'un système de PFAFF, par G. VRÂNCEANU. Travaux scientifiques de M. D. POMPEIU. Travaux scientifiques de M. G. TZITZÉICA.

Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées de l'Ecole Polytechnique „Roi Carol II" Bucarest. IV-ème Année. No. 2—3. Fasc. 11—12. Bucureşti 1933. Géométrie et mécanique. Sur une question clasique élémentaire, par ION IONESCO. Sur la construction d'une parabole, par B. BIANU. Sur un théorème de M. D. POMPEIU, par E. ABASON. L'intervale de contraction pour les équations algébriques aux différences finies, par N. CIORANESCO. Essai de classification des poteaux de bois, par J. CONSTANTINESCO. Les efforts développés dans un essieu d'un vagon de chemin de fer par l'irrégularité de la voie, par GH. EM. FILIPESCO. Un problème de régularisation (partielle) de débits, par D. GERMANI. Principe relatif à la distribution des lignes de force du champ magnétique, par N. VASILESCO-KARPEN. Sur les propriétés des grandeur „Energie et puisance spécifique" et leurs applications en Traction Electrique, par C. BUDEANU. Sur la nature et la valeur de la puissance synchronisante dans la marche en parallèle des alternateurs, par I. S. GHEORGHIU. Sur le problème de la répartition des frais dits „fixes" d'une centrale électrique aux différents catégories de consommateurs, par AL. GUTZU. Sur le champ magnétique dû à un courant circulaire et sur le flux traversant le circuit, par M. SARIAN. L'apport technique des dernières conférences radioélectriques, par T. TANASESCO. Sur le corrosion du fer, par ER. TOPORESCO. Sur la séparation quantitative du zinc de l'aluminium, par EUGÈNE CHIRNOAGĂ & MATEI NICOLESCO. Recherches sur les éthers-oxydes éthylique des a-glycols à poids moléculaires élevé, par D. BARDAN. Le „Photanamètre" (un nouvel appareil de dosage et d'analyse photoélectrique, pour la mesure et l'enregistrement des matières en suspension et des colorations, par P. STAEHELIN, Sur la valeurs des résistances mécaniques du ciment Portland, en rapport avec la constitution du klinker, par S. C. SOLACOLU. Desbismuthisation du plomb par le calcium, par T. T. NEGRESCO & D. GH. TEODORESCO. Introduction de la Comptabilité en partie double dans les Administrations de l'Etat, par M. PLATAREANU.

Revista Matematică din Timişoara Anul XIII. No. 10. Decemvrie 1933, Timişoara. Sărbătorirea D-lor Profesori D. POMPEIU şi G. ŢIŢEICA. Histoire des sciences mathématiques et physiques en Roumanie, par P. SERGESCU.

Societatea Licenţiaţilor în Matematici dela Universitatea din Clu *Chestiuni de examen propuse la secţia matematică a Facultăţii din Cluj.* No. 1. Cluj 1933.

PIERRE COPEL. *Eléments d'optique géométrique à l'usage des candidats des grandes écoles.* Paris. Gauthier Villars. Quai des Grands Augustins 55. 1933. Preţul 25 franci.

Intr'un volum de 206 pagini autorul a căutat ca să expună în mod elementar chestiunile de optică geometrică, tratând chestiunile matematiceşte şi dând exemple numerice, construcţiuni grafice şi rezultate experimentale. Ea e scrisă pentru elevii care vor să priceapă fizica iar nu numai să o înveţe. Ea

este folositoare elevilor care fac matematici speciale sau se pregătesc pentru şcoli la care se cer cunoştinţe solide de optică.

Cartea conţine următoarele capitole: I. Principiile opticei geometrice; II. Oglinda plană şi sisteme de asemenea oglinzi; III. Dioptru plan, sisteme de dioptre şi de oglinzi plane; IV. Verificarea experimentală a principiilor şi legilor de optică geometrică; VI. Sisteme centrate în general; VII. Dioptre sferice; VIII. Oglinda sferică; IX. Lentile; X. Oglinzi, dioptre şi lentile subţiri, convergente sau divergente, condiţiuni de realitate ale imaginilor, mersul unei fâşii luminoase; XI. Sisteme afocale, asociare de sisteme centrate şi oglinzi plane; XII. Determinări şi verificări experimentale, limite de aplicaţii ale aproximaţiei lui GAUSS. Cartea se termină cu o Notă asupra principiului lui FERMAT generalizat, cu alta asupra justificării teoretice a aproximaţiunii lui GAUSS, şi a treia Notă asupra justificării practice a aproximaţiunii lentilelor puţin groase.

I. I.

N. ABRAMESCO. *Sur le courbes de convergence des séries de polynomes à une variable complexe et leur application à la détermination des fonctions holomorphes dans des domains donnés.* (Extras din *Atti di Matematica pura ed applicata*). Bologna 1933.

GH. ZAPAN. *Uebbarkeit verschiedener Aufgaben.* Inaugural-Dissertation zur Erlangung der Doktorwürde, genehmigt von der Philosophischen Fakultät der Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin. (Extras din *Psychotechnischen Zeitschrift*). München 1932.

GH. ZAPAN. *Beziehung zwischen den Unterrichtsfächern in den höhere Schulen und Folgerungen für die Schulorganisation.* (Extras din *Psychotechnischen Zeitschrift*). Berlin 1933.

GH. ZAPAN. *Memoriu de titluri şi lucrări.* Bucureşti 1933.

N. CIORANESCO. *Sur les équations fonctionnelles du cosinus et du sinus circulaires et hyperboliques,* Paris et Genève 1932. (Extras din *l'Enseignement mathématique*).

N. CIORANESCO. *Sur une nouvelle généralisation des polynomes de* LEGENDRE. (Extras din *Acta Mathematica*). 1932. Upsala.

N. CIORĂNESCU. *Notiţă şi titluri de lucrări.* Cernăuţi 1933.

N. G. BOTEA. *Le théorème des accroissements finis et les fonctions holomorphes.* (Extrait du *Bulletin mathématique de la Société roumaines des sciences*). Bucureşti 1933.

N. G. BOTEA. *Sur la configuration formée par deux triangles et deux points.* (Extrait de *Mathesis*). Gembloux 1933.

N. G. BOTEA. *Deux théorèmes sur le triangle.* (Extrait des *Comptes rendus du Congrès de l'association française pour l'Avancement des sciences*). 1932.

N. G. BOTEA. *Sur une classe d'équations aux dérivées partielles.* (Extrait du *Buletinul Facultăţii de Ştiinţe din Cernăuţi*). Cernăuţi 1932.

N. G. BOTEA. *Proprietăţi ale Triunghiului.* (Extras din *Gazeta Matematică*). Bucureşti 1933.

Natura. Anul XXII. No. 10. Decemvrie 1933. Bucureşti. Sărbătorirea profesorilor G. ŢIŢEICA şi D. POMPEIU, de G. G. LONGINESCU. Cuvântarea D-lui Profesor V. VÂLCOVICI, preşedintele Societăţii române de matematici. Cuvântarea D-lui Profesor C. ANGELESCU, Ministrul Instrucţiunii. Cuvântarea D-lui Profesor L. MRAZEC, preşedintele Academiei române. Cuvântarea D-lui Profesor N. VASILESCU-KARPEN, Rectorul Şcoalei Politechnice din Bucureşti. Cuvântarea D-lui Profesor D. HURMUZESCU, Decanul Facultăţii de Ştiinţe din Bucureşti. Cuvântarea D-lui Profesor DAVID EMMANUEL. Cuvântarea D-lui Profesor P. SERGESCU, în numele Universităţii din Cluj. Cuvântarea D-lui Profesor S. STOILOV, în numele Universităţii din Cernăuţi. Cuvântarea D-lui V. ALACI dela Şcoala Politehnică din Timişoara. Cuvântarea D-lui Profesor O. ONICESCU, Secretarul general al Societăţii Române de Ştiinţe. Cuvântarea D-lui Profesor V. BIANU, Preşedintele Societăţii Române de Fizică. Cuvântarea D-lui Profesor ION IONESCU, Inginer inspector general, Preşedintele Societăţii Politechnice. Cuvântarea D-lui Profesor G. ŢIŢEICA. Cuvântarea D-lui Profesor D. POMPEIU. Dela sărbătorirea D-lor Profesori D. POMPEIU şi G. ŢIŢEICA, de I. N. LONGINESCU. Cuvântarea Domnului Profesor A. G. IOACHIMESCU la Banchetul de Luni 27 Noemvrie 1933.

CERERI

233. In Volumul XXXIV pag. 176, D-l I. IONESCU roagă pe colegii lui NICULAE C. SEGÂRCEANU să strângă fonduri pentru a se publica manuscrisele rămase dela el, punând totdeodată suma de 1000 lei la dispoziţie şi copia articolelor lui N. SEGÂRCEANU din *Gazeta Matematică*.

S'a făcut ceva în această privinţă ?

M. D. MOTOC.

Răspuns. Această cerere ni s'a trimis de mult şi nu am publicat-o fiind că ţineam să pot da un răspuns cert. Acum, chiar, nu pot spune decât că nu ştiu nimic ! Mia de lei stă şi acum închisă într'un plic cu corespondenţa lui N. SEGÂRCEANU, sau referitoare la dânsul ! Am încercat ca prin *Casa Şcoalelor* să se publice cel puţin Caietul destinat Liceenilor, şi am întâlnit foarte multă bunăvoinţă din partea D-lui Administrator al acelei Case ; dar, pe când chestiunea era în studiu, D-na E. BUCHHOLTZER, bunica şi moştenitoarea lui N. SEGÂRCEANU, mi-a impus să retrag manuscrisele de acolo, care acum se găsesc toate în posesiunea D-sale. La *Gazeta Matematică* nu a mai rămas decât Caietul cu manuscrisele care au fost prezentate pentru premiul „VASILE CONTA" şi din care ne-a mai rămas ceva de publicat.

Eu nu am pierdut speranţa că foştii lui colegi,—care acum sunt oameni cu cariera făcută, — vor lăsa să se răvăşească şi să se prăpădească frumoasa operă lăsată de distinsul şi nefericitul lor camarad de Liceu şi de Universitate!

I. IONESCU.

234. Cine-mi poate procura şi cu ce preţ, Anul I din *Foaia Matematică*.

S.-LT. PANAITE N. ST.

DIVERSE

Societatea Română de Ştiinţe, Secţiunea matematică, a ţinut şedinţă în seara zilei de 4 Decemvrie. D-l V. VÂLCOVICI a făcut un referat de mecanică, D-l D. BARBILIAN a dat o extensiune a identităţii lui LAGRANGE iar D-l N. CIORĂNESCU a dat o generalizare teoremei lui BÔCHER-KOEBE.

In seara zilei de 18 Decemvrie D-nii: FOCŞA, NICULESCU şi STAMATESCU au făcut un referat de matematici elementare şi D-l N. TEODORESCU o comunicare despre soluţiuni elementare pentru sisteme de ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul I.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1364. *Să se găsească numai cu compasul diametrul unei bare cilindrice circulare, cu capetele rupte neregulat.*

Se ştie că orice construcţiune geometrică care se poate efectua cu rigla şi cu compasul se poate face şi numai cu compasul, (pe căi mai lungi însă, în cele mai multe cazuri). De aceia, în cele ce urmează nu vom exclude şi rigla dela construcţiuni, rămânând ca acele construcţiuni care cer şi rigla să fie transformate în construcţiuni numai cu compasul, dacă nu se dispune de cât de acest instrument de desemn.

Metoda pe care o voiu întrebuinţa este următoarea: Se ştie că intersecţia unui cilindru circular cu un plan este o elipsă şi că o elipsă este determinată dacă i se cunoaşte cinci puncte de pe ea. Voiu căuta dar să fixez pe cilindru cinci puncte care să fie în acelaş plan L, a cărui intersecţie cu cilindru dă elipsa E; voiu raporta apoi cele cinci puncte pe un plan L' (foaia desemnului) în

care voiu construi elipsa E' prin cele cinci puncte raportate, şi care va fi egală cu elipsa E de pe cilindru. Elipsei E' îi voiu căuta axa cea mică, care, după cum voiu arăta, are aceiaşi lungime ca diametrul căutat al cilindrului.

I. *Determinarea unei elipse pe cilindru.* Din două puncte O_1 şi O_2 fixate pe suprafaţa cilindrului (fig. 1) descrim, cu o aceiaşi deschizătură de compas, două arce pe acea suprafaţă, care se taie în punctele M_1 şi M_2. Procedăm la fel cu alte două deschizături de compas convenabile, şi mai determinăm încă două perechi de puncte M_3, M_4 şi M_5, M_6. Aceste şase puncte sunt două câte două la aceiaşi distanţă de punctele O_1 şi O_2; ele se găsesc deci toate în un plan L, perpendicular pe mijlocul dreptei O_1O_2, care este locul geometric al punctelor egal depărtate de O_1 şi O_2. Punctele M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6 fiind pe intersecţia unui plan L cu cilindru, sunt toate pe elipsa E de intersecţie a acestor două suprafeţe.

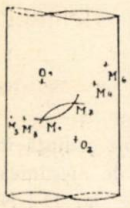


Fig. 1.

II. *Poziţia axei mici a elipsei în cilindru.* Fie O intersecţia lui L cu dreapta O_1O_2 (fig. 2). Să ducem prin O_1, O, O_2 plane perpendiculare pe axa XY (fig. 3) care taie această axă în punc-

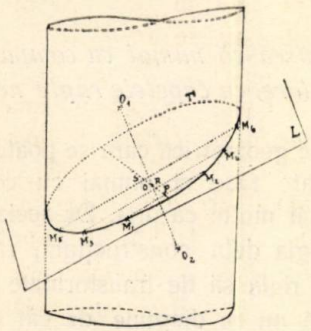


Fig. 2.

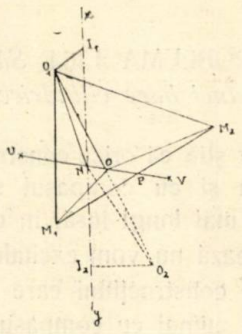


Fig. 3.

tele I_1, N, I_2. Dreptele O_1I_1, ON, O_2I_2 sunt proiectantele lui O_1, O, O_2 pe XY, şi cum O este la mijlocul lui O_1O_2 tot aşa şi N va fi la mijlocul lui I_1I_2. Triunghiurile dreptunghice O_1I_1N, O_2I_2N sunt deci egale, căci au catetele I_1N, I_2N egale şi catetele O_1I_1, O_2I_2 egale ca raze ale cilindrului. Rezultă dar că $O_1N = O_2N$. Punctul N fiind egal

depărtat de O_1 şi de O_2 se va găsi în planul L al elipsei E. Punctul N este deci intersecţia planului L cu axa XY a cilindrului; el este prin urmare centrul elipsei E.

Fie U şi V intersecţiile lui ON cu cilindrul. Cum O şi N sunt cuprinse în planul L, dreapta ON este cuprinsă în acest plan. Deci U şi V sunt în planul L, şi prin urmare aparţin elipsei E. Apoi UV fiind perpendiculară pe axa cilindrului, distanţa UV este egală cu diametrul cilindrului, iar $NU = NV = \frac{1}{2}UV$ este raza cilindrului. Pe de altă parte, depărtarea unui punct de pe cilindru la un punct al axei lui nu se poate scoborî sub raza cilindrului, care e cea mai scurtă distanţă dela un punct al cilindrului la axă. Reese de aci că UV este axa cea mică a elipsei. Conchidem dar că *axa cea mică a elipsei* E *este diametrul cilindrului.*

Dreapta UV taie coardele M_1M_2, M_3M_4, M_5M_6 în mijloacele lor P, R, S. In adevăr, triunghiurile OO_1M_1, OO_2M_2, dreptunghice în O, au $O_1M_1 = O_2M_2$ prin construcţie, şi pe OO_1 comun; ele sunt deci egale şi avem $OM_1 = OM_2$. Punctele M_1 şi M_2 sunt dar pe un cerc cu centrul în O. Acest cerc este simetric faţă de axa mică a elipsei, căci O e pe această axă. Elipsa fiind şi ea simetrică faţă de axa mică a ei, intersecţiile cercului de care vorbirăm cu elipsa vor fi şi ele două puncte simetrice faţă de axa mică a elipsei. Deci punctele M_1 şi M_2 sunt simetrice faţă de ON. Mijlocul P al lui M_1M_2 va fi dar pe ON. In mod analog se arată că şi mijloacele R şi S ale lui M_3M_4 şi M_5M_6 sunt pe NO. Punctele N, O, P, R, S sunt dar colineare. Să numim D această dreaptă din spaţiu.

III. *Construirea elipsei pe un plan (foaia de desemn).* Fie L' planul pe care voim să construim o elipsă E' egală cu elipsa E de pe cilindru. In acest plan trasăm o dreaptă D' care să ne reprezinte axa mică a elipsei E, adică dreapta NOPRS. Luăm pe D punctul P' ca reprezentând pe P. (Fig. 4). Pe o perpendiculară în P' pe D, luăm de o parte şi de alta al lui P', distanţele $P'M'_1 = P'M' = \frac{1}{2}M_1M_2$ şi găsim punctele M'_1 şi M'_2 corespunzând lui M_1 şi M_2. Distanţa M_1M_2 o luăm cu compasul de pe cilindru şi o împărţim geometriceşte în două părţi egale, la o parte pe planul L'. Măsurăm de asemenea cu compasul distanţa M_3M_4, căutăm la fel pe $\frac{1}{2}M_3M_4$ şi la această depărtare de D' ducem dreapta D'_1 pe planul L'. Luăm cu compasul de pe cilindru distanţa M_1M_3 şi cu ea ca rază descrim un arc de cerc din M'_1 care e luat drept centru. Acest arc taie pe

D'_1 în M'_3 care corespunde lui M_3 de pe cilindru. În mod analog determinăm punctul M'_5 care corespunde lui M_5 de pe cilindru. Simetricele lui M'_1, M'_3, M'_5 față de D_1 ne va da punctele M'_2, M'_4 și M'_6 care vor corespunde lui M_2, M_4 și M_6 de pe cilindru.

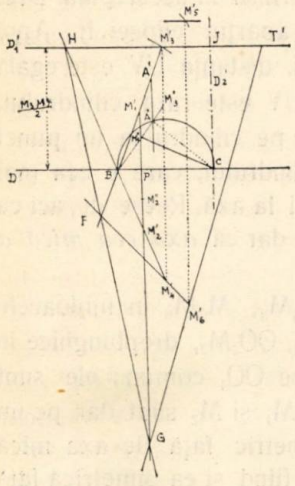


Fig. 4.

Cinci oarecare din punctele M'_1, M'_2, M'_3, M'_4, M'_5, M'_6 determină elipsa E' iar al șaselea poate servi ca verificare.

IV. *Determinarea mărimei axei mici a elipsei.* Elipsa nu se poate trasa cu rigla și cu compasul de cât prin puncte. Pentru a găsi o soluțiune în cadrul obișnuit al geometriei elementare, putem proceda astfel. Fie T'_1 al doilea punct de intersecțiune al lui D'_1 cu elipsa E', primul fiind M'_1. Să considerăm exagonul $M'_3M'_1M'_2M'_4M'_6T'$ înscris în elipsa E'. Laturile lui opuse M'_3T' (adică D'_1) și $M'_2M'_4$ și taie în H, laturile opuse $M'_3M'_1$ și $M'_4M'_6$ se taie în F iar laturile opuse $M'_1M'_2$ și M'_6T' se taie în G. După teorema lui PASCAL, punctele lui H, F, G trebuie să fie coliniare. De aci scoatem următorul mijloc de a determina pe T'. Unim punctele H și F, care sunt determinate, prin o dreaptă care taie dreapta $M'_1M'_2$ în G. Unim acest punct cu M'_6 prin o dreaptă care taie pe D' în T'.

Coarda M'_3T' din elipsă fiind paralelă cu axa mică, perpendiculara D'_2 dusă pe D' în mijlocul J al lui M'_3T' este dirijată după axa mare a elipsei. Intersecția C al lui D' cu D'_2 este prin urmare centrul elipsei E', și corespunde lui N din Fig. 1.

Ca să găsim mărimea axei mici, să presupunem că rotim planul L' în jurul lui D și că proiectăm necontenit elipsa pe poziținea primitivă a planului L'. (Foaia desemnului). Axa mare se va proiecta după drepte din ce în ce mai scurte și va avea o lungime nulă când L' va ajunge perpendicular pe poziținea lui primitivă. Va fi dar o poziținea a lui L' la care axa mare se va proiecta cât axa mică. Fie L'' acea poziținea a lui L'. Atunci elipsa, având cele două axe egale, va deveni un cerc. Să presupunem că în acea poziținea punctele M'_1 și M'_3 se proiectează în M''_1 și M''_3 pe per-

pendiculare duse din M'_1 şi M'_3 pe D. Coarda $M'_1M'_3$ taie axa de rotaţie D în B şi prin urmare şi proiecţia ei $M''_1M''_3$ va trece prin B, căci B fiind pe D, rămâne fix când planul L' se roteşte.

Fie acum A' mijlocul coardei $M'_1M'_3$ a elipsei, şi A'' mijlocul coardei corespondente $M''_1M''_3$ a cercului. Punctul A'' se va găsi pe perpendiculara dusă din A' pe D, căci pe această perpendiculară se mişcă proecţiunea lui A' când L' se roteşte. De altă parte $M''_1M''_3$ fiind o coardă a unui cerc, mijlocul ei A'' este proiecţiunea centrului C pe acea coardă. Unghiul BA''C este prin urmare drept. De aci rezultă următoarea construcţiune pentru punctul A''. Pe BC ca diametru descrim un semicerc. Din A', mijlocul lui $M'_1M'_3$, ducem o perpendiculară pe D care taie semicercul în A''. Unim B cu A'' şi căutăm intersecţiile acestei drepte cu perpendicularele duse din M'_1 şi M'_3 pe dreapta D. Intersecţiile acestor perpendiculare cu A''B ne dau punctele M''_1 şi M''_3. Distanţele egale CM''_1, CM''_3 sunt razele cercului după care se proiectează elipsa din L'' pe L'. Această rază este însă semiaxa mică a elipsei, care a rămas invariabilă în timpul rotaţiunii. Dublul acestor lungimi ne dă prin urmare diametrul căutat al cilindrului.

IULIAN ALEXIU
Elev Inginer.

Acestei probleme i s'a dat multe soluţii practice. (Vezi Anul XXXV. pag. 102, 221, 302 şi Anul XXXVII pag. 385) de D-nii: I. B. FLORESCU, Il ALEXIU, N. PATRAULEA şi J. AURIAN. După cum am anunţat la pag. 302 din Anul XXXVI, prima soluţie matematică mi-a fost comunicată de D-l Inginer ION CHIŢULESCU. Soluţia D-sale erea bazată tot pe reproducerea pe un plan a unor puncte determinate pe o secţiune plană într'un cilindru, iar executarea construcţiilor erea dedusă pe baza unor epure de geometrie descriptivă. In urmă am mai primit soluţiuni bazate pe acelaşi principiu dela D-nii: N. PATRAULEA, ULPIU FLORESCU şi J. AURIAN însă în aceste soluţiuni, sau nu erea totul demonstrat, sau aveau unele scăpări din vedere, sau nu ţineau seamă de condiţiunile speciale în care se obţin punctele pe cilindru. De astfel, după cum a arătat, şi D-l J. AURIAN problema determinării axelor unei elipse când i se cunosc cinci puncte este tratată în diferite uvrage. Soluţia dată de D-l IULIAN ALEXIU mai sus are avantagiul că poate fi urmărită cu cunoştinţe minime de geometrie elementară ale elipsei.

I. I.

PROBLEMA 2359. *Să se demonstreze că sistemul:*

$$x^4 + y^4 = 4\lambda \quad ; \quad (x^3 - y^3)(x - y) = (4 - \sqrt{6})\lambda$$

are drept consecinţă

$$(x^6 + y^6)(x^2 + y^2) = 18\lambda^2$$

oricare ar fi λ *şi să se rezolve.*

E. N. Barisien.

Să punem pentru prescurtare:

$$4\lambda = \alpha,\ (4 - \sqrt{6})\lambda = \beta \quad ; \quad x^2 + y^2 = u\ ,\ xy = v. \qquad (1)$$

Sistemul dat devine:

$$u^2 - 2v^2 = \alpha\ ,\ (u + v)(u - 2v) = \beta \qquad (2)$$

sau încă:

$$u^2 - 2v^2 = \alpha\ ,\ uv = \alpha - \beta. \qquad (3)$$

Observând acum că:

$$x^6 + y^6 = u(u^2 - 3v^2),$$

urmează să arătăm că (3) are drept consecinţă relaţiunea:

$$u^2(u^2 - 3v^2) = 18\lambda. \qquad (4)$$

Deoarece u nu poate fi zero, decât în cazul când $\lambda = 0$, caz banal, putem scrie ecuaţiunea a doua a sistemului (3) sub forma:

$$u^4 - 2u^2v^2 - \alpha u^2 = 0,$$

sau, ţinând seamă că:

$$uv = \alpha - \beta$$

sub forma:

$$u^4 - \alpha u^2 - 2(\alpha - \beta)^2 = 0, \qquad (4)$$

sau încă:

$$u^4 - 4\lambda u^2 - 12\lambda^2 = 0,$$

care dă pentru u^2 două valori:

$$u^2 = 6\lambda \quad \text{şi} \quad u^2 = -2\lambda$$

şi deducem respectiv:

$$\begin{cases} u = \varepsilon\sqrt{6\lambda} \\ v = \lambda\sqrt{6} : \varepsilon\sqrt{6\lambda} = \varepsilon\sqrt{\lambda} \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} u = \varepsilon'\sqrt{-2\lambda} \\ v = \varepsilon'\sqrt{-3\lambda} \end{cases} \qquad (5)$$

ε şi ε' fiind egali cu ± 1.

Calculând expresiunea $u^2(u^2 - 3v^2)$, pentru primul sistem de soluțiuni, avem: $u^2(u^2 - 3v^2) = 6\lambda \cdot 3\lambda = 18\lambda^2$, relațiunea cerută.

Pentru al doilea sistem de soluțiuni avem:

$$u^2(u^2 - 3v^2) = -2\lambda\,(-2\lambda + 9\lambda) = -14\lambda^2. \qquad (6)$$

Considerând sistemul corespunzător relațiunii (4), avem:

$$x^2 + y^2 = \varepsilon\sqrt{6\lambda}\ ,\quad x \cdot y = \varepsilon\sqrt{\lambda} \qquad (7)$$

care conduce la rezolvarea ecuațiunii:

$$z^4 - \varepsilon\sqrt{6\lambda}\, z^2 + \lambda = 0\ ,\ (\varepsilon = \pm 1) \qquad (8)$$

dând sistemul de soluțiuni:

$$\begin{cases} x^2 = \varepsilon\sqrt{\dfrac{\lambda}{2}}\,(\sqrt{3} + 1) \text{ și reciprocul său} \\ y^2 = \varepsilon\sqrt{\dfrac{\lambda}{2}}\,(\sqrt{3} - 1)\ ;\ (\varepsilon = \pm 1)\,. \end{cases} \qquad (9)$$

In acelaşi fel se rezolvă al doilea sistem.

Numărul sistemelor de soluțiuni (x, y) se stabilește ușor pentru fiecare sistem de ecuațiuni.

Au rezolvat problema D-nii: Ion C. Vasiliu (Elev inginer), Cristian I. Râmniceanu (cl. VII Lic. Militar, Iași).

O. N. Ț.

PROBLEMA 2440. *Să se găsească toate numerele de trei cifre, care divizate prin suma cifrelor lor, să ne dea un patrat perfect.*

C. Mitescu.

Fie m^2 și r două numere întregi iar abc numărul căutat. Conform enunțului trebue să avem

$$(1) \qquad 100a + 10b + c = (a + b + c)\,m^2 + r$$

căci nu se precizează dacă împărțirea lui abc prin $a + b + c$ se face exact sau nu. Avem

$$(2) \qquad r < a + b + c \leqslant 27.$$

Dacă cel puțin una din cifrele b și c e diferită de zero, suma $a + b + c > a$ și deci m^2 are 2 cifre. Dacă b și c sunt nule, evident că m^2 este 100. Deci

$$m^2 \leqslant 100.$$

Vom da lui m^2 pe rând toate valorile posibile mai mici ca 100, excluzând valoarea 1 căci $a+b+c$ şi r sunt cel mult 27, suma lor nu poate fi de 3 cifre.

1°. $m^2 = 4$. Din (1) se scoate

$$96a + 6b = 3c + r$$

egalitate imposibilă căci $3c$ şi r fiind cel mult 27, membrul II este cel mult 54 în vreme ce membrul I este cel puţin 96 deoarece $a \neq 0$.

2°. $m^2 = 9$; (1) devine

$$91a + b = 8c + r$$

care nu are loc decât pentru

$$a = 1 \quad ; \quad b = 0 \quad ; \quad c = 8$$

dar

$$108 = 9 \times 12 + 10$$

nu este soluţie.

3°. $m^2 = 16$. Egalitatea (1) devine

$$84a = 6b + 15c + r$$

$$\therefore \quad r = 3r' < 27$$

(3) $$\therefore \quad 28a = 2b + 5c + r'.$$

Dăm în (3) lui b, c, r' respectiv valorile 9, 9, 3, maxime, se găseşte că $28a$ poate fi cel mult 72 deci a cel mult 2.

Vom face acum în (3) pe a egal cu 1, apoi dăm lui b valorile consecutive dela 0 la 9 şi se deduc valorile corespunzătoare pentru c şi r'. In încercările de făcut se va ţine seamă că $c < 6$ deoarece altfel $5c > 28$ în (3). Se obţine ca rezultat sub formă de tabel

pentru $a = 1$:

b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
c	4,5	4,5	3,4,5	3,4,5	2,3,4	2,3	1,2,3	1,2	1,2	0,1,2

Din numerele abc care se formează cu aceste cifre, sunt soluţii ale problemei următoarele 6 :

$$115 = 7 \times 16 + 3 \; ; \; 134 = 8 \times 16 + 6 \; ; \; 144 = 9 \times 16$$

$$163 = 10 \times 16 + 3 \; ; \; 182 = 11 \times 16 + 6 \; ; \; 192 = 12 \times 16.$$

Procedând la fel pentru $a = 2$ se găsește

b	4	5	6	7	8	9
c	9	9	8	8	8,7	6,7

de unde se deduc următoarele 7 soluțiuni

$249 = 15 \times 16 + 9$; $259 = 16 \times 16 + 9$; $268 = 16 \times 16 + 12$

$278 = 17 \times 16 + 6$; $288 = 18 \times 16$;

$287 = 17 \times 16 + 15$; $297 = 18 \times 16 + 9$.

Pentru $a = 3$ nu se găsesc soluțiuni.

4°. $m^2 = 25$. Relațiunea (1) devine

(4) $$25a = 5b + 8c + r' \quad ; \quad r' < 9.$$

Deoarece câtul lui abc prin $a + b + c$ începe cu 2 înseamnă că

$$10a + b < 3a + 3b + 3c$$

$$\therefore \quad 7a < 2b + 3c.$$

La fel, și pentru același motiv

$$b + 2c \leqslant 8a.$$

Procedăm ca la 3° plecând dela (4) și ținând seamă de ultimele 2 neegalități și găsim următoarele 15 soluțiuni:

$103 = 4 \times 25 + 3$; $150 = 6 \times 25$; $206 = 8 \times 25 + 6$

$225 = 9 \times 25$; $253 = 10 \times 25 + 3$; $281 = 11 \times 25 + 6$

$309 = 12 \times 25 + 9$; $328 = 13 \times 25 + 3$; $337 = 13 \times 25 + 12$

$356 = 14 \times 25 + 6$; $375 = 15 \times 25$; $384 = 15 \times 25 + 9$

$459 = 18 \times 25 + 9$; $478 = 19 \times 25 + 3$; $487 = 19 \times 25 + 12$

5°. $m^2 = 36$. Urmând ca la 4° se găsesc următoarele 13 soluțiuni:

$324 = 9 \times 36$; $361 = 10 \times 36 + 1$; $435 = 12 \times 36 + 3$;

$472 = 13 \times 36 + 4$; $509 = 14 \times 36 + 5$; $583 = 16 \times 36 + 7$;

$648 = 18 \times 36$; $657 = 18 \times 36 + 9$; $694 = 19 \times 36 + 10$;

$759 = 21 \times 36 + 3$; $768 = 21 \times 36 + 12$; $796 = 22 \times 36 + 4$

$879 = 24 \times 36 + 15$.

6°. $m^2 = 49$, se găsesc la fel următoarele 14 soluţiuni

$441 = 9 \times 49$; $542 = 11 \times 49 + 3$; $643 = 13 \times 49 + 6$

$735 = 15 \times 49$; $744 = 15 \times 49 + 9$; $790 = 16 \times 49 + 6$

$836 = 17 \times 49 + 3$; $882 = 18 \times 49$; $845 = 17 \times 49 + 2$

$891 = 18 \times 49 + 9$; $937 = 19 \times 49 + 6$; $946 = 19 \times 49 + 15$

$983 = 20 \times 49 + 3$; $992 = 20 \times 49 + 12$.

7°. Pentru $m^2 = 64$ avem 10 soluţiuni

$320 = 5 \times 64$; $512 = 8 \times 64$; $521 = 8 \times 64 + 9$

$640 = 10 \times 64$; $704 = 11 \times 64$; $713 = 11 \times 64 + 9$

$832 = 13 \times 64$; $841 = 13 \times 64 + 9$; $905 = 14 \times 64 + 9$

$960 = 15 \times 64$.

8°. $m^2 = 81$ dă numai soluţiunea

$$811 = 10 \times 81 + 1.$$

9°. In fine $m^2 = 100$ dă 9 soluţiuni şi anume

$100 = 1 \times 100$; $200 = 2 \times 100$; $300 = 3 \times 100$; $400 = 4 \times 100$;

$500 = 5 \times 100$; $600 = 6 \times 100$; $700 = 7 \times 100$; $800 = 8 \times 100$;

$900 = 9 \times 100$.

Problema are în total 75 soluţiuni, dintre care 26 sunt soluţiuni pentru cazui când *abc* se *divide exact* prin $a + b + c$ iar câtul este patrat perfect.

Notă. 1°. Problema 2440 a fost propusă în August 1916 în Vol. XXI, de aceea se vor găsi printre rezolvitorii ei numele câtorva membri ai societăţii *Gazeta Matematică*, profesori, ingineri şi militari cari la acea dată erau elevi de liceu.

2°. D-l Ing. O. ORĂNESCU a trimis soluţia completă cu interpretarea dată mai sus şi anume, fără restricţiunea că împărţirea se face neapărat exact. Redijarea soluţiei de faţă, este după acea dată de D-sa pe vremuri.

3°. Au rezolvat problema în cazul împărţirei exacte şi au dat toate cele 26 soluţiuni D-nii: N. I. CIORĂNESCU (pe când era în cl. VII R.); GH. A. APOSTOLESCU; I. I. C. BREZUICA; † TR. A. DORDEA; N. GEORGESCU-ROEGEN; P. I. GHIŞOIU; P. KATZ; GH. MLADIN; D. H. NICOLAU; S.-LT. T. PANAIT; A. RAICU; N. GR. RENŢEA; S.-LT. I. C. SAVIN; D. ŞERBAN-ULMENI; E. ŞTEFĂNESCU; M. I. UNGHIANU şi N. TEODORESCU.

4°. Au considerat cazul împărţirei exacte şi au dat soluţiunile parţiale, arătate în paranteză, în urma numelui, D-nii: U. M. FLORESCU (25); N. N.

MIHĂILEANU (25); I. GH. POPA (25); M. VASILIU (25); I. N. VELLESCU (25); I. C. VOICU (24); N. G. BOTEA (23); D. HAIM (23); T. POPOVICIU (23); C. M. GRECU (20); M. GRÜNBAUM (20); GH. M. PĂUN (20); B. GATAIANȚU (19); G. P. BOERESCU (17); M. D. MOTOC (17); D. ST. MIȘCHINEA (16); V. I. ALIMAN (15); TH. COCEA (15); N. N. COSTACHE (15); D. M. POPESCU (15); C. N. RUSSE (14); N. GH. VOICU (14); I. C. BOIAN (12); P. BLEIWEISS (11); I. C. VASILIU (11); I. TH. POPOVICI (8); I. COȘEREANU (5).

D-l I. GH. POPA a interpretat enunțul în sensul ca restul împărțirei să fie patrat și rezolvând ecuația

$$abc = Mult.\ (a+b+c) + r^2$$

s'a găsit 205 soluțiuni.

GH. B.

PROBLEMA 3925. *Fie un trapez dreptunghiu, în care latura ce cade oblic pe baze este egală cu suma bazelor. Să se demonstreze că perpendiculara dusă din mijlocul laturei adiacentă unghiurilor drepte pe latura opusă, este medie proporțională între cele două baze.*

IULIAN ALEXIU.

Fie trapezul dreptunghiu ABCD, latura AD fiind adiacentă unghiurilor drepte, iar

$$\overline{BC} = \overline{AB} + \overline{DC}\ ; \qquad (1)$$

E și F fiind respectiv mijloacele laturilor AD și BC, iar G piciorul perpendicularei $\overline{EG}$ pe BC.

Soluția I-a dată de D-nii: TITU G. VELICESCU, S.-LT. AURELIAN I. STAN, ION N. CRAIU (Pitești), S.-LT. Th. N. PANAITE (Student București), N. N. MIHĂILEANU (Lic. Constanța), MIRCEA LEONTE A. NEGREA (Student București), I. C. BOIAN, CONST. GH. LUPESCU (Lic. Roman), A. EM. BĂDESCU.

Avem $$\overline{EF} = \overline{BF} = \overline{CF} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2}\ .$$

Cercul descris pe diametrul $\overline{BC}$ este tangent în E la AD și taie pe DC în I astfel că BI || AD.

In triunghiul isoscel EFB ($\overline{FE} = \overline{FB}$) avem:

$$\overline{BG} = \overline{EH}\ ,\ H \equiv (EF\ ,\ BI)\ ;$$

dar $$\overline{EH} = \overline{AB}\ ,\ \text{deci}\ \overline{BG} = \overline{BA} \qquad (2)$$

și conform relației (1) avem:

$$\overline{CG} = \overline{CD}. \qquad (3)$$

In cercul BEC avem însă relația:

$$\overline{EG}^2 = \overline{BG} \cdot \overline{GC} \text{ , deci } \overline{EG}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{CD}.$$

C. C. T. D.

Soluția II-a dată de D-nii: VLADIMIR I. CRIVĂȚ, I. PARAPEANU, TITU G. VELICESCU, C. N. POPESCU, N. N. VELICESCU, MARIN P. CHIȚU, PETRE I. GHIȘOIU, C. N. AVRAM, IULIU DEAC (Turda), S.-LT. FL. RADU, M. I. POPESCU-STĂNEȘTI.

Observând că

$$\overline{EF} = \overline{FB} = \overline{FC} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \text{ , } \overline{EG} = \overline{BH}$$

și că

$$\overline{HF} = \tfrac{1}{2}\,\overline{IC} = \tfrac{1}{2}\,(\overline{DC} - \overline{AB}),$$

din triunghiul dreptunghiu BHF deducem:

$$\overline{EG}^2 = \overline{BH}^2 = \overline{BF}^2 - \overline{HF}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{CD}.$$

C. C. T. D.

Soluția III-a. Având $\overline{EF} = \frac{1}{2}\,\overline{BC}$ triunghiul BEC este dreptunghiu, dar patrulaterele EABG și EDCG fiind inscriptibile avem:

$$\sphericalangle EAG = \sphericalangle EBG \text{ ; } \sphericalangle EDF = \sphericalangle ECF,$$

deci triunghiul AGD este triunghiu dreptunghiu, de unde

$$\overline{EG} = \overline{EA} = \overline{ED} = \overline{BH} \text{ ; însă } \overline{BH}^2 = \tfrac{1}{4}\,\overline{BI}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{CD}.$$

C. C. T. D.

Soluția IV-a dată de D-l N. N. ALDEA (Student București).

Triunghiul BEC fiind dreptunghiu, triunghiurile dreptunghiuri BAE și CDE sunt asemenea și avem:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{ED}} \text{ , sau încă } \overline{AE}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{CD}.$$

Însă având $\sphericalangle FBE = \sphericalangle BEF = \sphericalangle EBA$, triunghiurile dreptunghiuri BAE și BGE sunt egale, deci $\overline{AE} = \overline{EG}$.

C. C. T. D.

Soluția V-a dată de D-nii: MARIUS M. CIOC, GH. OPRESCU, MARIUS MARGULIUS, AL. H. HALPERIN, AUREL I. GROSSU, MIHAIL VELEA, AUREL MIHĂESCU (Lic. Mil. Chișinău).

Fie L intersecția dreptelor BE și CD. Triunghiurile dreptunghiuri BAE și LDE sunt egale, deci $\overline{LD} = \overline{AB}$.

In triunghiul isoscel BCL, mediana $\overline{EC}$ este și înălțime, deci avem în triunghiul dreptunghiu LEC:

$$\overline{ED}^2 = \overline{LD} \cdot \overline{DC} = \overline{AB} \cdot \overline{CD}.$$

Din triunghiurile dreptunghiuri egale EDL și EGB rezultă că

$$\overline{ED} = \overline{EG}.$$

C. C. T. D.

Soluția VI-a dată de D-nii: S.-Lt. I. Zamfirescu, Ioan C. Savin (Școala Milit. Art. Timișoara).

Cercurile de centre B, C, și de raze respectiv $\overline{BA}$, $\overline{CD}$ având distanța centrelor egală cu suma razelor sunt tangente exterioare, iar tangenta interioară comună trece prin mijlocul E al tangentei lor exterioare AD (deci ea este chiar $\overline{EG}$) și avem:

$\overline{EG} = \overline{EA} = \overline{ED}$. Punând $\overline{AB} = r$ și $\overline{CD} = R$ avem:

$$\overline{EG}^2 = \frac{\overline{AD}^2}{4} = R \cdot r.$$

C. C. T. D.

Soluția VII-a. Prin reducere la absurd se arată că cercul descris pe diametrul $\overline{AD}$ este tangent laturei $\overline{BC}$ în G și triunghiul BEC format de bisectoarele unghiurilor suplimentare ABC și BCD este dreptunghiu, deci

$$\overline{EG}^2 = \overline{BG} \cdot \overline{GC} = \overline{AB} \cdot \overline{DC}.$$

C. C. T. D.

Observarea I. Domnii Emilian Mereuță și I. C. Șova-Grigoreni au dat o soluțiune cu ajutorul geometriei analitice.

Observarea II. Domnii Vladimir I. Crivăț, Ioan C. Savin, Nicolae N. Velicescu, N. N. Mihăileanu, au arătat, servindu-se de proprietatea enunțată, cum, cu două lungimi *a* și *b* după voie, se pot construi trapeze dreptunghiuri în condițiunile problemii.

Observarea III. Această construcție pe lângă interesul direct pe care îl prezintă mai servește a da o demonstrație geometrică proprietății: *media aritmetică a două lungimi este mai mare ca media geometrică a acelorași lungimi.*

Observarea IV. Domnul I. N. Craiu observă că problema sub altă formă, a fost propusă și la Examenul de admitere al Școalei Politehnice București în anul 1928.

O. N. Ț.

PROBLEMA 3989. *Se consideră o hiperbolă echilateră cu centrul în* O *şi cu vârfurile în* A *şi* A'. *O paralelă la* AA' *taie ramura care trece prin* A *în* M *şi pe cea care trece prin* A' *în* N. *Fie* C *şi* D *punctele în care* MN *întâlneşte tangentele în* A *şi* A' *la hiperbolă. Se cere:*

1. *Să se demonstreze că punctele comune dreptelor* OC, A'M *şi* OD, AN *se află pe un cerc cu centrul în* O.

2. *Să se găsească locul geometric al proecţiei lui* D *pe* AN *şi al proecţiei lui* N *pe* OD.

COL. GH. BUICLIU.

1. Fie

$$y^2 - x^2 = a^2 \quad \text{şi} \quad y = \lambda$$

ecuaţiile hiperbolei şi ale dreptei MN. Rezultă imediat că:

$$M\left(\sqrt{a^2+\lambda^2}\,,\ \lambda\right),\ N\left(-\sqrt{a^2+\lambda^2}\,,\ \lambda\right),\ C(a,\lambda),\ D(-a,\lambda),$$
$$A(a,0),\ A'(-a,0).$$

Ecuaţiile dreptelor OC, A'M sunt:

$$(OC) \qquad y = \frac{\lambda}{a}x$$

$$(A'M) \qquad y = \frac{\lambda}{a+\sqrt{a^2+\lambda^2}}(x+a).$$

Eliminând pe λ între aceste ecuaţiuni să găseşte că punctul M_1, intersecţia dreptelor OC, A'M, descrie cercul

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0.$$

La fel se află că punctul N_1, intersecţia dreptelor OD, AN, descrie acelaşi cerc.

2. Fie P şi Q proecţiile lui D şi N pe AN şi OD.

Locul lui P. Ecuaţiile dreptelor AN şi DP sunt

$$(AN) \qquad y = \frac{-\lambda}{a+\sqrt{a^2+\lambda^2}}(x-a)$$

$$(DP) \qquad y - \lambda = \frac{a+\sqrt{a^2+\lambda^2}}{\lambda}(x+a).$$

Ecuaţia locului lui P se găseşte eliminând pe λ între aceste 2 ecuaţii. Din înmulţirea lor membru cu membru, se deduce:

$$y(y-\lambda) = -(x^2-a^2)$$

$$\lambda = \frac{x^2+y^2-a^2}{y}.$$

Ducând această valoare în ecuația (AN) și făcând toate calculele se găsește că ecuația curbei pe care se mișcă P este

$$(x^2 + y^2 - a^2)\,[y^2 - (x - a)^2] = 2ay\,(x - a)$$

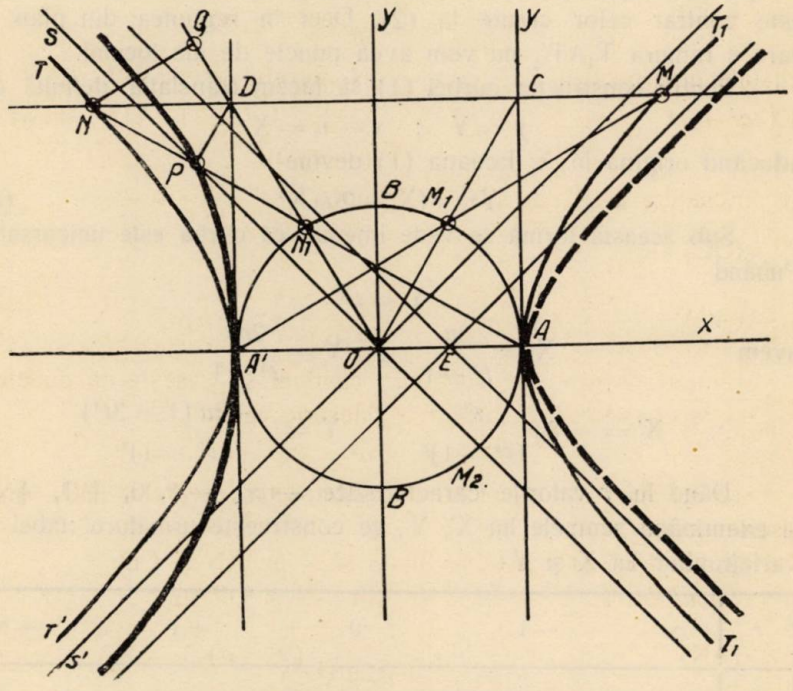
$$\therefore \qquad y^4 = (x + a)\,(x - a)^3 \qquad (1)$$

$$\therefore \qquad y^2 = \pm\,(x - a)\,\sqrt{x^2 - a^2} \qquad (2)$$

care arată ca pentru ca y să fie real trebue

$$x < -a \qquad \text{sau} \qquad a < x \qquad (3)$$

deci P nu se va găsi în regiunea din plan cuprinsă între tangentele AC și A'D în vârfurile hiperbolei.



Din (1) și (2) se vede că curba loc, este simetrică față de axa Ox.

Să examinăm, geometric, pe figură, care este regiunea din plan în care se pot avea puncte P când D se mișcă pe tangenta, în A' dela A' la $+\infty$.

Fie B, B' extremitățile diametrului perpendicular pe AA' în cercul O. S'a văzut la 1) că OD, AN se întâlnesc în N_1 pe O. Când D se mișcă dela A' la $+\infty$ pe tangenta în A' la hiperbolă N_1 se mișcă dela A' la B pe arcul $A'N_1B$ al cadranului II al cer-

cului O şi unghiul N_1OA este obtuz, deci unghiul ON_1A sau $\sphericalangle DN_1N$ este ascuţit, ceeace arată că P, piciorul perpendicularei din D pe AN_1N va cădea pe prelungirea lui AN_1 adică în regiunea din plan situată la stânga lui Oy. — Această observaţie şi neegalităţile (3) duc la concluzia că P se va găsi numai în regiunea din plan din stânga tangentei A'D, adică numai în regiunea în care se află ramura T'A'T a hiperbolei. Când N_1 vine în B atunci AB este paralelă cu asimptota OS şi N este aruncat la ∞ pe ramura A'T. — Când N_1 vine într'un punct M_1 pe arcul BA atunci AM_1 taie ramura AT'_1 a hiperbolei iar D vine într'un punct pe tangenta în A, ceeace este contrar celor cerute la (2). Deci în regiunea din plan în care e ramura $T_1AT'_1$ nu vom avea puncte de ale locului.

Pentru construcţia curbei (1) să facem translaţia definită de

$$y = Y \quad ; \quad x - a = X$$

aducând origina în A. Ecuaţia (1) devine

$$Y^4 = (X + 2a)X^3 \tag{4}$$

Sub această formă se vede imediat că curba este unicursală. Punând

$$Y = tX$$

avem

$$X = \frac{2a}{t^4 - 1} \quad ; \quad Y = \frac{2at}{t^4 - 1}$$

$$\therefore \quad X' = -8a\frac{t^3}{(t^4-1)^2} \quad ; \quad Y' = \frac{-2a(1+3t^4)}{(t^4-1)^2}$$

Dând lui t valorile caracteristice $-\infty$, -1, 0, $+1$, $+\infty$ şi examinând semnele lui X', Y', se construeşte următorul tabel al variaţiunilor lui X şi Y:

t	$-\infty$		-1			0			$+1$			$+\infty$
X'	+	+		+		0	—		—			0
X	0	creşte	$+\infty$	$-\infty$	creşte	$-2a$	descreşte	$-\infty$	$+\infty$	descreşte		0
Y'	—	—	—		—	$-2a$	—		—			0
Y	0	descreşte	$-\infty$	$+\infty$	descreşte	0	descreşte	$-\infty$	$+\infty$	descreşte		0

Curba nu are asimptote paralele cu axele căci nu sunt valori de ale lui t care să facă ∞ numai pe X sau numai pe Y. In schimb pentru

$$t_1 = 1 \quad \text{şi} \quad t_2 = -1$$

X şi Y devin simultan infiniţi, deci curba are 2 asimptote de ecuaţii

$$Y = m_i X + n_i .$$

Direcţiile m_i sunt date de

$$m_i = \lim \frac{Y}{X} = t$$

respectiv pentru t egal cu t_1 şi t_2. Avem

$$m_1 = 1 \quad \text{şi} \quad m_2 = -1.$$

Apoi

$$n_i = \lim. \ (Y - m_i X)$$

respectiv pentru t_1 şi t_2. Se găseşte

$$n_1 = \frac{a}{2} \quad \text{şi} \quad n_2 = -\frac{a}{2}$$

aşa că cele 2 asimptote sunt

$$Y = X + \frac{a}{2} \quad \text{şi} \quad Y = -X - \frac{a}{2}$$

paralele cu asimptotele hiperbolei.

Punctele de inflexiune sunt date de

$$X'Y'' - X''Y' = 0. \tag{5}$$

Dar

$$X'' = 8a \frac{5t^6 + 3t^2}{(t^4 - 1)^3}$$

$$Y'' = 8a \frac{3t^7 + 5t^3}{(t^4 - 1)^3}$$

aşa că (5) devine după înlocuire şi facerea tuturor calculelor

$$(t^4 - 1) = 0$$

care are pe ± 1 ca rădăcini reale. — Dar pentru aceste valori X şi Y devin infiniţi, deci curba nu are puncte de inflexiune.

Cu acestea, forma curbei (4) deci (1) se construeşte cu uşurinţă ca în figură. *Numai* ramura cu linie plină corespunde locului lui P.

Locul lui Q. Ecuaţiile dreptelor OD şi NQ sunt, faţă de sistemul Ox, Oy:

$$y = -\frac{\lambda}{a}x$$

$$y - \lambda = \frac{a}{\lambda}(x + \sqrt{a^2 + \lambda^2}).$$

Eliminând pe λ între aceste ecuaţii se găseşte curba

$$x(x^2 + y^2) + ay^2 = -ax\sqrt{x^2 + y^2}$$

sau trecând la coordonate polare cu axa Ox şi polul O:

$$\rho = -a - a\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}. \qquad (6)$$

Se ştie că ecuaţia

$$\rho = 2b\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$$

este ecuaţia cisoidei lui DIOCLES pentru cercul de diametru $2b$, deci (6) este *concoida cisoidei lui* DIOCLES pentru cercul de diametru OA', vârful cisoidei fiind în O.

Se arată pe aceeaşi cale geometrică dela locul lui P că punctul Q nu se găseşte de cât în regiunea din plan în care se găseşte ramura TT' a hiperbolei.

Observaţiuni. 1°. D-l V. VASU (Student, Cluj) a rezolvat exact problema şi a pus ecuaţiile locurilor sub forma (4) şi (6) însă a dat o construcţie greşită curbei (4).

2°. D-na ŞTEFANIA CĂPITAN TRUŢESCU (Cluj) a dat locul lui P sub forma (1) iar pe al lui Q sub forma unei ecuaţii greoaie. D-sa nu a construit curbele loc în schimb trebue să subliniez forma şi acurateţa impecabilă sub care şi-a prezentat soluţia.

3°. D-l V. I. C. VISSARION a dat forma (6) locului lui Q, dar o formă complicată locului lui P.

4°. D-ra ELEONORA ANTONIU (Cluj) a dat soluţia exactă în coordonate carteziene.

5°. D-nii N. N. PATRAULEA (Lc. Militar) şi N. N. MIHĂILEANU (Constanţa) au rezolvat exact numai punctul (1) al problemei.

6°. Punctul (1) al problemei se poate rezolva direct geometric pe cale elementară. Acest punct pune în evidenţă o construcţie prin puncte a hiperbolei echilatere când se cunoaşte axa AA'. Iată cum: Se ia un punct N_1 pe cercul de diametru AA' şi se construeşte intersecţia N a lui AN_1 cu paralela din D la AA'.

7°. Punctul P este mijlocul lui N_1N căci triunghiul NDN_1 este isoscel.

GH. B.

*EXERCIŢII

14. Care sunt numerele de două cifre ale căror patrate se termină cu rădăcina lor?

PANAIT C. MAZILU.

R. Numerele de două cifre căutate se pot termina cu 0, 1, 5 sau 6, căci sunt singurele ale căror patrate se termină cu rădăcina lor.

Ţinând seama de grupele de două cifre cu care se poate termina un patrat perfect ne rămâne să ridicăm la patrat următoarele 10 numere:

21, 41, 61, 81 ; 25 ; 16, 36, 56, 76 şi 96.

Se găsesc două soluţii

$$25^2 = 625 \quad \text{şi} \quad 76^2 = 5776.$$

15. Să se calculeze suma:

$$2 + 13 + 106 + 1010 + 10015 + \ldots$$

TRAIAN PREDOESCU.

R. Observăm că termenii sumei date se pot scrie sub forma:

$$1 + \frac{1^2+1}{2};\ 10 + \frac{2^2+2}{2};\ 10^2 + \frac{3^2+3}{2};\ 10^3 + \frac{4^2+4}{2};\ \ldots\ 10^{n-1} + \frac{n^2+n}{2}.$$

Făcând suma lor pe care s'o notăm cu S, avem că:

$$S = 1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^{n-1} + \frac{1}{2}(1 + 2 + 3 + \ldots + n + 1^2 + 2^2 + 3^2 \ldots + n^2)$$

$$= \frac{10^n - 1}{9} + \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$

adică suma este:

$$S = \frac{10^n - 1}{9} + \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{2n+1}{3}\right).$$

PROBLEME PROPUSE

*4296 [1]). Să se arate că:

$$\frac{\cos(3\alpha+\beta)+2\cos 2(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+3\beta)}{\cos 4\alpha+4\cos(3\alpha+\beta)+6\cos 2(\alpha+\beta)+4\cos(\alpha+3\beta)+\cos 4\beta}=\frac{1}{4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$\frac{\cos(4\alpha+\beta)+3\cos(3\alpha+2\beta)+3\cos(2\alpha+3\beta)+\cos(\alpha+4\beta)}{\cos 5\alpha+5\cos(4\alpha+\beta)+10\cos(3\alpha+2\beta)+10\cos(2\alpha+3\beta)+5(\alpha+4\beta)+\cos 5\beta}$$

$$=\frac{1}{4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

N. C.

4331. Se dă numărul 75600 şi se cere:

a) Să se desfacă într'un produs de doi factori astfel ca primul să se împartă exact cu al doilea. Să se dea toate soluţiile.

b) Să se desfacă într'un produs de trei factori astfel ca primul să se împartă cu al doilea, iar al doilea factor să se împartă exact cu al treilea.

c) Se poate merge mai departe cu descompuneri în acest sens?

Nu se va admite numărul 1 ca factor în nici unul din cele trei cazuri de mai sus.

I. Ionescu.

4332. Care sunt numerele întregi divizibile prin rădăcina cubică a lor cu o aproximaţiune de o unitate?

Care sunt acelea la care această rădăcină este cel mai mic divizor, superior unităţii?

V. Thébault.

4333. Doamna şi Domnul Z. convin să joace la ruletă în următoarele condiţiuni: 1°. Fiecare din soţi va juca pe o culoare determinată, de ex. Doamna pe roşu şi Domnul pe negru; 2°. Miza iniţială va fi de un pol; după fiecare pierdere miza se va dubla, după fiecare câştig se va reîncepe cu miza iniţială.

[1]). Problema cu acest număr publicată în Nr. 1/XXXIX al „G. M." fiind cunoscută, se înlocueşte cu prezenta.

După un număr oarecare de jocuri, jucate în asemenea condiţiuni, capitalul soţilor Z. a rămas neschimbat. Atunci soţii Z. mai joacă odată — şi se scoală dela masă, fiecare cu câte 15 poli.

Se cere:

1°. Numărul jocurilor la care au participat.

2°. Să se reconstituiască pe cât posibil partida jucată.

Se va propune că în timpul partidei jucate, *zero* n'a ieşit niciodată.

MIRON NICOLESCU.

4334. Se dă triunghiul ABC înscris în cercul O şi pe laturile AB şi AC se iau respectiv punctele M şi N de natură a avea:

$$AB : AM = AC : AN = m : n.$$

Pe dreapta MN se ia punctul P astfel ca să avem:

$$MN : MP = m : n.$$

Se cere locul geometric al lui P când BC e fixă iar A descrie cercul O.

I. I. PETRESCU.

4335. Se consideră două drepte într'un plan, concurente în A, Printr'un punct S din plan se duce o dreaptă D care intersectează pe celelalte două drepte în punctele B şi C.

Prin A, B, C, se duce un cerc. Se cere locul geometric al centrului cercului, când dreapta D se roteşte în jurul punctului S. Se cere şi locul geometric al centrului de greutate al triunghiului ABC.

D. ARG. DUMITRESCU.

4336. $a_1, a_2, \ldots a_n$ fiind cantităţi oarecari, să se demonstreze identităţile

$$s_n^k = \Sigma s_{n-1}^k - \Sigma s_{n-2}^k + \ldots + (-1)^{n-1} \Sigma a_i^k \; ; \; k = 1, 2, \ldots n-1$$

în care s_p sunt sumele a câte p din cantităţile date, luate în toate modurile posibile. Exemplu:

$$(a+b+c)^2 = (a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2 - a^2 - b^2 - c^2.$$

M. GHERMĂNESCU.

4337. Să se stabilească identitatea:

$$\frac{1}{(2k+1)!} - \frac{1}{2.1!(2n-1)} \cdot \frac{1}{(2k-1)!} + \frac{1}{2^2.2!(2n-1)(2n-3)} \cdot \frac{1}{(2k-3)!}$$

$$- \ldots + (-1)^k \frac{1}{2^k\, k!\,(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2k+1)}$$

$$= 2^k \frac{(n-k-1)(n-k-2)\ldots(n-2k)}{(2k+1)!(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2k+1)}.$$

Gh. Th. Gheorghiu.

*4338. Dacă între laturile unui triunghiu sferic avem:

$$a + b + c = 180^0$$

atunci unghiurile aceluiaşi triunghiu satisfac relaţia:

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1.$$

Gh. Vasiliu.

4339. Să se demonstreze identitatea:

$$r^3 \sum (r_a + r_b - 2r_c)^3 = 3(a^2 + b^2 - 2c^2)(b^2 + c^2 - 2a^2)(c^2 + a^2 - 2b^2)$$

notaţiile fiind cele obişnuite.

Sub-Lt. I. C. Savin.

4340. Intr'un plan vertical raportat la două axe rectangulare Ox orizontal, Oy vertical în jos, se dă o curbă $y = f(x)$, cu concavitatea îndreptată către Oy negativ, pe care este silit să alunece fără frecare un punct greu M. Mărginind curba la primul cadran, se cere să se arate că se pot determina condiţiunile iniţiale şi o presiune paralelă cu Ox, a cărei intensitate să fie funcţiune doar de abscisa punctului M, aşa fel ca viteza în orice moment să aibe intensitatea egală cu o putere a presiunii şi după părăsirea curbei, punctul să cadă pe verticală sub acţiunea gravitaţiei.

Să se studieze complet cazul când puterea este $\frac{1}{2}$ şi curba o parabolă care are drept ax axul Oy şi focarul în origine.

Rudolf Woinarosky.

Rectificare. La problema Nr. 4237, propusă în Nr. 3/XXXIX se va înlocui exponentul 504 prin 512. Deasemenea, se va lua în consecinţă:

$$n = 1, 2, \ldots 32.$$

M. Gh.

Articolele, notele şi problemele însemnate cu * se referă la matematicile elementare (cursul de liceu).

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Alexiu Iulian (4309, 23); *Avram C. Subloc.* (4311, 23); *Botez S. Mihail* (E, N); *Budeanu Const.* (4293, 323, E); *Bungeţeanu D. Preduţa* (4253, 96, 329); *Caracudovici Margareta* (4309); *Ceauşescu Vasile* (4197, 272, 79, 91, 309, 23, 24); *Cocea Gh. Th.* (4124, P); *Coşniţă C.* (N, P); *Coşovliu St.* (4309); *Cseke Wilhelm* (4309, 12, 23, 29); *Elefterescu Ov. Marcel* (4244, 96); *Gavrilescu Const.* (4291, 93); *Geier H. Alfred* (4294, 309, 12); *Ghiocel V. Vasile* (4309); *Grigorescu Vintilă* (4173); *Grigoriu I. C.* (4310); *Haimer Carol* (4312, 29); *Hornstein H. S.* (4296, 323); *Ivănescu Cezar* (4272, 93, 4305, 09); *Mănescu M.* (4093, 129, 40, 228, 37, 308, 09, 17); *Margulius M.* (4309); *Marteş V. Gr.* (4279, 309); *Mateiu Alex.* (4293); *Mateiu F. I.* (4311); *Mavrodin D. D.* (4309); *Mazilu C. Panait* (4309); *Mehedinţi D-tru* (4291, 93); *Mihăileanu N. N.* (2539, 3430, E); *Milu N.* (4313); *Negrea A. Mircea-Leonte* (4083, 244, 79, 97, 309, 12, 16, 23, 24, 25); *Panaite C. Tib.* (4309); *Petrescu I. I.* (4257, 58, 310); *Popescu M. Ioan* (4329); *Popica Eugen* (4309, 10); *Predoescu I. Marin* (4309); *Predoescu M. Traian* (E); *Procopiescu M.* (4291); *Şabac Gh. Ion* (4173, 223, 44, 82, 93, 311); *Sager N. Iancu* (4273, 94, 309, 10, 17, 23, 24); *Silaş G.* (4296, 309, 10, 17); *Simionescu D. Gh.* (P); *Şova C. Ioan* (4309); *Stănculescu I. Gh.* (4296, 309, 17); *Stăneşti Mihail* (4179, 96, 244, E); *Ştirbu Gh.* (4309); *Şuşală Gh.* (4309); *Thébault V.* (A, N, P); *Tica P. Marin Gall* (4309); *Varlam M. Petre* (4108, 87, 96, 253, 76, 308); *Vissarion I. C. V.* (4310, 23); *Zaharescu Ilie* (4309).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie **pe o singură parte a foii şi nu se vor tratà mai multe chestiuni diferite pe aceiaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică, ca** pe o foaie de caet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecțiunea „GAZETEI MATEMATICE“

«Gazeta Matematică» vinde ani completi broșați cu prețul de 400 lei volumul, afară de volumele: X, XVII, XVIII, XIX, XX și XXI care se vând cu prețul de 500 lei volumul.

Volumele: I, XV și XXV sunt epuizate.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu** și **V. Cristescu**, *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **N. Abramescu**, *Lecțiunile de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediția IV revăzută și adăogită*, 1924 (Epuizată).

3. **A. G. Ioachimescu** și **G. Țițeica**, *Culegere de probleme de mecanică și geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme și o planșă) (Epuizată).

4. **Tr. Lalescu** și **Șt. N. Mirea**, *Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografie* (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu**, *Tratat de geometrie analitică*, Fascicola I *Ediția II revăzută și adăogită*, 1923 . . . . . Lei 30,—
Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).
Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).
Idem, Fascicola IV Aplicațiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150,—

6. **Gh. Lazăr**, *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10,—

7. **A. G. Ioachimescu**, *Culegere de probleme de Algebră*, ediția III-a revăzută și îngrijită de *Tiberiu Popoviciu*. 1926. Lei 180,—

8. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu** și **G. Țițeica**, *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

9. **G. Țițeica**, *Culegere de probleme de geometrie* Lei 150,—

La aceste prețuri se vor adăogà taxele poștale pentru expediție.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul.* (Ediția II) Lei 150,—

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plătește înainte și începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamațiunile și cererile pentru cărți din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete numai D-lui: Inginer **Al. D. Bunescu**, Directorul General al Monitorului Oficial și Imprimeriilor Statului, B-dul Elisabeta 29, București I.

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii și orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie și expediție, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Căluşei 23, București 4.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXXIX

NUMĂRUL 6. — FEBRUARIE 1934

BIBLIOTECA CENTRALĂ SIBIIU

SUMARUL

1. Cărţi vechi de matematică (urmare) . . . *I. Ionescu.*
2. Curiosités arithmétiques . . . . . *V. Thébault.*
3. Asupra repartiţiei eforturilor în suprafaţă . *Maior I. Linteş.*
4. Concursul „Gazetei Matematice".
5. Note matematice: 22 — 27.
6. Chestiuni de examen.
7. Bibliografie.
8. Cereri: 235.
9. Diverse.
10. Probleme rezolvate: 1937, 1991, 3857, 4174, 4253, 4272, 4309, 4311. 4323.
11. Exerciţii: 16.
12. Probleme propuse: 4341 — 4350.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1934

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: Colonel **Gh. Buicliu** din Ministerul Apărării Naţionale; **C. D. Orăşanu**, Inginer, Licenţiat în Matematici, Conferenţiar la Şcoala Politechnică «Regele Carol II» din Bucureşti, Profesor la Şcoalele Aeronautice; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice" se vor trimite D-lui Inginer-Şef GH. ILIESCU, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret, Bucureşti 6.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29 Bucureşti 1) în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 691, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 214, 36, 70, 71, 97, 99, 310, 33, 67, 84, 86, 99, 412, 50, 553, 650, 79, 711, 29, 64, 876, 906, 14, 29, 59, 87, 2003, 04, 17, 70, 74, 111, 70, 338, 405, 30, 39, 66, 77, 502, 03, 56, 77, 87, 607, 09, 23, 38, 55, 65, 84, 92, 709, 13, 17, 35, 69, 80, 814, 65, 86, 89, 909, 12, 26, 36, 47, 3005, 45, 69, 81, 127, 61, 69, 208, 30, 55, 60, 98, 300. 04, 09, 10, 16, 18, 50, 405, 12, 24, 25, 45, 72, 89, 93, 522, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 88, 608, 22, 27, 32, 46, 47, 57, 65, 81, 82, 84, 99, 700, 03, 33, 36, 93, 804, 08, 29, 36, 44, 53, 64, 80, 96, 909, 13, 15, 16, 18, 20, 33, 44, 83, 4010, 13, 30, 34, 45, 53, 59, 62, 68, 70, 73, 85, 102, 03, 11, 12, 18, 19, 23, 32, 47, 48, 50, 51, 63, 67, 69, 91, 92, 201, 03, 06, 09, 10, 13, 25, 26, 30, 36, 40, 43, 46, 48, 49, 52, 56, 75, 77, 80, 81, 83, 87, 88, 89, 90, 300, 01, 03, 07, 14, 15, 18, 19, 20, 22, 27, 30, 32, 33, 35, 37, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50.

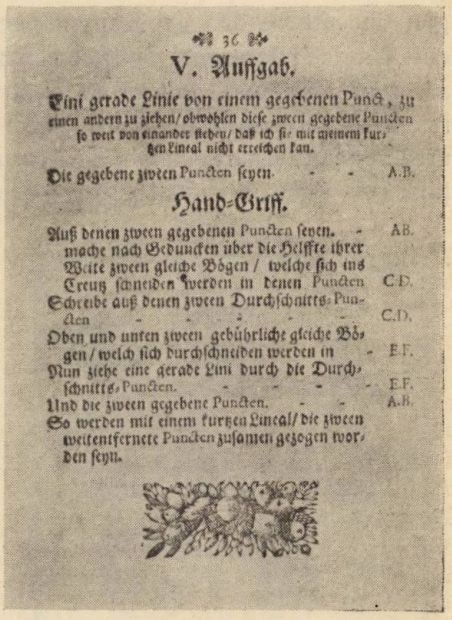
Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii 1 — XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procură dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29. Bucureşti 1), cu preţul de 12 lei.

CĂRȚI VECHI DE MATEMATICĂ

(Urmare dela pagina 167)

Pentru ca să se înlesnească cât mai mult citirea cărții și priceperea chestiunilor, autorul a căutat ca, afară de rari excepțiuni, fiecare chestiune sau construcțiune geometrică să fie dată pe o singură pagină, iar la dreapta, sau la stânga ei, să fie planșa cu figurile respective, care poartă numărul paginei respective de text. Cu modul acesta, nu mai este nevoie a se căuta planșa cu figuri ce corespunde unei chestiuni căci o avem alături și nici nu mai este nevoie a face în text referințe la figuri.

Construcțiunile sunt date fără demonstrațiuni și sunt explicate în detaliu. După enunț se dă trasarea construcțiunii. Paginile sunt scrise cu litere mari, iar literile cu care se notează puncte sau linii nu sunt puse în text ci scoase la marginea din dreapta paginilor. Numerotația paginilor este încadrată în ornamente. Din cauză că pe o pagină se tratează o singură chestiune, rămâneau în partea de jos spații libere mai mari sau mai mici, deseori. Aceste goluri stricând estetica paginilor, autorul le-a umplut cu chenare frumoase, cu diferite ornamente, cu desemne de vase încărcate cu flori sau fructe, etc. Ca exemplu de aranjarea unei pagini, reproduc aci pag. 36 din această carte în care se tratează problema No. 5 de a duce o dreaptă cu o riglă mai scurtă ca distanța punctelor ce determină acea dreaptă.



36

V. Auffgab.

Eini gerade Linie von einem gegebenen Punct, zu einem andern zu ziehen/ obwohlen dieſe zween gegebene Puncten ſo weit von einander ſtehen/ daß ich ſie mit meinem kurtzen Lineal nicht erreichen kan.

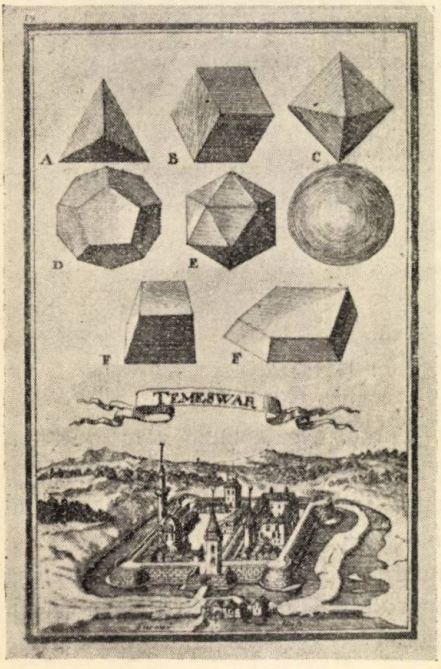
Die gegebene zween Puncten ſeyen. - - A.B.

Hand-Griff.

Auß denen zween gegebenen Puncten ſeyen. - A.B.
mache nach Gedunckten über die Helffte ihrer Weite zween gleiche Bögen / welche ſich ins Creutz ſchneiden werden in denen Puncten C.D.
Schreibe auß denen zween Durchſchnitts-Puncten - - - - - C.D.
Oben und unten zween gebührliche gleiche Bögen / welch ſich durchſchneiden werden in - E.F.
Nun ziehe eine gerade Lini durch die Durchſchnitts-Puncten. - - - - E.F.
Und die zween gegebene Puncten. - - A.B.
So werden mit einem kurtzen Lineal/ die zween weitentfernete Puncten zuſamen gezogen worden ſeyn.

Din cauză că fiecare chestiune de pe o pagină își are planșa ei respectivă cu figuri, se întâmplă dese ori ca pe o planșă să nu fie decât o singură figură. Cu modul acesta, mai la toate planșele

ar rămâne locuri goale, unele foarte mari. Din cele 122 planşe din această carte, numai două sunt complect umplute cu figuri geometrice; la celelalte găsim diferite umpluturi ale golurilor rămase. Astfel, pe unele planşe, figurile se arată a fi desemnate pe pânze desfăşurate ţinute sus de îngeri sau vulturi, pe alte planşe sunt desemnaţi copaci, câmpii, sate, râuri, dueluri, corturi, bătălii, vederi din viaţa dela ţară sau din viaţa militară, etc. Pe cele mai multe din ele, — şi anume 110 planşe, — sunt desemnate foarte bine cetăţi, castele, şi fortificaţiuni, cele mai multe din Ungaria, şi câteva din Austria, Cehoslovacia şi din Jugoslavia. Din Transilvania sunt date întăririle dela finele secolului XVII din *Timişoara, Oradea Mare* şi *Satul Mare*. La finele cărţii este dat un *„Apendice"* de 43 pagini, în care se dau explicaţiuni pentru cele 110 planşe, şi unele date istorice interesante pentru localităţile respective, care după spusa autorului sunt publicate atunci pentru prima dată, ca şi desemnele referitoare. Reproduc aci planşa No. 19 pe care sunt desemnate poliedrele regulate şi neregulate şi pe al cărui gol este dat de semnul fortificaţiilor dela Timişoara. Dau aci şi explicaţiunile referitoare din Apendice.



«*Timişoara.* (Temeswar). Timişoara este un oraş aşezat în Transilvania (Siebenbürgen), bine întărit, şi de natură, şi prin lucrări, şi are un Castel. Numele îi vine dela râul ce curge pe acolo, Temeso, care isvoreşte din munţii Valachiei, în apropiere de oraşul Severin. Acolo sunt două oraşe alăturate, din care unul la răsărit, insula, şi altul către miază noapte, numit în adevăr Timişoara; amândouă, împreună cu Castelul sunt întărite cu şanţuri cu apă adâncă, iar oraşul cel mare are trei porţi, dintre care două apărate cu bastioane de pământ şi de lemn, făcute de mult de spanioli; între oraş şi Castel este un turn de apă.

In anul 1552 acest oraş renumit a fost cucerit de Turci, nu fără mari pierderi din partea lor. Şi a rămas până acum (1698) în puterea lor, deşi Transilvănenii l-au împresurat de două ori».

Putem spune că avem aci o demonstrație matematică în contra faptului afirmat de Unguri că Transilvania a aparținut Ungariei 1000 de ani! Cartea de geometrie de care ne ocupăm ne spune că Timișoara erea a Transilvaniei și că pentru ea luptau Transilvănenii. Ca să se vază mai clar că Transilvania erea diferită de Ungaria, reproduc aci și explicațiunile date pentru Oradea Mare.

Oradea Mare. (Wardein). Se mai numea înainte Grosswardein; ea este cheia de frontieră a Ungariei și Transilvaniei; este un oraș întins cu 3 suburbii, pe râul Sebeskeres numit și Körös sau Kreisch. Clădirile și locuințele acestui oraș sunt foarte rele și joase; din contră Castelul este construit frumos și bine întărit. In acest Castel este o biserică ruinată cu două turle. La o depărtare cam de o milă dela oraș este o baie excelentă sănătoasă și caldă, amenajată cu secțiuni speciale pentru bărbați și femei, însă nu este acolo nici un doctor, așa că lumea se îmbăiază numai de plăcere.

La 1508 OMAR PAȘA a asediat inutil această localitate. In Iulie 1660 a fost luată de ALY PAȘA prin înțelegere cu locuitorii. In anul 1687 a reintrat în mâinile creștinilor.

Iată și notița referitoare la Satul Mare:

Satul Mare. Numit și Zakmar, e situat la frontiera Transilvaniei și e înconjurat de apele ce se unesc acolo Samos și Lapessus. După confluiență se formează o insulă unde este orășelul. In oraș e un Castel de lemn.

In 1564 orășelul a fost cucerit de împărat, devastat și incendiat. La 1564 l'a cucerit Regele Ungariei JOHANNES prin dibăcie. La 1567 a ars și a fost părăsit. La 1605 Satul Mare, după patru luni de asediu, a cedat prin foame lui ȘTEFAN BOTSCHKAY.

Din notițele date aci se vede că teza antirevizionistă română se poate susține și pe baza de tratate matematice.

Este sigur că prin desemnele de întăriturí de tot felul din această geometrie, autorul a căutat să țină încordată atențiunea elevului său arhiduce asupra utilității geometriei la facerea fortificațiunilor și pentru desvoltarea spiritului său războinic. Uneori forma în plan a fortificațiunilor aduce cu poligoanele geometrice ce se studiază pe foaia de alăturea planșei.

Un Prinț, cerând lui EUCLIDE ca să-i găsească o cale mai ușoară pentru ca să poată învăța mai lesne geometria, acesta i-a răspuns: *„Nu există căi regale în geometrie“*. Se poate spune însă că autorul cărții de care ne ocupăm a găsit o asemenea cale.

El a condus în adevăr pe elevul său arhiduce pe o cale admirabilă, punându-i sub ochi o carte frumos tipărită, bogat ilustrată, cu explicațiuni clare și desvoltate, cu chestiuni curioase și intere-

sante, făcându ca privirea să-i fie atrasă de decoruri, ornamente, flori, castele, cetăţi, bătălii, care toate stau alături de cunoaşterea şi desvoltarea geometriei. Avem în adevăr aci aface cu o adevărată cale regală pentru învăţământul geometriei.

Cartea conţine în total 186 pagini, având partea tipărită de 11 cm lăţime cu 15 cm înălţime.

Autorul încheie descrierea construcţiunilor geometrice cu cuvintele :

„Am onoarea"

I. Ionescu.

CURIOSITÉS ARITHMÉTIQUES

1. *a)* Considérons un ensemble de n nombres entiers quelconques $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ dont la somme est s. Avec ces nombres on peut former

$$C_n^p = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p}$$

groupes de p nombres et ces groupes contiennent au total $p.\ C_n^p$ nombres. Par raison de symétrie, parmi ces $p.\ C_n^p$ nombres, chaque nombre de l'ensemble des n considérés est contenu le même nombre de fois, soit

$$\frac{p}{n} C_n^p \text{ fois.}$$

La somme des nombres compris dans ces p groupes s'exprime

$$s \cdot \frac{p}{n} C_n^p = s \cdot \frac{p}{n} \cdot \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p}$$

$$= s \cdot \frac{(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots(p-1)} = s \cdot C_{n-1}^{p-1}.$$

Pour l'ensemble des groupes de $1, 2, \ldots, p, \ldots n$ nombres, on a donc la somme

$$S = s\left[C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + \ldots + C_{n-1}^{n-1}\right] = s \cdot 2^{n-1}. \qquad (1)$$

b) Lorsque s est un carré parfait, S est aussi un carré pour toute valeur *impaire* de n.

Lorsque s est un cube parfait, S est également un cube pour $n = m$. de $3 + 1 = 3q + 1$.

En général, si s est une puissance x-ième exacte, S est aussi une puissance x-ième pour les valeurs de n de la forme $xq + 1$.

c) Pour un nombre donné s, il existe, en général, plusieurs ensembles de n nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tels que

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = s.$$

La somme S de tous les nombres contenus dans tous les groupes de 1, 2, . . . , n nombres que l'on peut former avec $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ est *constante* et égale à $s \cdot 2^{n-1}$.

d) Si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ désignent les n premiers nombres entiers consécutifs 1, 2, . . . , n, la relation (1) devient

$$S = 2^{n-2} \cdot n\,(n + 1)\,^{1}).$$

n et $n + 1$ étant premiers entre eux, pour que S soit un carré parfait, il faut et il suffit, d'abord, en vertu de *b)* que n soit *impair*, puis que l'un des nombres n ou $n + 1$ soit aussi un carré.

La plus petite valeur convenable de $n > 1$, est $n = 49$, pour laquelle

$$S = 2^{47} \cdot 49 \cdot 50 = (2^{24} \cdot 5 \cdot 7)^2.$$

Enfin si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont les cubes des n premiers entiers consécutifs,

$$S = 2^{n-1} \cdot \left[\frac{n\,(n + 1)}{2}\right]^2 = 2^{n-3} \cdot [n\,(n + 1)]^2.$$

Pour toute valeur *impaire* de $n = 2q + 1$, S est un carré :

$$S = [2^q \cdot n\,(n + 1)]^2.$$

2. *a)* Le nombre des nombres de n chiffres différents entre eux que l'on peut former avec m chiffres différents entre eux est le nombre des arrangements de m objets pris n à n, soit

$$A_m^n = m\,(m - 1) \ldots (m - n + 1).$$

Par raison de symétrie, il est évident qu'ii y aura comme chiffre d'un ordre d'unité quelconque donné, les m chiffres différents donnés répétés un même nombre de fois x. La somme des unités d'un ordre quelconque est donc x fois la somme s des m chiffres

1) R. GOORMAGHTIGH, *Journal de* VUIBERT, 43-e année p. 162.

donnés, soit sx, et la somme totale Σ des nombres de n chiffres formés avec m chiffres différents s'écrit

$$\Sigma = \overline{(sx)\,(sx)\ldots(sx)} = sx\,.\,11\ldots11,$$

le dernier facteur étant formé de n chiffres 1 et valant donc

$$10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 10 + 1 = \frac{10^n - 1}{9}\,.$$

Comme

$$mx = \mathrm{A}_m^n,$$

$$x = \frac{1}{m}\,\mathrm{A}_m^n = (m-1)\,(m-2)\ldots(m-n+1),$$

et

$$\Sigma = sx\,.\,\frac{10^n - 1}{9} = \frac{10^n - 1}{9}\,.\,s\,.\,(m-1)\,(m-2)\ldots(m-n+1)$$

$$= \frac{10^n - 1}{9}\,.\,\frac{(m-1)\,!}{(m-n)\,!}\,.\,s. \qquad (2)$$

b) La somme de tous les nombres formés de *dix* chiffres tous différents s'exprime

$$\Sigma = 111111111 \times 45 \times 1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,.\,7\,.\,8\,.\,9.$$

Celles des nombres écrits avec *neuf* chiffres tous différents sont, en posant

$$11111111 \times 1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,.\,7\,.\,8 = \mathrm{P},$$

$$\Sigma_0 = 45\mathrm{P}\ ,\ \Sigma_1 = 44\mathrm{P}\ ,\ \Sigma_2 = 43\mathrm{P}\ ,\ \Sigma_3 = 42\mathrm{P}\ ,\ \Sigma_4 = 41\mathrm{P},$$

$$\Sigma_5 = 40\mathrm{P}\ ,\ \Sigma_6 = 39\mathrm{P}\ ,\ \Sigma_7 = 38\mathrm{P}\ ,\ \Sigma_8 = 37\mathrm{P}\ ,\ \Sigma_9 = 36\mathrm{P},$$

l'indice de Σ étant celui des dix chiffres significatifs qui est exclus.

On en déduit que

$$\Sigma_0 + \Sigma_1 + \ldots \Sigma_9 = 405\,\mathrm{P} = 45 \times 9\,\mathrm{P} = 9\,\Sigma_0,$$

d'où

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 + \ldots + \Sigma_9 = 8\,\Sigma_0,$$

puis que

$$\Sigma_0 + \Sigma_9 = \Sigma_1 + \Sigma_8 = \Sigma_2 + \Sigma_7 = \Sigma_3 + \Sigma_6 = \Sigma_4 + \Sigma_5 = 81\mathrm{P}.$$

c) La somme des nombres formés exclusivement de chiffres *pairs* et différents, zéro compris, est

$$\Sigma = 11111 \times 20\,.\,1\,.\,2\,.\,3\,.\,4.$$

Celle des nombres, écrits avec des chiffres tous *impairs* et différents, égale

$$\Sigma' = 11111 \times 25 . 1 . 2 . 3 . 4,$$

et

$$\Sigma + \Sigma' = 11111 \times 45 . 1 . 2 . 3 . 4,$$

puis

$$5\Sigma = 4\Sigma'.$$

V. THÉBAULT
Le Mans (France).

ASUPRA REPARTIȚIEI EFORTURILOR IN SUPRAFAȚĂ

In diferitele sisteme supuse la eforturi, calculul clasic descompune eforturile dealungul barelor sistemului, de unde rezultă că sistemul trebue constituit din bare articulate, sau încastrate.

In cazul unor sisteme cu suprafețe plane, cilindrice, ori strâmbe calculul clasic nu mai corespunde însă.

Analog staticei barelor, voiu încerca a schița principiile generale ale unei statici a «suprafețelor plane».

Condițiunile de strictă indeformabilitate ale unui sistem de suprafețe plane este:

1) $$M = 2F - 3$$

unde M este numărul de muchii și F numărul de fețe.

Relațiunea însă dintre muchii și fețe este:

2) $$M = a . F - b$$

unde a și b sunt coeficienți întregi, depinzând de forma piramidală, prismatică, etc...

Considerând un sistem de forțe plane acționând dealungul unor plane, atunci rezultanta lor se poate obține construind o *dinamică*, analog unor «vectori-forță» în plan, apoi un *funicular* în spațiu și astfel se determină «forța-plană-rezultantă», care fiind raportată la aria planului respectiv devine unitară.

Și aci se poate enunța teorema:

«Pentru ca un sistem de forţe plane, situate în spaţiu, să fie în echilibru, este suficient şi necesar ca dinamica şi funicularul să se închidă».

De aici rezultă şi condiţiunile optime în care poate să reziste un contur închis.

In general toate teoremele de statică plană a dreptelor, pot fi extinse în cazul staticei feţelor-plane în spaţiu.

In cazul suprafeţelor cilindrice sau strâmbe, se poate aplica teoria feţelor-plane, prin consideraţiuni de analiză infinitezimală.

Observaţiuni:

1) Teoria «forţelor-plane» ne face să credem în posibilitatea creerei unei *teorii de «vectori-plani»*, unde clasicul vector-linear va fi înlocuit printr'un plan de formă adecuată cazului.

2) In general geometria şi mecanica «forţelor-plane» este o transmutare a geometriei clasice cu un grad mai sus, pe scara spaţiilor, unde punctul devine dreaptă (muchie), şi dreapta devine plan (faţă).

MAIOR I. LINTEŞ.

CONCURSUL „GAZETEI MATEMATICE"

După cum s'a anunţat în numărul 1, din Septemvrie 1933 al *Gazetei Matematice,* anul acesta se va ţine un concurs de Matematici între elevii liceelor din ţară şi elevii anilor pregătitori de pe lângă şcoalele superioare.

Data înscrierei la acest concurs a fost până la 31 Decemvrie 1933. Dintre candidaţii înscrişi până la această dată au fost admişi a se prezenta la concurs următorii:

Clasa IV: *Bădescu N., Boian D. E., Caraman A., Cioc I. D., Florea G., Popescu M. G., Streder I., Teodoreanu N., Vasilache G.*

Clasa V: *Ananiescu A., Anca I. I., Blănaru I., Bogdan G. I., Bucur V., Buzincu I., Chirea A. I., Cojocaru P. P., Dumitrescu O. V., Enache D. I., Fenichi A., Gaciu A., Ionescu V., Matei I. I., Metea V., Moldovan L., Munteanu S., Nedelescu N. A., Şiara V., Ştefănescu P. G., Stoian I., Stroescu A. I., Valentin I. G., Vasu N., Vonica I. I.*

Clasa VI: *Antochi I. C., Bursan C., Ceauşescu F. V., Ciucă I. I., Cozma V., Creangă V., Dăscălescu V. C., Decean G. G., Dobrescu D. P., Dumitriu T., Dumitriu E. V., Florescu G. H., Gâscă C. V., Gavrilescu N. C., Georgescu G. A., Grigorescu V., Grigoriu I. V., Lebădă I. D., Mărmureanu G., Mercureanu S. I., Mihalache V. I., Mitu I. N., Neagu I. T., Preda C. C., Procopiescu M., Radu I. I., Rusu V. G., Şabac G. I., Ştirbu I. G., Stoicescu D., Stroe I. I., Ţarălungă G. D.*

Clasa VII: *Amăricâ T., Apostol G. V., Apostolescu C. E., Burcea S. N., Calcan C. S., Chiriţă M., Coadă I., Coşovliu D. S., Cristopol A. C., Fianu I., Georgescu N. P., Godeanu I. V., Hornştein H. S., Mănescu M., Marin N. N., Marinoschi E. G., Marteş V. G., Mavrodin D. D., Mehedinţi D. D., Mircea A. N., Popa D. T., Popescu B. V., Popescu C. N., Popica E., Săndulescu I., Spiru I. G., Stănculescu G., Stratulat I. G., Suceveanu F., Şuşală I. G., Valeriu G. M., Vasilescu C. N., Vasiliu I. M., Zaharescu I.*

An. Prep. Şc. Pol. Buc.: *Gheţu W., Hanciu P. G. S., Mazilu C. P., Vărlan M. P.*

Şc. Preg. Of. Marină: *Chiriac C.;*

adică 9 candidaţi în clasa IV, 25 de candidaţi în clasa V, 32 de candidaţi în clasa VI, 34 de candidaţi în clasa VII şi 5 candidaţi din anii preparatori de pe lângă şcoalele superioare.

Fiecare candidat va da câte o teză din ambele materii la care s'a înscris. Avându-se în vedere numărul mare de candidaţi admişi a se prezenta la concurs, tezele vor fi eliminatorii. Prima teză va avea loc în ziua de Joi 12 Aprilie 1934, dela ora $8^1/_2 - 11^1/_2$, iar a doua teză în aceeaşi zi între orele 15 — 18 la Şcoala Politehnică, Calea Griviţei 132 colţ Str. Polizu, în apropierea Gării de Nord. Oralul va începe Vineri 13 Aprilie la aceleaşi ore.

Candidaţilor înscrişi la concurs cari nu dispun de mijloace materiale pentru venirea şi întreţinerea lor în Bucureşti (după cum au arătat în cererile lor), li se vor trimete în vacanţa de Paşti sumele necesare transportului lor la Bucureşti şi li se vor comunica locul unde vor fi găzduiţi în tot timpul concursului.

DELEGAŢIA SOCIETĂŢII.

NOTE MATEMATICE

*22. In *Mathesis* din Decemvrie 1933, pag. 415 se reproduce din *The American Mathematical Monthly* o chestiune pusă de W. B. CARVER şi anume de a se găsi un număr de cel puţin 30 cifre începând cu 15 aşa fel ca înmulţirea lui cu 5 să aibă de efect de a muta pe 15 dela stânga la dreapta, adică:

$$15ab \ldots kl \times 5 = ab \ldots kl15.$$

Soluţia este foarte elementară. Să punem $ab \ldots kl = x$. Ecuaţia devine:

$$5 \times (15 \times 10^n + x) = 100\,x + 15,$$

$$\therefore \quad 15 + 10^n = 19\,x + 3.$$

Luăm numărul 15000000 ... şi îl împărţim cu 19 până dăm de restul 3. Câtul va fi x. Dacă x nu va avea 30 cifre, şi nu va putea avea, căci nu am putea avea decât 18 resturi posibile în numerele 1, 2, ... 18, atunci continuăm împărţirea până dăm din nou de restul 3. Cu modul acesta putem găsi numere cât de mari voim, mai ales că imediat ce dăm de restul 15, resturile încep să se repete, şi prin urmare putem scrie direct câtul reproducându-i cifrele. Cu modul acesta se găseşte că valoarea cea mai mică a lui x este 7894736842105263; următoarea mai are la urmă 15, după care se repetă prima valoare a lui x şi are destule cifre. (36). Soluţia cerută este dar:

$$157894736842105263157894736842105263 \times 5 =$$

$$789473684210526315789473684210526315.$$

I. I.

23. *Cuadratura cercului.* Microbul *cyclometricus* a început să facă ravagii printre *cuadratori.* In cartea sa *„Histoire des recherches sur la quadrature du cercle"* din 1754, celebrul istoriograf al matematicilor, MONTUCLA, a dat acest din urmă nume acelora care se ocupă cu chestiunea cuadraturii cercului fără să cunoască starea chestiunii şi, dese ori, chiar chestiunea în sine. Această problemă datează de mii de ani; ARISTOPHANE a popularizat-o ridiculizând-o în comedia sa *„Pasările"*. Mulţi, şi multă vreme, s'au frământat să dea o soluţiune exactă acestei probleme, adică să se afle prin o

construcțiune geometrică latura unui patrat echivalent cu un cerc de rază dată. Toate încercările făcute de a se găsi o soluțiune exactă au fost zadarnice încât în literatură expresiunea: *„caută cuadratura cercului"* se întrebuințează dese ori în loc de *„umblă după imposibilități"*.

După apariținea volumului citat mai sus, Academia de Științe din Paris, la 1775, a luat hotărîrea de a nu mai primi, spre cercetare, nicio soluțiune pentru cuadratura cercului, ca și pentru dublarea cubului, trisecțiunea unghiului și mișcarea perpetuă. După puțin timp, aceeași măsură s'a luat și în Anglia. Aceasta însă nu a împiedecat pe un cuadrator ca în 1778 să cheme în judecată Academia din Paris pentrucă refuză să-i primească o soluție a acestei probleme! După mai bine de un secol, la 1882, matematicianul LINDEMANN demonstrează că această problemă este imposibilă, încât chestiunea a fost trecută printre cele definitiv rezolvate în sens negativ.

Dar, după cum azi, cu toată grija ce se pune la vaccinarea copiilor, tot se vede din când în când câte unul ciupit de vărsat, tot așa mai apare din când în când și câte un cuadrator, mai ales dacă adie câte un vânt de interes, căci, numai pentru gloria de a fi rezolvat cuadratura cercului, nu-și mai bat azi capul oamenii ca în vremurile vechi. *Fermatiștii* nu ar fi apărut în secolul actual, dacă Universitatea din Goettingen nu ar fi anunțat un premiu de 100.000 mărci celui care va demonstra, sau infirma, ultima teoremă a lui FERMAT.

Așa ceva se întâmplă azi cu cuadratura cercului. Cum, — nu se știe încă, — a apărut un svon, — după care notițe prin ziare, — că repausatul BELA KRISTOVICS (?!) a lăsat zeci de milioane de lei celui care va deslega problema cuadraturii cercului. După o notiță publicată de D-l P. SERGESCU în *Sphinx* (Iunie 1933), încă din Mai 1932, un ziar din Linz: *„Tagespost"* a anunțat că premiul este de *o sută de milioane de lei* (dau în litere suma ca să nu se creadă că e vre-o greșeală de nule) și că deținătoare a acestei sume, după testament, este Universitatea din Cluj. Ziarul mai povestea că moștenitorii au atacat testamentul, dar că Universitatea nu voia să piarză banii, și la Curtea de Apel, un profesor al ei a pledat și a câștigat procesul, dovedind că multe chestiuni nerezolvate acum 100 de ani, s'au rezolvat în urmă. Curtea nu a voit

să țină seama de părerile părții adverse, care arătase că defunctul erea dement când a făcut testamentul și că problema cuadraturii cercului este imposibilă. Ziarul încheie spunând că Universitatea din Cluj oferă 50.000.000 lei pentru deslegarea problemei.

Universitatea s'a pomenit apoi, — fără să știe nimic de acel anunț — cu vreo 30 de soluțiuni de cuadratură a cercului, de care bine înțeles nu a ținut seama, până când un cuadrator i-a cerut: ori bani ori să publice rezultatul concursului. Prin cercetări făcute de Seminarul matematic din Cluj s'a dat peste notița din *Tagespost* și s'a constatat că ea fusese reprodusă în alte 20 de ziare europene și americane! Unele ziare însă au mutat chestiunea dela Cluj la București, după cum voiu arăta în No. viitor.

(Va urma) I. IONESCU.

24. *O geometrie românească de acum 80 ani.* Manualul este întitulat astfel:

Prescurtare de geometrie practică spre întrebuințarea școalelor primare de T. POP, *Profesor de aritmetică și geometrie în Colegiul național și în Școala ostășească de cadeți.*

Cartea este tipărită în București, în tipografia Colegiului național, la 1854.

Exemplarul de care m'am servit poartă semnătura Generalului ALEX. TELL, care probabil că a învățat după această carte și este donat de acesta unei biblioteci militare.

El cuprinde 32 de capitole împărțite în modul următor:

— *Capitolele* I — XI inclusiv tratează despre: punct și linii, cerc, diferite feluri de linii, paralele, împărțirea liniilor, unghiuri, determinarea circonferințelor, contactul tangentelor, proporții, împărțirea circonferenței, scara de proporție.

— *Capitolele* XII — XX inclusiv tratează despre: suprafețe în genere, triunghiuri, construcția triunghiurilor, patrulatere, poligoane regulate, evaluarea suprafețelor, reducerea triunghiurilor intr'altele de aceeași suprafață și împărțirea lor, reducerea paralelogramelor în altele egale în suprafață, chipul de a împuțina numărul laturilor unui poligon oricare sau de a le înmulți păstrându-i aceeași suprafață, despre asemănarea triunghiurilor și a celorlalte poligoane.

— *Capitolele* XXI — XXXII tratează despre : proprietate a triunghiului drept, chipul de a face figurile asemenea într'o proporţie hotărîtă, despre planuri, despre solide, suprafaţa solidelor, soliditatea trupurilor, întrebuinţarea similitudinii triunghiurilor pentru măsurarea distanţelor şi înălţimilor, despre nivelaţie, chipul de a prelungii linii pe pământ când se ivesc piedici, ridicarea planurilor chipul de a copia figurile neregulate, chipul de a mări sau a micşora dimensiunile unui desemn într'un raport dat.

Lucrarea are 110 pagini cu 180 figuri în text şi 4 plânşi cuprinzând alte 26 figuri, toate foarte îngrijite, chiar pentru vremurile noastre.

De remarcat că în afară de: linii, triunghi drept, soliditatea trupurilor şi similitudine, la cari noi astăzi zicem: drepte, triunghi dreptunghic, volumul corpurilor, asemănare, întreaga nomenclatură de atunci s'a păstrat. O deosebire mai importantă este aceia că profesorul T. Pop, în aplicaţiile sale utilizează unităţile de măsură ale timpului: stânjenul şi palma.

Citind lucrarea, în care găseşti împărţirea circonferinţei în: 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 19 şi 20 părţi egale (practic) şi privind semnătura de copil a Generalului Alex. Tell, te apucă nedumerirea şi te întrebi cum am putut răuşi să dăm înapoi atât de mult după 80 ani!

Căpitan Gh. Nicolescu.

25. *Asupra problemei 4229.* Menţionând notaţiile dela pag. 33, Vol. XXXIX şi prima parte a soluţiei, fie I întâlnirea perpendicularelor în P şi Q pe Ox şi Oy.

PI şi QI sunt tangente la cercurile (A) şi (B) şi deoarece

$$IP = IQ.$$

I se află pe axa radicală MN a celor 2 cercuri. Deci

$$IM \times IN = \overline{IP}^2 = C^t$$

şi locul lui N este inversa dreptei PQ faţă de de polul I şi puterea $\overline{IP}^2$, adică un cerc, care se determină uşor şi se găseşte că trece prin P, O, Q.

Gh. D. Simionescu.

26. *O problemă de geometrie.*

Ne propunem să găsim printre cercurile unui fascicol pe acelea tangente unei drepte date Δ.

Fie A şi B punctele limite ale fascicolului. Cercurile fascicolului au centrele pe dreapta AB, în afara segmentului AB şi au ca ax radical comun mediatoarea segmentului AB, care întâlneşte pe Δ în C. Fie *a, b* punctele în care cercul (C) cu centrul în C şi trecând prin A şi B taie pe Δ. Perpendicularele în *a* şi *b* pe Δ taie pe AB în *a'* şi *b'*. Cercurile cu centrele în *a'*, *b'* şi de raze respectiv *a'a*, *b'b* sunt cercurile căutate. Intr'adevăr ele sunt tangente la Δ şi fac parte din fascicolul dat, căci sunt ortogonale cercului (C) şi au ca axă radicală mediatoarea segmentului AB.

Fascicolul de cercuri dat determină o involuţie pe dreapta Δ, a cărei punct central este C. Punctele duble sunt tocmai punctele *a, b* de tangenţă ale cercurilor căutate (*a'*), (*b'*).

MARIUS MARGULIUS.

27. *Asupra problemei 4204.*

Această problemă, propusă de D-l AL. NICULESCU se poate enunţa mai general astfel:

Fie A_1B_1 *şi* A_2B_2 *două coarde în două cercuri concentrice de razele* r_1 *şi* r_2, *aparţinând aceluiaş unghiu la centru. Dacă însemnăm cu* M *şi* N *intersecţiile coardei* A_2B_2 *cu cercul de rază* r_1 ($A_2M < A_2N$), *să se arate că avem:*

$A_2M = r_1$ în condiţiile: $r_2 = A_1B_1$ şi $r_2 > r_1\sqrt{2}$

şi

$A_2N = r_1$ „ „ $r_2 = A_1B_1$ şi $r_2 < r_1\sqrt{2}$.

Pentru a demonstra proprietatea enunţată mai sus, însemnăm $A_2M = x$ şi luăm puterea punctului A_2 în raport cu cercul r_1. In ecuaţia ce rezultă se înlocueşte:

$$A_2B_2 = r_2^2 : r_1 \quad \text{şi} \quad x = r_1 y$$

şi rezolvăm în raport cu *y*. Din discuţia rădăcinilor acestei ecuaţii se deduce proprietatea.

MARIA NEUMANN.

CHESTIUNI DE EXAMEN

ŞCOALA POLITEHNICĂ «REGELE CAROL II» DIN BUCUREŞTI

Secţia de Construcţii

(8 1/4 — 10 1/4)

GEOMETRIE ANALITICĂ

(Aplicaţii geometrice ale calculului diferenţial şi integral)

8 Ianuarie 1933

Propuse de E. ABASON

1. Se consideră curba:

$$(1) \qquad y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

şi un punct oarecare M (x, y) pe ea; fie P proecţia pe axa Ox a lui M; N punctul unde normala la curbă în M întâlneşte pe Ox.

Se ia pe Ox, $PA = a$ (punctul P este între A şi N) şi în M se ridică o perpendiculară pe MA, care taie pe Ox în B.

Să se arate că avem relaţia:

$$\overline{PB} = \overline{MN}$$

şi să se deducă de aci o construcţie a tangentei în M la curba (1).

* * *

2. Se consideră curba strâmbă

$$x = e^t \,,\; y = e^{-t} \,,\; z = f(t)$$

şi se cere să se determine funcţia $f(t)$, ştiind că planul osculator la curbă într'un punct oarecare M al ei, taie planul zOy după o paralelă la dreapta $y + 2z = 0$.

Secţia Silvică şi Secţia Industrială

Examenul dela 9 Ianuarie 1933

Chestiuni comune

Propuse de E. ABASON

1. Să se studieze variaţia razei de curbură la curba:

$$(1) \qquad y = x^3$$

când x variază între 0 şi $+\infty$.

Ce aplicație practică are curba (1)?

2. Curba (1) se rotește în jurul axei oy; să se afle volumul astfel născut și cuprins între planele xOz și $y = a$.

3. Să se efectueze integrala:

$$\int \frac{\sin x \, dx}{\cos^3 x + 1}$$

Chestiune numai pentru secția industrială

Să se desvolte în serie FOURIER funcțiunea periodică ($T = 2\pi$) care în intervalul de periodicitate este definită printr'o parabolă de ecuație

$$y = -x\,(x - 2\pi)$$

Secția Electromecanică

MATEMATICI APLICATE

Examenul dela 9 Ianuarie 1933

Propuse de E. ABASON

1. Se dă funcțiunea:

$$V = 3\,(x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + x)^2$$

și se cere să se calculeze *grad. V*

2. Să se desvolte în serie FOURIER, funcțiunea periodică reprezentată în intervalul $(0,2\pi)$ prin diagrama formată din axa Ox $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right.$ și $\left.\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\right)$ și din dreapta $y = 1$ pentru $\left(\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{3}\right)$.

Să se afle elementele caracteristice ale armonicei de ordinul 3.

3. O capacitate în serie cu o rezistență R este montată în derivație cu un self L; la bornele A, B ale acestei derivații se aplică tensiunea $u = U \sin \omega t$.

Să se afle prin vectori și prin calculul cu cantități imaginare, curenții din cele două ramuri ale derivației precum și tensiunea dela bornele A'B' ale capacității c și tensiunea dela bornele A'B' ale rezistenței R.

4. Se dă funcțiunea:

$$Z = z^3 - 1$$

și se cere să se facă reprezentarea pe planul Z, a triunghiului OAB din planul (z), format din axa Ox, dreapta OB $(y = 3x)$ și dreapta AB: $x = 1$.

Să se explice rezultatul.

Secţia Electromecanică

GEOMETRIE ANALITICĂ

(Aplicaţii geometrice ale calculului diferenţial şi integral)

Examenul dela 10 Ianuarie 1933.

Propuse de E. ABASON

1. Să se arate că normala la suprafaţa

$$z = arctg.\ (x^2 + y^2)$$

într'un punct oarecare al ei M (x, y, z), întâlneşte axa Oz.

Să se explice rezultatul.

2. Să se determine curbele din plan pentru care subtangenta într'un punct oarecare M, de abscisă x, este egală cu $x + a$, $(a = C^{st})$.

3. Să se afle înfăşurătoarea familiei de drepte.

$$\alpha^2 x + (\alpha - 1)\, y + 1 - \alpha^2 = 0$$

în care α este un parametru variabil.

Secţia Industrială şi Silvică

MATEMATICI GENERALE

Lucrare Scrisă la 1 Martie 1933

Propuse de E. ABASON

I. Se consideră curba strâmbă;

$$x = t - t^2 \quad , \quad y = 1 - t + 2t^2 \quad , \quad z = 1 - t^2$$

şi se cere:

1° Să se calculeze cosinusurile directoare ale tangentelor în punctele de abscisă $x = 0$ şi să se scrie ecuaţiile tangentelor respective.

2° Ecuaţia planului osculator într'un punct M (x, y, z) oarecare de pe curbă şi să se explice rezultatul.

3° Ecuaţia planului normal în punctul M (x, y, z) de pe curbă.

4° Să se calculeze raza de curbură şi raza de torsiune în punctul M (x, y, z).

Secţia Industrială şi Silvică

Lucrare Scrisă la 22 Martie 1933

Propuse de E. ABASON

1. Să se scrie ecuaţia suprafeţei conice cu vârful în punctul S (0, 0, 3) şi având drept curbă directoare cercul situat în planul xoy, centrul în punctul C (4, 1, 0) şi raza egală cu 1.

2. Se cere ecuaţia cilindrului care are ca directoare curba definită de ecuaţiile:

$$(1) \qquad \begin{cases} y^2 + x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

şi generatoarele paralele cu dreapta OA, A (3, 2, 1).

3. Să se desvolte în serie FOURIER şi să se calculeze caracteristicile armonicei a treia, a funcţiunii periodice (perioada 2π) simetrică în raport cu dreapta $x = \pi$, şi definită de dreapta OA ($y = x$) pentru $0 < x < \frac{\pi}{2}$ şi de dreapta BC $\left(y = -\frac{\pi}{2}\right)$ pentru $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

Secţia Electromecanică

MATEMATICI APLICATE

Examenul dela 2 Iunie 1933

Propuse de E. ABASON

1. Se consideră funcţiunea Z de variabilă complexă z, definită de relaţia:

$$(1) \qquad Z = \frac{1 - z}{z}$$

şi se cere:

1° Să se reprezinte pe planul $Z = Y + iY$ triunghiul *oab* din planul variabil $z = x + iy$, laturile triunghiului fiind:

$$(oa)\ y = 0, \quad (ob)\ x = 0 \quad (ab)\ x + y - 1 = 0.$$

2° Să se arate pe cale directă, care sunt operaţiile geometrice, prin care se poate trece dela triunghiul *oab* din planul (z) la transformatul său OAB din planul (Z).

2. Să se determine elementele armonicei de ordinul al 3-lea a funcţiunii periodice ($T = 2\pi$), nulă între $\frac{\pi}{2}$ şi $\frac{3\pi}{2}$, şi reprezentată în intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ prin segmentul A $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ B $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ iar în intervalul $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ prin dreapta C $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$ D $\left(2\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$.

3. Unei derivaţii AB, format dintr'un self L, o capacitate C şi o rezistenţă ohmică R, i se aplică tensiunea $U_{AB} = U \sin\omega t$; se cere:

1° Impedenţa imaginară şi reală a circuitului AB.

2° Intensităţile curenţilor i_1, i_2, i_3 de self, capacitate şi rezistenţa ohmică.

3° Intensitatea totală i.

4° Să se scrie funcţiunile sinusoidale i_1, i_2, i_3, i.

5° Să se deseneze diagrama vectorială a vectorilor u, i_1, i_2, i_3, i.

4. Se consideră câmpul de vectori A, care în fiecare punct al spaţiului M (x, y, z) are direcţia şi sensul axei Oy', iar intensitatea sa este proporţională cu distanţa OM, O fiind origina axelor de coordonate.

1° Se cere să se scrie fluxul $d\Phi$ al vectorului $\overline{A}$ corespunzător unui element de volum $dx.\ dy.\ dz$, ale cărui laturi sunt paralele cu axele de coordonate.

2° Care este locul geometric al punctelor M (x, y, z) din spaţiu, pentru care fluxul precedent este constant.

3° In ce puncte ale spaţiului fluxul $d\Phi$ este nul?

BIBLIOGRAFIE

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. XXXIX. No. 11. Noemvrie 1933. Now-York. Adunarea din Octomvrie a Societăţii, de J. R. KLINE. ELIKIAM HASTINGS MOORE, de G. A. BLISS. RUTHERFORD şi invarianţii modulari, de O. C. HAZLETT. SHEWART şi controlul economic, de C. F. ROOS. LEWIS CARROLE, de R. C. ARCHIBALD. P. PICARD despre curbe şi suprafeţe, de F. A. FORAKER. FOWLER despre statistica matematică, de M. H. STONE. Sumare de comunicări.

Idem. No. 12. Decemvrie 1933. Unele probleme de aproximaţiuni cât mai strânse, de D. JACKSON. Asupra întrebuinţării mediilor lui CESARO pentru determinarea criteriilor pentru constantele lui FOURIER., de C. N. MOORE. O ecuaţie integrală cu sâmburi simetrici, de T. S. PETERSON. Asupra unui procedeu de diferenţiare covariantă I, de H. V. CRAIG. Asupra elementului de descompunere a unei funcţiuni dublu periodică de a doua speţă, de M. A. BASOCO. Asupra integralei duble a lui RIEMANN-STIELTJES, de J. A. CLARKSON. Secuenţe similare, de E. T. BELL. Ecuaţia diofantină $x_1x_2a_1 + x_2x_3a_2 + \ldots + x_nx_{n+1}a_n = 0$, de E. J. FINAN. O fracţie continuă care reprezintă funcţiuni meromorfice, de H. S. WALL. Unele teoreme noui asupra limitelor variaţiunilor, de R. L. PEEK, JR. Caracteristicele curbelor multiple şi residualele lor, de T. R. HOLLCROFT. Asupra congruienţelor cubice, de H. R. BRAHANA. Algebra problemelor valorii limite self-adjuncte, de V. V. LATSHAW. ROJIMA asupra seriilor duble DIRICHLET, de C. R. ADAMS. O serie de patrate de ordinul 4, magice pe linii, coloane şi diagonale, de D. N. LEHMER.

Mathesis. Tomul XLVII. No. 10. Decemvrie 1933. GEMBLOUX. Asupra punctelor de intersecţie a cercurilor circumscrise şi celor nouă puncte, de R. GOORMAGHTIGH. Asupra unei extensiuni a teoremelor lui LINDELOF şi POINCARÉ la unele ecuaţii cu derivate parţiale, de J. H. GERMAY. Asupra homografiei axiale a spaţiului, de STEVENS. Geometria distanţelor într'un plan isotrop, de PAUL LIBOIS. Asupra cercurilor remarcabile ale fascicolului $[(O), (O_9)]$, de AD. M.

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Tomul CXVI. Fascicola V. Noemvrie 1933. Eclipsa anulară solară dela 3 Ianuarie 1927, de G. HOXMARK.

Idem. Fascicola VI. Decemvrie 1933. Buenos Aires. Asupra integralei duble a lui ABEL-LAPLACE, de J. C. VIGNAUX. Conicele, de C. C. DASSEN. Asupra metodei de sumare a lui SANNIA, de J. C. VIGNAUX.

Boletin del Seminario Matematico dirigido por J. REY PASTOR. Vol. III. No. 13. Iulie 1933. Buenos Aires-Madrid. Notă asupra numerelor parentezate de I. J. SCHWATT. Asupra inecuaţii funcţionale; $f(x)+f(y)\geqslant f(x+y)$, de F. TARANZOS. O generalizare elementară a convergenţei, de J. REY PASTOR.

Boletin Matematico. Anul VI. No. 7. Septemvrie 1933. Buenos Aires. Asupra numerelor reale, de M. O. GONZALES. Goniometria oblică, de B. I. BAIDAFF.

Idem. No. 8. Octomvrie 1933. O teoremă reciprocă a teoremei lui DESARGUES-STURM şi câteva aplicaţiuni, de C. COŞNIŢĂ.

Boletin Matematico Elemental. Anul IV. No. 9. Noemvrie 1933. Buenos Aires.

Boletin Matematico. Suplemento informativo. Anul I. No. 8. Noemvrie 1933. Buenos Aires.

Idem. No. 9. Decemvrie 1933. In acest număr se reproduce în întregime articolul privitor la *Localul Societăţii Gazeta Matematică*, publicat la pag. 81 — 86 din acest an, tradus în limba spaniolă de colegul nostru D-l B. I. BAIDAFF, căruia îi aducem viile noastre mulţumiri pentru urările ce face revistei şi redactorilor ei.

I. IONESCU.

Journal de Mathématiques Élémentaires publié par H. VUIBERT. Anul 58. No. 7. Ianuarie 1934. Paris.

Idem. Anul 58. No. 8. Ianuarie 1934. Paris.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XIII. No. 11. Ianuarie 1933. Timişoara. O clasă de identităţi algebrice, de V. ALACI. Histoire des sciences mathématiques et physiques en Roumanie, par P. SERGESCU.

Societatea Română de Ştiinţe. *Secţia matematică. Buletinul Şedinţelor.* Anul I. No. 3. Decemvrie 1933.

M. GHERMANESCO. *Equations différentielles et équations aux différences finies.* (Extrait du *Bulletin mathématique de la Société Roumaine des sciences.* Tome XXXV). Bucureşti 1933.

M. GHERMANESCO. *Sur les équations aux différences finies à* plusieurs variables. (Extras din *Bulletin de la classe des sciences* de l'Academie royale de Belgique) Bruxelles 1933.

M. GHERMANESCO. *Sur les équations à différences finies.* (Extras din *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences* de Paris). Paris 1933.

Ad. Mineur. *Trigonométrie.* Bruxelles 1932. Librairie clasique J. VAN DIJL, 38 ét 38a Rue des Etudiants.

Acest tratat este alcătuit în vederea învățământului trigonometrii elementare. Prima parte, referitoare la funcțiunile circulare cuprinde capitolele: I. Definițiunea funcțiunilor circulare. II. Relațiuni între liniile trigonometrice ale aceluiași arc; III. Adunarea arcelor; IV. Inmulțirea arcelor; V. Impărțirea arcelor; VI. Tabelele trigonometrice. Partea II cuprinde capitolele: I. Triunghiurile dreptunghice; II. Triunghiurile oarecare; III. Patrulaterul; IV. Operațiuni pe teren. Partea III cuprinde capitolele: I. Formulele relative la triunghiuri oarecare; II. Formule relative la triunghiurile dreptunghice; III. Rezolvarea triunghiurilor dreptunghice; IV. Rezolvarea triunghiurilor oarecare; V. Chestiuni diverse; Supliment; Teoria proiecțiunilor.

Chestiunile sunt tratate simplu și clar, uneori pe căi diferite cu aplicațiuni și exerciții lămuritoare și cu 204 exerciții propuse. Cartea poate folosi chiar celor ce voiesc să învețe singuri trigonometria, după ce cunosc geometria și algebra elementară.

I. I.

V. THÉBAULT & R. GOORMAGHTIGH. *Sur les cercles remarquables du triangle.* (Supliment la *Mathesis*). 1933.

V. THÉBAULT. *Geométrie de l'orthopole.* (Supliment la *Mathesis*). 1933.

J. FAVARD. *Leçons sur les fonctions presque-périodiques.* Paris, Gauthier-Villars, 1933.

Acest volum constitue a 13-a fascicolă din colecția *«Cahiers scientifiques»* publicată sub direcția D-lui GASTON JULIA. Clasa de funcțiuni care se studiază în acest volum e o generalizare a funcțiunilor periodice, generalizare care are aplicații numeroase la teoria numerelor, la teoria funcțiunilor și la dinamică și care a fost pornită de matematicianul danez HAROLD BOHR și continuată de BESICOVITCH.

Definiția acestor funcțiuni nu e simplă, deci generalizarea funcțiunilor periodice n'a fost imediată. S'a ales definiția care să permită o generalizare interesantă a proprietăților fundamentale cunoscute.

D-l FAVARD a prezintat această teorie cu toate desvoltările necesare și cu deplină claritate, ceeace nu era ușor. Volumul cuprinde în 180 pag. cinci capitole cu materie interesantă, atingând toate chestiile care au legătură cu funcțiunile aproape — periodice, în special cu seriile lui DIRICHLET.

G. Ț.

VLADIMIR BERNSTEIN. *Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de* DIRICHLET. Paris, Gauthier-Villars, 1933.

Volumul face parte din colecția *«Monographies sur la théorie des fonctions»* publicată sub direcția D-lui EMILE BOREL și însoțit de o prefață a D-lui J. HADAMARD.

Autorul a avut ca scop principal să expună cerceterile făcute în privința distribuției punctelor singulare ale funcțiunilor reprezintate prin serii ale lu DIRICHLET. In legătură cu această chestiune fundamentală autorul a expus cercetările noui, în special contribuțiile sale personale, relative la ultraconvergența seriilor lui DIRICHLET. Noțiunea de ultraconvergență studiată mai întâ

pentru seriile de puteri, s'a extins la seriile lui DIRICHLET, cu rezultate foarte interesante. Expunerea izvorită dintr'un curs făcut la Collège de France, e clară şi plină de sugestii. E o carte care merită să fie studiată.

G. Ţ.

J. SER. *Les calculs formels des series de factorielles.* Paris, Gauthier-Villars, 1933.

Autorul a prezintat, fără caracter sistematic, şirul de calcule care se prezintă când se dau variabilei într'o funcţiune uniformă numai valori întregi. E vorba de calcule formale şi fără multă pretenţie. Volumul are caracterul elementar şi se citeşte uşor.

G. Ţ.

CERERI

235. In *«Călătorii în Moldova»*, DUMITRU BOLINTINEANU spune următoarele:

«In Târgul Neamţului găsirăm un vechiu amic, COZADINI; *acest june era din şcolarii cei mai silitori din Şcoala Politehnică din Paris. Astăzi înturnat în patria sa, se făcuse arendator de moşii şi făcea bani».*

Ce se ştie despre studiile acestui vechiu politecnician român?

BOLINTINEANU a făcut călătoria sa prin Moldova în 1857.

I. I.

DIVERSE

Societatea română de ştiinţe, Secţia matematică, a ţinut şedinţă în seara zilei de 8 Ianuarie. D-l G. MIHOC a făcut un referat de analiză. In această şedinţă s'a ales biuroul Secţiunii pentru anul 1934. A fost ales Preşedinte D-l G. ŢIŢEICA şi Vicepreşedinte D-l CRISTEA MATEESCU.

In şedinţa dela 22 Ianuarie D-l M. GHERMĂNESCU a făcut un referat de Analiză; D-l AL. PANTAZI o comunicare asupra congruienţelor stratificabile: D-l MIRON NICULESCU, asupra ecuaţiei cădurii şi D-l I. IONESCU, asupra unor cereri adresate Primăriei Capitalei de a comunica unor germani numele testatorului a 40.000.000 lei pentru cel ce va rezolva Problema cuadraturii cercului!

In cursul lunei Ianuarie, D-l P. SERGESCU a făcut câteva lecţiuni la Universitatea din Montpellier asupra matematicilor contimporane în Franţa şi asupra istoricului ştiinţelor matematice în România. Cartea D-sale *«Les sciences mathématiques en France»* tipărită în colecţiunea *«Tableau du XX siècle»*, pe care am anunţat-o la pag. 145, a fost prezentată Academiei de Ştiinţe Morale

şi politice din Paris, cu deosebite elogii, de D-l EDOUARD LE ROY. Procesul verbal al acelei şedinţe se încheie cu cuvintele: „*... je puis dire que l'auteur étonne par l'abondance et la sûreté de son information qui n'oublie ou n'altère jamais rien, et que, sur chaque point majeur, il a su mettre en juste lumière l'idée maîtresse et caracteristique, sous une forme accessible à tout esprit simplement cultivé*».

I. I.

Din partea D-şoarei PREDUŢA D. BUNGEŢEANU, studentă la Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti, s'a primit următoarea scrisoare cu data de 7 Februarie 1934:

Am onoare a vă ruga să bine voiţi a primi să contribui cu una mie lei, în memoria tatălui meu, PROF. D. BUNGEŢEANU, *pentru premiile ce se acordă la concursul «Gazetei Matematice».*

Membrii societăţii, în şedinţa dela 7 Februarie luând cunoştiinţă de această frumoasă donaţiune a hotărît a exprima mulţumiri D-şoarei PREDUŢA D. BUNGEŢEANU.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1937. *Un jucător începând cu o mizâ* a_1, *pune succesiv la o masă de joc o mizâ egală cu de două ori suma celor două mize precedente şi pierde în şir până la* $n-a$ *mizâ; apoi câştigă deodată de* λ *ori miza următoare.*

Care este valoarea mizei cu care a câştigat ştiind că câştigul net ce-l realizase micşorat cu o treime din miza ce ar fi trebuit s'o pună dacă ar fi continuat jocul este C? (a_1, λ *şi* C *fiind cunoscute).*

† AL. ROŞU.

Din enunţ rezultă ca la $a\ (n+1)-a$ mizâ pe care o însemnăm cu a_{n+1}, jucătorul a câştigat λa_{n+1}, care este deci câştigul brut. Câştigul net va fi:

$$C_N = \lambda a_{n+1} - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1}).$$

Dar avem, prin enunţ:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2a_n + 2a_{n-1} \\ a_n &= 2a_{n+1} + 2a_{n-2} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ a_3 &= 2a_2 + 2a_1 \\ a_2 &= 2a_1 \\ a_1 &= a. \end{aligned}$$

de unde prin adunare

$$\sum_1^{n+1} a_i = 2a_n + 4\sum_1^{n-1} a_i + a_1 = 4\sum_1^{n+1} a_i + a_1 - 2a_n - 4a_{n+1}$$

$$\therefore \quad \sum_1^{n+1} a_i = \frac{1}{3}(4a_{n+1} + 2a_n - a_1)$$

sau ţinând seamă de recurenţa

$$a_{i+1} = 2a_i + 2a_{i-1} \tag{1}$$

care leagă 3 mize consecutive:

$$\sum_1^{n+1} a_i = \frac{1}{3}(2a_{n-1} + a_{n+2} - a_1)$$

$$\therefore \quad C_N = \lambda a_{n+1} - \frac{1}{3}(2a_{n+1} + a_{n+2} - a_1)$$

şi scriind relaţiunea, dată de enunţ, între C_N, C şi a_{n+2}, avem

$$\lambda a_{n+1} - \frac{1}{3}(2a_{n+1} + a_{n+2} - a_1) - \frac{1}{3}a_{n+2} = C$$

$$\therefore \quad \lambda a_{n+1} - \frac{1}{3}(a_{n+3} - a_1) = C$$

$$\therefore \quad a_{n+1} = \frac{3C + a_{n+3} - a_1}{3\lambda} . \tag{2}$$

Problema se reduce acum la a calcula pe a_{n+3} în funcţie de a_1, atunci când avem recurenţa (2).

Acest calcul se face foarte uşor urmând cuvânt cu cuvânt nota matematică *„Asupra şirului lui* FIBONACCI", publicată de D-l M. DAVIDESCU în *Gazeta Matematică,* Vol. XXVIII, pag. 407. Se găseşte

$$a_{n+3} = \frac{a_1}{2\sqrt{3}}[(1+\sqrt{3})^{n+3} - (1-\sqrt{3})^{n+3}] \tag{3}$$

Ducând această valoare în (2), se găseşte:

$$a_{n+1} = \frac{3C - a_1}{3\lambda} + \frac{a_1}{6\lambda\sqrt{3}}[(1+\sqrt{3})^{n+3} - (1-\sqrt{3})^{n+3}] \tag{4}$$

care este valoarea cerută a mizei cu care a câştigat jucătorul.

Notă. 1°. D-l I. C. VASILIU (Şc. Politechnică, Bucureşti) a rezolvat foarte bine problema calculând pe a_{n+1} sub forma (2) şi dând pentru a_{n+3} forma (3), fără a arăta de unde a dedus-o.

D-sa conchide că a_{n+1} trebuie scos prin încercări, (ceeace se vede din soluţie că nu e cazul) şi deduce că enunţul e greşit şi trebuie rectificat în sensul: *«câştigul net mărit cu o treime din cota următoare este* C».

Cu acest enunţ se găseşte

$$\lambda a_{n+1} - \frac{1}{3}[4a_{n+1} + 2a_n - 1 - a_{n+2}] = C$$

$$\therefore \quad \lambda a_{n+1} - \frac{1}{3}(2a_{n+1} - a_1) = C$$

$$\therefore \quad a_{n+1} = \frac{3C - a_1}{3\lambda - 2}.$$

Problema pusă astfel de D-l I. C. VASILIU, dă în adevăr un rezultat mai simplu, nu este aplicaţiunea pe care a voit s'o dea autorului şirului (1).

De altfel se vede din soluţie că trecerea dela (3) la rezultatul final (4) nu prezintă nici o dificultate.

2°. Termenul u_{n+1} al unui şir cu scara de recurenţă mai generală

$$au_{n+1} + bu_n + cu_{n-1} + d = 0$$

a fost dat de D-l I. IONESCU în nota *«Asupra unor şiruri recurente»*, publicată în *Gazeta Matematică*, Vol. XXII, pag. 157.

Aplicând şirului

$$a_{n+1} = 2a_n + 2a_{n-1}$$

cuvânt cu cuvânt principiile acelei note se găseşte

$$a_{n+3} = \frac{a_1}{3}\left\{\frac{1}{2}[(1+\sqrt{3})^{n+3} + (1-\sqrt{3})^{n+3}] + (1+\sqrt{3})^{n+2} + (1-\sqrt{3})^{n+2}\right\}$$

care prin calcule simple se reduce tot la forma (3). În adevăr suma din acoladă se mai scrie

$$\frac{(1+\sqrt{3})^{n+2}(3+\sqrt{3}) + (1-\sqrt{3})^{n+2}(3-\sqrt{3})}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{6(1+\sqrt{3})^{n+2}}{2(3-\sqrt{3})} + \frac{6(1-\sqrt{3})^{n+2}}{2(3+\sqrt{3})}$$

$$\therefore \quad 3\left[\frac{(1+\sqrt{3})^{n+3}}{(3-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})} + \frac{(1-\sqrt{3})^{n+3}}{(3+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}\right]$$

efectuând calculele la numitori şi ducând rezultatul în a_{n+3} se găseşte tocmai (3).

GH. B.

PROBLEMA 1991. *Să se construiască un triunghiu, cunoscând o latură, un unghiu şi lungimea uneia din bisectoarele interioare sau exterioare.*

COL. GH. LITEANU.

Problema comportă examinarea următoarelor 5 cazuri:

Cazul 1º. Se dau: a, A şi l_a sau l'_a, însemnând prin l cu indice lungimea unei bisectoare. Presupun problema rezolvată şi fie A', A'' picioarele bisectoarelor unghiului A, M şi N intersecţiile cercului ABC cu AA' şi AA'', I proecţia lui M pe BC.

Pe o figură se vede imediat că

$$(1) \qquad MA \times MA' = MI \times MN = \overline{MC}^2 = C$$

$$(2) \qquad MA - MA' = l_a .$$

Se construiesc segmentele MA, MA' ale căror produs şi diferenţă sunt date de (1) şi (2). Aceasta este o problemă cunoscută. Construcţia triunghiului ABC este următoarea: Pe $BC = a$ se construeşte un segment capabil de unghiul A. Acest segment se interceptează în A de un cerc cu raza MA, dată de (1) şi (2) şi cu centrul în mijlocul arcului BC.

Problema va avea 2, 1 sau nicio soluţie după cum l_a va fi mai mic, egal sau mai mare decât IM. Din triunghiul BIN se scoate

$$NI = \tfrac{1}{2} a \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} A$$

de unde, condiţia de posibilitate

$$l_a \leqslant \tfrac{1}{2} a \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} A.$$

Când se dă l'_a construcţia e aceeaşi căci

$$NA \times NA'' = \overline{NB}^2 = C^t$$

$$NA'' - NA = l'_a .$$

In acest caz problema are 2 soluţiuni şi este totdeauna posibilă.

Cazul 2º. Se dau: a, A, l_b sau l'_b. Acest caz face obiectul problemei 3107, rezolvată la pag. 474, Vol. XXXIV, *Gazeta Matematică.*

Cazul 3º. Date: a B, l_b sau l'_b. Soluţia este imediată şi unică.

Fie B_1 intersecția bisectoarei BB_1 cu paralela dusă din C la BA. Problema este posibilă numai dacă $l_b < BB_1$ sau

$$l_b < 2a \cos \tfrac{1}{2} B$$

pentrucă triunghiul BCB_1 dă

$$BB_1 = \frac{a \sin (\pi - B)}{\sin \tfrac{1}{2} B} .$$

Dacă B_2 este intersecția lui l'_b cu CB_1, condiția de posibilitate, când se dă l'_b, este

$$2a \sin \tfrac{1}{2} B < l'_b .$$

Cazul 4°. Date: a, B, l_c sau l'_c. Se determină imediat piciorul C' al bisectoarei CC', după care se ia simetrica lui BC față de CC' și se determină A.

Fie H proecția lui C pe latura unghiului B, CA' paralela la BC' și C_1 piciorul bisectoarei unghiului BCC'. Presupun că unghiul dat B, este ascuțit. Problema este posibilă numai dacă

$$CH \leqslant l_c < CC_1$$

$$\therefore \quad a \sin B \leqslant l_c < 2a \sin \tfrac{1}{2} B.$$

Problema admite numai o soluție dacă

$$l_s = a \sin B$$

și 2 soluții în toate celelalte cazuri.

Când $B > \frac{1}{2}\pi$, trebue să avem neapărat

$$a < l_c < 2a \sin \tfrac{1}{2} B$$

în acest caz problema are iar numai o soluție.

Când se dă l'_c condiția de posibilitate este

$$2a \cos \tfrac{1}{2} B < l'_c$$

și problema are o singură soluție.

Cazul 5°. Date: a, B, l_a sau l'_a. Problema se rezolvă utilizând rezultatele date la problema 2613 a D-lui Col. Gh. Buicliu, rezolvată la pagina 257, Vol. XXIX, *Gazeta Matematică*.

Observaţiuni. 1°. Triunghiul se poate *rezolva* pentru fiecare din cele 5 cazuri, utilizând în mod convenabil, potrivit fiecărui caz, formulele:

$$A + B + C = \pi$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$l_a = \frac{2bc}{b+c} \cos \tfrac{1}{2}A$$

$$l'_a = \frac{2bc}{b-c} \sin \tfrac{1}{2}A$$

$$b = 2R \sin B$$

$$l_b = \frac{2ac}{a+c} \cos \tfrac{1}{2}B.$$

2°. La problema 1991 s'au primit numai soluţii parţiale şi fără discuţii dela următorii rezolvitori, în urma numelui cărora se arată în paranteză cazurile de care s'au ocupat: C. I. VIŞOIANU (1°, 3°, 4°), A. M. PANTAZI (1°, 3°), E. OTULESCU (1°, 2°), S. MARCELINO (2°, 4°), N. P. ARCADIAN (3 , 4°), R. S. AUGUSTIN (3°, 4°) şi N. ŢUHAI (1°, 3°).

3°. Au *rezolvat* triunghiul, pentru cazurile arătate în urma numelui, D-nii: N. N. MIHĂILEANU (1°, 5°) şi S. MARCELINO (5°).

GH. B.

PROBLEMA 3857. *Se dă un triunghiu oarecare* ABC *şi fie* $A_1B_1C_1$ *triunghiul podar al unui punct* P *din planul său.*

Fie A'_1 *şi* A''_1 *proiecţiunile punctului* A_1 *pe dreptele* BP *şi* CP ; B'_1 , B''_1 *şi* C'_1 , C''_1 *punctele analoage.*

Care este condiţiunea pentru ca dreptele $A'_1A''_1$, $B'_1B''_1$, $C'_1C''_1$ *să taie respectiv pe* BC, CA, AB *în trei puncte colineare?*

CEZAR COŞNIŢĂ.

Soluţiune dată de Domnii: ADRIAN C. GHEORGHIU (Student, Bucureşti), MIRCEA I. GROSSU (Liceul Carol, Craiova), P. I. GHIŞOIU (Şc. Politehnică, Bucureşti), N. N. MIHĂILEANU (Constanţa), S.-LT. AURELIAN STAN-CLUJ.

Fie M punctul de întâlnire al dreptelor $A'_1A''_1$ şi BC. In orice triunghiu BPC proiectând piciorul înălţimii $\overline{PA_1}$ pe laturile adiacente PB, PC, dreapta celor două proiecţiuni determină pe baza BC un punct M satisfăcând relaţiunii:

$$(1) \qquad \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = \left(\frac{\overline{AB}}{\overline{A_1C}}\right)^2.$$

Intr'adevăr, avem din triunghiurile dreptunghiuri BA_1P şi CA_1P, pedeoparte, relaţiunile:

$$(2)\quad \begin{cases} \overline{BA_1^2} = \overline{BP} \cdot \overline{BA'_1} \\ \overline{CA_1^2} = \overline{CP} \cdot \overline{CA''_1} \end{cases} \qquad (3)\quad \begin{cases} \overline{PA_1^2} = \overline{PA''_1} \cdot \overline{PC} \\ \overline{PA_1^2} = \overline{PA'_1} \cdot \overline{PB} \end{cases},$$

din care deducem imediat:

$$(4)\quad \frac{\overline{PC}}{\overline{BP}} \cdot \frac{\overline{PA''_1}}{\overline{PA'_1}} = +1\ ; \qquad (5)\quad \frac{\overline{BP}}{\overline{CP}} \cdot \frac{\overline{BA'_1}}{\overline{CA''_1}} = \frac{\overline{BA_1^2}}{\overline{CA_1^2}},$$

la care alăturând relaţiunea lui MENELAUS relativă la transversala $MA'_1A''_1$ şi triunghiul BPC, şi înmulţind cele trei relaţiuni membru cu membru, obţinem relaţiunea (1).

Dacă în triunghiurile CPA, APB punctele N, R sunt analoagele lui M, scriind relaţiunile (1) corespunzătoare şi înmulţindu-le pe toate trei între ele, membru cu membru, obţinem:

$$(6)\quad \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = \left(\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}} \cdot \frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}} \right)^2 .$$

Pentru ca punctele M, N, R să fie în linie dreaptă, este necesar şi suficient să avem, după reciproca teoremei lui MENELAUS împlinită condiţiunea:

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}} \cdot \frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}} = \varepsilon, \text{ unde } \varepsilon = \pm 1.$$

— In cazul când luăm $\varepsilon = +1$, punctul P, conform reciprocii teoremei lui SIMSON, aparţine cercului O, circumscris lui ABC.

— In cazul când luăm $\varepsilon = -1$, triunghiul podar $A_1B_1C_1$ este *omologic* cu ABC, şi această condiţiune este împlinită, cum a arătat LUCAS (Nouvelle correspondance Mathématique, 1896; c. f. F. G. M), dacă P aparţine cubicei care trece prin punctele: A, B, C, H, O, I, I_a, I_b, I_c, având centrul în O şi drept asimptote mediatricele triunghiului ABC.

Observare. Problema a mai fost enunţată în articolul:

«Demonstraţiuni geometrice pentru câteva proprietăţi deduse «pe cale de transformare», dat de D-l CEZAR COŞNIŢĂ în R. M. T. an. IX.

O. N. Ţ.

*PROBLEMA 4174. *In triunghiul* ABC, *fie* A_1, B_1, C_1 *picioarele cevienelor punctului* I *din planul său,* A′ *intersecţiunea* (AA_1, B_1C_1), *iar* A_2 *intersecţiunea* (BC, B_1C_1).

Să se demonstreze că:

1°. *Punctele* (A_1B_1, CA') ; (A_1C_1, BA') ; I ; A_2 *sunt colineare.*

2°. *Punctele* (A_1B_1, BA'); (A_1C_1, CA'); A; A_2 *sunt colineare.*

3°. *Punctele* (BB_1, A_1C_1) ; (CC_1, A_1B_1) ; A_2 *sunt colineare.*

4°. *Punctele* (BB_1, CA') ; (CC_1, BA') ; A_2 *sunt colineare.*

5°. *Punctele* (BB_1, A_1C_1) ; (CC_1, BA') ; A *sunt colineare.*

6°. *Punctele* (CC_1, A_1B_1) ; (BB_1, CA') ; A *sunt colineare.*

S.-Lt. I. Gh. Zamfirescu.

Soluţie dată de D-ra Preduţa D. Bungeţianu şi D-nii : I. D. Cârstoiu, Vasile Ceauşescu, Marius Margulius, N. N. Mihăileanu, Nicolae Patraulea, Iancu Sager şi un anonim.

Problema este o consecinţă a teoriei polarelor.

1°. Punctele (A_1B_1, CA') ; (A_1C_1, BA') ; I, A_2 sunt colineare, căci se găsesc pe polara punctului A în raport cu unghiul B_1A_2C.

2°. Punctele (A_1B_1, BA') ; (A_1C_1, CA') ; A, A_2 sunt colineare, căci se găsesc pe polara punctului I în raport cu unghiul B_1A_2C.

3°. Punctele (BB_1, A_1C_1) ; (CC_1, A_1B_1), A_2 sunt colineare, căci se găsesc pe polara punctului A′ în raport cu unghiul IA_2B.

4°. Punctele (BB_1, CA') ; (CC_1, BA'), A_2 sunt colineare, căci se găsesc pe polara punctului A_1, în raport cu unghiul IA_2B_1.

5°. Punctele (BB_1, A_1C_1) ; (CC_1, BA') ; A sunt colineare, căci se găsesc pe polara punctului C în raport cu unghiul BAA_1.

6°. Punctele (CC_1, A_1B_1) ; (BB_1, CA') ; A sunt colineare, căci se găsesc pe polara punctului B faţă de unghiul CAA_1.

N. B.

PROBLEMA 4253. *Să se construiască un triunghiu* ABC, *cunoscând latura* BC, *înălţimea* AH *şi produsul* AB × AC.

Col. Gh. Buicliu.

Presupunând problema rezolvită fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC, A′ mijlocul lui BC, A_1 diametralul lui A şi D, D′ extremităţile diametrului OA′ aşa că A′D′ < A′D. Triunghiurile dreptunghice ABA_1, AHC fiind asemeni, dau

$$AB \times AC = AA_1 \times AH = 2R \times AH$$

$$\therefore \qquad R = \frac{m^2}{2h} \qquad (1)$$

unde R este raza cercului O şi

$$m^2 = AB \times AC \quad ; \quad h = AH.$$

Cunoscând pe R construcţia triunghiului cerut este imediată. Se înscrie în cercul O, de rază R, o coardă BC de lungimea dată $2a$ şi apoi se iau intersecţiile A ale acestui cerc cu paralelele la BC, duse la distanţa h de BC.

Discuţie. Fie

$$2a = BC \quad ; \quad h = AH \quad ; \quad m^2 = AB \times AC$$

şi (1) datele problemei.

Prima condiţie ca problema să fie posibilă, este

$$2a \leqslant 2R = \frac{m^2}{h}$$

$$\therefore \qquad 2ah \leqslant m^2. \qquad (2)$$

Pe o figură se vede că se obţin 4 triunghiuri, 2 câte 2 egale, când avem simultan

$$h < R \quad \text{şi} \quad h < A'D'$$

sau înlocuind pe A′D′ prin

$$R - \sqrt{R^2 - a^2} = \frac{m^2 - \sqrt{m^4 - 4a^2h^2}}{2h}$$

obţinem condiţiile sub forma

$$h\sqrt{2} < m \quad \text{şi} \quad m^2 < a^2 + h^2. \qquad (3)$$

Dacă

$$h = A'D'$$

$$\therefore \quad m^2 = a^2 + h^2 \tag{4}$$

obținem 3 triunghiuri: unul isoscel BD'C și 2 egale de cealaltă parte a lui BC.

Când

$$h < R \quad \text{și} \quad A'D' < h$$

sau când

$$R < h \quad \text{dar} \quad h < A'D$$

problema admite 2 triunghiuri egale. Aceste condițiuni devin, după înlocuire:

$$h\sqrt{2} < m \quad \text{și} \quad a^2 + h^2 < m^2 \tag{5}$$

sau

$$m < h\sqrt{2} \quad \text{și} \quad a^2 + h^2 < m^2.$$

Când

$$h = A'D \quad \text{și} \quad h\sqrt{2} < m$$

$$\therefore \quad m^2 = a^2 + h^2 \quad \text{și} \quad h\sqrt{2} < m \tag{6}$$

avem o soluțiune, triunghiul isoscel BDC.

Să considerăm cazul

$$2a = R$$

$$\therefore \quad 2ah = m^2. \tag{7}$$

Vom avea 4 triunghiuri, 2 câte 2 egale, când

$$h < R$$

$$\therefore \quad h\sqrt{2} < m \tag{8}$$

și 2 triunghiuri isoscele egale când

$$h = R \quad \therefore \quad m = h\sqrt{2}$$

nici o soluție când

$$h > R \quad \therefore \quad m < h\sqrt{2}.$$

Deasemeni în cazul general nu vom avea nici o soluție când

$$h > A'D \quad \therefore \quad m^2 < a^2 + h^2.$$

Această discuție se poate centraliza în următorul tabel:

$m^2 < 2ah$			Nici o soluție
$2ah < m^2$	$h\sqrt{2} < m$	$m^2 < a^2 + h^2$	4 soluțiuni: 2 triunghiuri egale de o parte a lui BC și 2 de altă parte.
		$m^2 = a^2 + h^2$	3 soluțiuni: 1 triunghiu isoscel de o parte a lui BC și 2 triunghiuri egale de cealaltă parte.
		$a^2 + h^2 < m^2$	2 triunghiuri egale de o parte a lui BC.
	$h\sqrt{2} > m$	$a^2 + b^2 < m^2$	2 triunghiuri egale de o parte a lui BC.
		$m^2 = a^2 + h^2$	1 triunghiu isoscel.
		$m^2 < a^2 + h^2$	Nici o soluțiune.
$2ah = m^2$	$h\sqrt{2} < m$		4 triunghiuri, 2 câte 2 egale.
	$a = h$; $m = a\sqrt{2}$		2 triunghiuri isoscele egale.
	$h\sqrt{2} > m$		Nici o soluție.

Observațiuni. 1°. D-l I. N. Sager a rezolvat problema, schițând un început de discuție fără însă a merge până la capăt. D-sa a examinat parțial numai 2 din cazurile ce se pot prezenta.

2°. Au rezolvat problema, fără a încerca vre-o discuție pentru a stabili condițiile pe care să le îndeplinească *a, m, h,* datele problemei, ceeace era singurul lucru esențial la această problemă:

D-şoarele: MARIA DRĂGUŢ, PREDUŢA D. BUNGEŢEANU şi ELIZA MOISE (Studente Cluj) şi D-nii: V. CSEKE, G. SILAŞ (Studenţi, Cluj); M. MARGULIUS (Bucureşti); V. I. VISSARION; TR. M. PREDOESCU (Lic. militar, Craiova); M. S. ZIFF, E. MEREUŢĂ (Student, Bucureşti); AL. D. STOICA (Lic. Marele Voevod Mihai, Bucureşti); N. A. BORZA (Sem. Ped. Univ. Cluj); P. M. VARLAM (Şc. Politehnică, Bucureşti); S.-LT. C. N. AVRAM (Ecole d'Application, Versailles); MIHAIL STĂNEŞTI şi C. IVĂNESCU (Student, Iaşi).

3°. D-nii: P. C. MAZILU (Lic. Internat, Iaşi); V. CEAUŞESCU (Lic. Militar); M. I. PREDESCU (Craiova); C. IVĂNESCU şi C. A. CRISTOPOL, fără a încerca discuţia, au trimis o soluţie exactă dar foarte greoaie prin algebră şi trigonometrie.

GH. B.

PROBLEMA 4272. *Să se demonstreze că:* c . m . m . d . c . *al numerelor* a + b *şi* ab *este un multiplu al* c . m . d . c . *al numerelor* a *şi* b.

COL. GH. BUICLIU.

Soluţie dată de D-nii: M. MĂNESCU (Lic. M. Eminescu, Bucureşti); M. MARGULIUS (Bucureşti); V. V. GHIOCEL (Bacalaureat, Giurgiu); V. CEAUŞESCU (Lic. Militar, Iaşi); S.-LT. A. EM. BĂDESCU (Rgt. 2 Art. grea); G. SILAŞ (Student, Cluj); AL. D. STOICA (Lic. Marele Voevod Mihai) şi M. S. ZIFF.

Dacă d este $c.m.m.d.c.$ al numerelor a şi b, atunci

$$a = dm \quad ; \quad b = dn$$

şi deci

$$a + b = d\,(m + n) \quad ; \quad ab = d^2mn.$$

Sub această formă se vede că $c.m.m.d.c.$ al numerelor $a+b$ şi ab este d sau un multiplu al lui d, după cum $m+n$ şi mn sunt prime sau neprime între ele.

Notă. 1°. D-l P. C. MAZILU (Bacalaureat, Iaşi) comunică, dar în ce termeni doamne, că proprietatea este publicată în *Aritmetica Raţională* de N. ABRAMESCU şi GR. ORĂŞANU ediţia V anul 1925 pag. 93 exerciţiul 12, cu următorul enunţ:

«Ce relaţie există între c . m . m . d . c . *a două numere* a *şi* b *şi acela al numerelor* a + b *şi* ab ?».

2°. D-l C. IVĂNESCU (Iaşi) a considerat numai cazul când $c.m.m.d.c.$ al numerelor $a+b$ şi ab este acelaşi cu acela al numerelor a şi b.

GH. B.

*PROBLEMA 4309. *Dacă* A, B *şi* C *sunt unghiurile unui triunghiu, să se stabilească:*

$$3\sin A \sin B \sin C + \Sigma \sin A (\cos B \cos C - 2\cos A) = 0.$$

GH. VASILIU-LEOBEN.

Soluţie dată de D-nii: ŞTIRBU GH., CEAUŞESCU VASILE şi STĂNCULESCU I. GH. (elevi ai lic. Militar din Iaşi), IULIAN ALEXIU şi S.-LT. PANAITE N. TH.

Prin enunţ ne este dat că:

$$\cos A = -\cos(B + C) = -\cos B \cos C + \sin B \sin C$$

deci:

$$3\sin A \sin B \sin C + \Sigma \sin A (3\cos B \cos C - 2\sin B \sin C)$$

$$= 3\sin A \sin B \sin C + 3\Sigma \sin A \cos B \cos C$$

$$- 6\sin A \sin B \sin C = 3[\sin A \cos(B + C) + \cos A \sin(B + C)]$$

$$= 3\sin(A + B + C) = 0. \qquad \text{c. c. t. d.}$$

S'a primit o soluţie analoagă dar neiscălită.

Soluţie dată de D-nii: S.-LT. TICA P. MARIN-GALL, DIMITRIE D. MAVRODIN, PREDOESCU I. MARIN, PANAIT C. MAZILU şi VASILE V. GHIOCEL.

Relaţia din enunţ este imediat verificată observând că ea se poate pune sub forma:

$$3\sin A \sin B \sin C + \sin A \cos B \cos C - 2\sin A \cos A$$

$$+ \sin B \cos A \cos C - 2 \sin B \cos B + \sin C \cos A \cos B$$

$$- 2\sin C \cos C = 3\sin A \sin B \sin C + \sin(A + B + C)$$

$$+ \sin A + \sin B + \sin C - (\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) = 0$$

ţinând seama că

$$\sin(A + B + C) = 0$$

şi că

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A \sin B \sin C.$$

Altă soluţie s'a primit dela D-nii: ION C. ŞOVA şi MARIUS MARGULIUS cari au dedus relaţia din enunţ scăzând între ele relaţiile cunoscute:

$\Sigma \sin A \cos B \cos C = \sin A \sin B \sin C$ şi $\Sigma \sin 2A = 4\sin A \sin B \sin C$.

Soluţii mai lungi şi prea încâlcite s'au primit dela D-nii: MARTEŞ V. GRIGORE, COŞOVLIU ŞTEFAN şi ŞUŞALĂ GH. (elevi ai

liceului Militar din Chişinău), ZAHARESCU I. (Liceul Militar Iaşi) şi MIRCEA LEONTE A. NEGREA.

In ultimul timp s'au mai primit soluţii dela D-ra MARGARETA CARACUDOVICI şi dela D-nii: ALFRED H. GEIER, I. N. SAGER, M. MĂNESCU, POPICĂ EUGEN, CSEKE WILHELM, GH. SILAŞ, CEZAR IVĂNESCU, S--LT. BĂDESCU EM. AUREL, DOBRESCU PAUL, FLORESCU HARALAMBIE, GRIGORESCU VINTILĂ, MILU I. NIC., PETRESCU OCT., PREDOESCU I. MARIN, ŞABAC IOAN, STĂNEŞTI MIHAIL şi STOICESCU DUMITRU.

GH. V.

PROBLEMA 4311. *Trei lucrători se angajează să sape un şanţ pentru care li se dă 7560 lei. Ei se învoiesc să lucreze în condiţiuni egale şi să-şi împartă egal suma ce vor lua. La urmă se iau la ceartă, unul zicând că a lucrat mai mult timp, altul că a lucrat mai repede şi altul că a lucrat mai greu, săpând partea dela fundul şanţului care era mai tare şi la care pământul era aruncat mai sus. Ei se duc la un inginer care constată că lucrătorii* A, B, C *au lucrat un număr de ore ca: 9 : 10 : 11; îi pune de sapă în condiţiuni egale de teren şi se stabileşte că în timpul în care* A *a săpat* $7m^3$, B *a săpat* $6m^3$ *şi* C *numai* $5m^3$. *Făcându-se o experienţă cu săparea la partea de sus şi de jos a şanţului inginerul stabileşte că munca depusă de* C, *care a săpat partea de jos a şanţului este cu* 20% *mai multă ca a celorlalţi doi cari au săpat în comun partea de sus. In aceste condiţiuni să se împartă suma de 7560 lei şi să se arate cine şi cât a luat mai mult sau mai puţin decât se învoiseră la început.*

I. IONESCU.

Cei trei lucrători vor primi sume proporţionale cu numărul de ore făcut de fiecare, adică în raportul de 9 : 10 : 11. De asemenea vor primi sume proporţionale cu cantitatea de teren săpat în condiţiuni egale, adică, ca 7 : 6 : 5. Şi în sfârşit, vor incasa proporţional cu dificultatea de săpare a terenului, adică cu numerele 100 : 100 : 120, sau, eliminând aci factorul comun 20, vor lua proporţional cu 5 : 5 : 6.

Prin urmare, lucrătorii A, B, C vor lua sume proporţionale cu $9 \times 7 \times 5 : 10 \times 6 \times 5 : 11 \times 5 \times 6$. Eliminăm şi aci factorul comun 5×3 şi vedem că lucrătorii trebue să fie plătiţi cu sume în raporturile de $3 \times 7 : 10 \times 8 : 11 \times 2$. Deci trebue să împărţim suma de 7560 lei în rapoartele $21 : 20 : 22$. Vom împărţi deci suma de 7560 lei prin $(21 + 20 + 22) = 63$ şi rezultatul, — care este 120, — il înmulţim respectiv cu numerele 21, 20, 22. Găsim astfel că lucrătorului A i se cuvine 2520 lei, lui B 2400 lei şi lui C 2640 lei.

Ţinând seamă că ei se învoiseră să-şi împartă suma în părţi egale, — adică să ia fiecare $7560 : 3 = 2520$ lei, — rezultă că A va lua aceeaşi sumă pe care ar fi luat-o după învoiala iniţială; că B va lua cu 120 lei mai puţin iar C cu 120 lei mai mult.

PANAIT C. MAZILU
(Elev în Anul Preparator al Şcoalei Politehnice din Bucureşti).

Au rezolvat foarte bine problema, însă cu calcule numerice mai multe, D-nii: S.-LT. CONSTANTIN N. AVRAM (École de Génie, Versailles), VINTILĂ A. GRIGORESCU (Liceul N. Filipescu, Mănăstirea Dealului). ION G. ŞABAC (Elev Liceul N. Filipescu Mănăstirea Dealului), MATEI F. ION (Liceul militar Mihai Viteazu, Târgul Mureş), N. TĂTARU (Elev fruntaş cl. III. B., Liceul militar Târgul Mureş), V. CEAUŞESCU şi GH. RUSU (Liceul militar Iaşi), P. DOBRESCU şi M. NĂSTASE (Liceul militar, Mănăstirea Dealului), AL. FENICHI, I. A. STROIESCU, V. S. METEA, GH. L. DOBRESCU, I. ANCA, AL. GACIU, V. I. GREAB, şi N. VASU (Elevi Liceul militar, Târgu Mureş),

PROBLEMA 4323. *De care din bisectoarele* BB' *şi* CC' *ale unui triunghiu* ABC *este mai aproape vârful* A ?

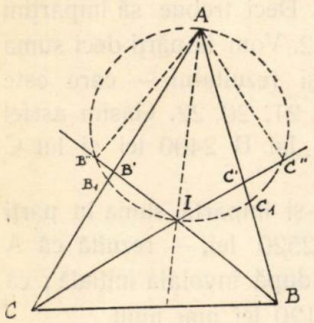
I. IONESCU.

Soluţie geometrică dată de D-ra CORNELIA NANEŞ şi de D-nii: IULIAN ALEXIU şi CONSTANTIN BUDEANU (Elevi ingineri, Şcoala Politehnică, Bucureşti), VASILE CEAUŞESCU. (Liceul militar, Iaşi).

Fie AB", AC" depărtările lui A de bisectoarele BB' şi CC'; fie I intersecţia bisectoarelor. Unghiurile AB"I, AC"I fiind drepte, punctele B" şi C" vor fi pe cercul descris pe AI ca diametru. Fie C_1 şi B_1 intersecţiile acestui cerc cu laturile AB, AC. Unghiurile ABI şi ACI sunt $\frac{1}{2}$B şi $\frac{1}{2}$C. Măsura lor, de pe figură, este:

măs. $\frac{1}{2}$B = $\frac{1}{2}$ (arc. AB" − arc. IC_1); măs. $\frac{1}{2}$C = $\frac{1}{2}$ (arc. AC" − arc. IB_1).

Scăzând aceste două egalităţi, şi observând că arc. IC_1 = arc. IB (de oarece AI fiind bisectoară, unghiurile CAI, BAI sunt egale şi sunt măsurate de jumătăţile arcelor IB_1, IC_1) găsim;



măs. $\frac{1}{2}(B-C)=\frac{1}{2}$(arc. AB″ − arc. AC″).

Dacă B > C, reiese că şi arc. AB″ > arc. AC″. Şi cum în acelaşi cerc la arce mai mari corespund coarde mai mari reiese că AB″ > AC″. Conchidem dar că vârful A este mai depărtat de bisectoara unghiului celui mare neadiacente lui A. Mai reiese că pentru triunghiul isoscel, cu B = C, depărtările sunt egale.

Soluţiune trigonometrică dată de D-nii: I. N. SAGER (Profesor, Silistra), CSEKE WILHELM (Student Cluj), S.-LT. CONSTANTIN N. AVRAM (École de Génie, Versailles), SERGIU H. HORNSTEIN şi M. MĂNESCU. (Elevi, Liceul Eminescu, Bucureşti), NEGREA A. MIRCEA-LEONTE (Brăila), V. I. C. VISARION.

Triunghiurile dreptunghice ABB″, ACC″, ne dau:

$$AB'' = AB \sin(ABB'') = c \sin\tfrac{1}{2}B = 2R\sin C \sin\tfrac{1}{2}B,$$

$$AC'' = AC \sin(ACC'') = b \sin\tfrac{1}{2}C = 2R\sin B \sin\tfrac{1}{2}C,$$

$$\therefore\ AB'' - AC'' = 2R(\sin C \sin\tfrac{1}{2}B - \sin B \sin\tfrac{1}{2}C)$$

$$AB'' - AC'' = 4R \sin\tfrac{1}{2}B \sin\tfrac{1}{2}C (\cos\tfrac{1}{2}C - \cos\tfrac{1}{2}B).$$

De aci se vede că AB″ > AC″ dacă $\cos\frac{1}{2}C > \cos\frac{1}{2}B$. Cum $\frac{1}{2}B$ şi $\frac{1}{2}C$ sunt mai mici ca 90^0, reiese că trebue să avem $\frac{1}{2}B > \frac{1}{2}C$ sau B > C. Deci A este mai depărtat de bisectoara unghiului celui mai mare.

Observaţiuni. 1. D-l M. MĂNESCU a demonstrat că la aceeaşi concluziune se ajunge şi dacă am înlocui bisectoarele prin înălţimi sau mediane.

2. D-l NEGREA A. MIRCEA-LEONTE a considerat şi cazul bisectoarelor exterioare. Dacă considerăm două bisectoare exterioare atunci când bisectoarele aparţin aceluiaşi vârf, depărtarea este mai mare la cele din două unghiuri care este obtuz, iar când considerăm bisectoara interioară a unui unghiu şi pe cea exterioară a altui unghiu, atunci vârful A e mai depărtat de bisectoara exterioară decât de cea interioară.

3. D-l IULIAN ALEXIU a mai dat o demonstraţiune geometrică cu ajutorul cercului circumscris lui ABC prelungind bisectoarele până ce întâlnesc acest cerc.

4. Au mai dat soluţii geometrice D-nii: ARNO HILT, O. PETRESCU, MATEI ALEXANDRU, ŞABAC I., P. DOBRESCU, D. D. MEHEDINŢI, M. PROCOPIESCU, V. GRIGORESCU, D. D. MAVRODIN.

*EXERCIŢII

16. Să se calculeze determinantul

$$(a_1 , a_2 , \ldots , a_n) = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & x \ldots x \\ -x & a_2 & x & x \ldots x \\ -x & -x & a_3 & x \ldots x \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -x & -x & -x & -x \ldots a_n \end{vmatrix} .$$

T. P.

R. Avem relaţia de recurenţă

$$(a_1 , a_2 , \ldots , a_n) = (a_1 + x)(a_2 , a_3 , \ldots , a_n) - \\ - x(a_2 - x)(a_3 - x) \ldots (a_n - x).$$

Dacă punem

$$f(x) = (x + a_1)(x + a_2) \ldots (x + a_n)$$

găsim

$$(a_1 , a_2 , \ldots , a_n) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} .$$

PROBLEME PROPUSE

4341. Cu cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, luate câte o singură dată, să se formeze trei numere având una, patru, şi patru cifre, sau două, trei şi patru cifre, astfel ca al treilea număr să fie egal cu produsul celorlalte două.

V. THÉBAULT.

4342. Pe un cont curent al unui fabricant cu un comerciant, client al lui, găsim scris:

La *Debit:* Sold la 1 Ianuarie 3250 lei; la 20 Ianuarie 4000 lei cu scadenţa 17 Martie; la 5 Fevruarie 2500 lei cu scadenţa 9 Mai; la 17 Fevruarie 1500 lei cu scadenţa 1 Aprilie; la 20 Fevruarie 3200 lei cu scadenţa 1 Iunie; la 5 Martie 5400 lei cu scadenţa 25 Aprilie.

La *Credit:* La 5 Ianuarie 2400 lei cu scadenţa 1 Martie; la 10 Ianuarie 3000 lei cu scadenţa 21 Mai; la 30 Ianuarie 5000 lei cu scadenţa 25 Aprilie; la 10 Fevruarie 2000 lei cu scadenţa 15 Iunie; la 25 Fevruarie 1000 lei cu scadenţa 20 Mai; la 1 Martie 1600 lei cu scadenţa 9 Aprilie; la 10 Martie 4200 lei cu scadenţa 1 Mai; la 25 Martie 6050 lei cu scadenţa 5 Iulie.

Dobânzile au fost de $4^0/_0$ în Ianuarie; de $5^0/_0$ în Fevruarie şi de $6^0/_0$ dela 1 Martie înainte, pentru sumele debitoare; şi de respectiv $3^0/_0$, $4^0/_0$, $5^0/_0$ pentru sumele creditoare.

Se cere să se încheie acest cont pe ziua de 1 Iulie.

I. IONESCU.

4343. Să se găsească o regulă pentru aflarea directă a restului împărţirei unui număr întreg oarecare prin 32.

Lt. Comandor av. Gr. Zapan.

4344. In triunghiul ABC, AM şi AN fiind două ceviene izogonale, variabile, se cer locurile geometrice ale centrelor cercurilor lui Euler şi Taylor ale triunghiului AMN.

C. Ionescu Bujor.

4345. Să se demonstreze că în triunghiul ABC, dreptunghic în C:

1. Punctele în cari cercul exînscris O_a atinge ipotenuza AB şi cateta BC sunt coliniare cu punctul în care cercul I înscris triunghiului atinge cateta AC.

2. Punctele în cari cercul exînscris O_a atinge ipotenuza AB şi cateta AC sunt coliniare cu punctul în care cercul exînscris O_c atinge cateta BC.

Gh. Vasiliu.

4346. Suma termenilor unei progresii aritmetice, fără primul şi penultimul termen, este 188. Aceeaşi sumă, fără ultimul şi al doilea termen, este 182. Să cere să se găsească acea progresie ştiind că numărul termenilor progresiei este cu 1 mai mic decât triplul ultimului termen.

V. Ig. Godeanu.

4347. Să se calculeze expresiunea

$$C_{p+n-1}^{p-1} C_{p+m+n-1}^{p-1} - C_\lambda^1 C_{p+n}^{p-1} C_{p+m+n}^{p-1} + C_\lambda^2 C_{p+m+1}^{p-1} C_{p+m+n+1}^{p-1} + \ldots + (-1)^\lambda C_{p+n+\lambda-1}^{p-1} C_{p+m+n+\lambda-1}^{p-1}.$$

Să se generalizeze. Pentru ce valoare întreagă a lui λ, această sumă este zero, m, n, p fiind întregi şi pozitivi? Dar dacă nu sunt?

M. Ghermănescu.

4348. Să se rezolve ecuaţia

$$\cos 10x - \cos 8x - \cos 6x + 1 = 0.$$

S.-Lt. I. C. Savin.

4349. Să se găsească limita:

$$\lim_{x=0} \frac{n^3 \sin mx + m^3 \operatorname{sh} nx - mn\,(m^2 + n^2)\,x}{p^3 \operatorname{tg} qx + q^3 \operatorname{th} px - pq\,(p^2 + q^2)\,x}.$$

Şt. E. Olteanu.

4350. Cum trebue să fie între ele vitezele a două mobile, care mişcându-se pe două drepte oarecare, să formeze în fiecare moment, cu un punct fix dat, un sistem de trei puncte coliniare?

Al. A. Roşu.

ERATĂ. După enunţul problemei 1364 la pag. 179 să se adaoge numele autorului ei: I. Ionescu.

Articolele, notele şi problemele însemnate cu * se referă la matematicile elementare (cursul de liceu).

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Alexandru M. (4323); *Amărică I. T.* (4328); *Anca I.* (4311); *Anca P.* (4291); *Arno Hilf* (4324); *Avram N. Const. Subloc.* (4253, 334); *Bădescu Em. Aurel Subloc.* (4293, 305, 09, 17, 26, 28); *Bungeţianu D. Preduţa* (4195, 296, 304, 28); *Candara Gh.* (4321); *Caracudovici Margareta* (4336); *Ceauşescu Vasile* (4174, 83, 95, 237, 39, 61, 79, 308, 10, 11, 12); *Cocea G. T.* (4286, 306, P); *Coşniţă C.* (3650); *Coşovliu St.* (4296, ?, P); *Cseke Wilhelm* (4304); *Dan M.* (4239); *Dăscălescu Const.* (4296); *Dobrescu L. Gh.* (4311), *Dobrescu Paul* (4179, 309, 11, 23, 31); *Elefterescu M. O.* (4239); *Fenichi A.* (4311); *Florescu Haralambie* (4309, 17); *Gaciu A.* (4311); *Greab I. V.* (4311); *Grigorescu Vintilă* (4179, 239, 82, 309, 11, 23, 24, 34, P); *Harbuz D.* (4296); *Harbuz I. Gh.* (4334); *Haret V. C.* (4328); *Hilf A.* (4323); *Iliescu B. D.* (4328); *Ionescu-Bis P. H.* (3878, 4237, 312); *Ionescu Ilie* (A); *Ivănescu Cezar* (4155, 255, 79, 86, 93, 94, 305, 06, 10, 12, 17, 24, 28); *Margulius M.* (4286); *Marteş V. Gr.* (4328); *Matei Alex.* (4276); *Mavrodin D. D.* (4083, 296, 323, 31, 38); *Mazilu C. Panait* (4293, 312, 31, E, P); *Mehedinţi D. D-tru* (4291, 93, 94, 324, 31, 34); *Metea I. V.* (4311); *Mihăileanu N. N.* (2985); *Milu I. Nicolae* (4309, 17); *Naneş Cornelia* (4291, 323); *Năstase M.* (4261, 311, 21, 31); *Negrea A. Mircea-Leonte* (4084, 328); *Nicoară D. C.* (4328); *Petrescu C. Oct.* (4279, 96, 309, 17, 23, 28); *Popescu-Greaca V.* (4328); *Postelnicescu M.* (4331); *Predoescu I. Marin* (4238, 67, 73, 309, 21, 24, E); *Procopiescu Mihail* (4293, 321, 23, 24, E); *Russu Gh.* (4267, 311); *Şabac Gh. Ion* (4239, 78, 94, 309, 23, 24, 34); *Stamate M.* (4331); *Stăneşti I. Mihail* (4267, 93, 305, 09, 38, E, P); *Stoicescu I. D-tru* (4309, 17); *Stroiescu A. I.* (4311); *Tătaru N.* (4311); *Trăsnitu N.* (4328); *Valerian Apostol* (4328); *Varlam M. C.* (4187, 267); *Varlam M. Petre* (4075, 84, 96, 267, 328); *Vasiliu A. C.* (4328); *Vasiliu C. N.* (4328); *Vasiliu I. M.* (4328); *Vasu N.* (4311); *Verenca S.* (4328); *Vogt Florica* (4323, E).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie **pe o singură parte a foii şi nu se vor tratà mai multe chestiuni diferite pe aceiaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipì sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecțiunea „GAZETEI MATEMATICE“

«Gazeta Matematică» vinde ani compleți broșați cu prețul de 400 lei volumul, afară de volumele: X, XVII, XVIII, XIX, XX și XXI care se vând cu prețul de 500 lei volumul.

Volumele: I, XV și XXV sunt epuizate.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu și V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **N. Abramescu,** *Lecțiunile de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediția IV revăzută și adăogită,* 1924 (Epuizată).

3. **A. G. Ioachimescu și G. Țițeica,** *Culegere de probleme de mecanică și geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme și o planșă) (Epuizată).

4. **Tr. Lalescu și Șt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografie* (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu,** *Tratat de geometrie analitică,* Fascicola I *Ediția II revăzută și adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—
Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).
Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).
Idem, Fascicola IV Aplicațiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150,—

6. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10,—

7. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediția III-a revăzută și îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. Lei 180,—

8. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu și G. Țițeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

9. **G. Țițeica,** *Culegere de probleme de geometrie* Lei 150,—

La aceste prețuri se vor adăogà taxele poștale pentru expediție.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul.* (Ediția II) Lei 150,—

BIBLIOTECA „AS“

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plătește înainte și începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamațiunile și cererile pentru cărți din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete numai D-lui: Inginer **Al. D. Bunescu,** Directorul General al Monitorului Oficial și Imprimeriilor Statului, B-dul Elisabeta 29, București I.

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii și orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie și expediție, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Căluşei 23, București 4.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXXIX

NUMĂRUL 7. — MARTIE 1934

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAȚIA" SIBIU

SUMARUL

1. † Vasile Cristescu . . . . . *I. Ionescu.*
2. Sur l'isopôle d'une droite par rapport à un triangle . . . . . *V. Thébault.*
3. Centrul de greutate la triunghiu şi la tetraedru *D. V. Ionescu.*
4. Premiul „Inginer Al. Roşu".
5. Raportul comisiunei pentru acordarea premiului „V. Cristescu".
6. Note matematice: 28 — 33.
7. Chestiuni de examen.
8. Bibliografie.
9. Cereri.
10. Diverse.
11. Probleme rezolvate: 3579, 3717, 4063, 4129, 4201, 4223, 4242, 4331.
12. Exerciţii: 17.
13. Probleme propuse: 4351 — 4360.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI

IMPRIMERIA NAŢIONALĂ

1934

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: Colonel **Gh. Buicliu** din Ministerul Apărării Naţionale; **I. Buşilă**, Inginer Inspector General, Ministerul Lucrărilor Publice; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice" se vor trimite D-lui Inginer-Şef GH. ILIESCU, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret, Bucureşti 6.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29 Bucureşti 1) în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 691, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 214, 36, 70, 71, 97, 99, 310, 33, 67, 84, 86, 99, 412, 50, 553, 650, 79, 711, 29, 64, 876, 906, 14, 29, 59, 87, 2003, 04, 17, 70, 74, 111, 70, 338, 405, 30, 39, 66, 77, 502, 03, 56, 77, 87, 607, 09, 23, 38, 55, 65, 84, 92, 709, 13, 17, 35, 69, 80, 814, 65, 86, 89, 909, 12, 26, 36, 47, 3005, 45, 69, 81, 127, 61, 69, 208, 30, 55, 60, 98, 300. 04, 09, 10, 16, 18, 50, 405, 12, 24, 25, 45, 72, 89, 93, 522, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 88, 608, 22, 27, 32, 46, 47, 57, 65, 81, 82, 84, 99, 700, 03, 33, 36, 93, 804, 08, 29, 36, 44, 53, 64, 80, 96, 909, 13, 15, 16, 18, 20, 33, 44, 83, 4010, 13, 30, 34, 45, 53, 59, 62, 68, 70, 73, 85, 102, 03, 11, 12, 18, 19, 23, 32, 48, 50, 51, 63, 67, 69, 91, 92, 203, 06, 09, 10, 13, 25, 26, 30, 36, 40, 43, 46, 48, 49, 52, 56, 75, 77, 80, 81, 83, 87, 88, 89, 90, 300, 01, 03, 07, 14, 15, 18, 19, 20, 22, 27, 30, 32, 33, 37, 40, 41, 42, 44, 45, 46, 47, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procură dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29. Bucureşti 1), cu preţul de 12 lei.

† VASILE CRISTESCU

III. Activitatea lui la „Gazeta Matematică"

In această Revistă, Anul XXXIV pag. 441 — 449 am arătat *„Viața și activitatea profesională"* a inginerului VASILE CRISTESCU, unul din întemeietorii *Gazetei Matematice* și redactor al ei până la moartea sa, timp de peste 33 ani, iar în Anul XXXV pag. 164—170 am scris despre *„Activitatea lui științifică"*. La finele acestui din urmă articol am spus că *„Intr'un număr viitor vom arăta activitatea lui la* **Gazeta Matematică**". In cele ce urmează voiu căuta să aduc la îndeplinire această promisiune, întrucât dispun acum de toate elementele unei expuneri cât mai complecte.

Activitatea lui VASILE CRISTESCU la *Gazeta Matematică* o putem asemui cu curgerea continuă a apelor unui râu, a căror origină trebue căutată înainte de apariţiunea lor la zi prin isvoare, și ale căror unde puternice dela gura lor se resimt și dincolo de vărsarea lor în marea indefinită. Din această cauză este necesar să povestim aci câte ceva despre începuturile *Gazetei Matematice*. Despre aceste începuturi am mai vorbit la Serbarea *Gazetei Matematice* dela 17 Mai 1909 și cu ocaziunea intrării *Gazetei Matematice* în al doilea sfert de veac. (Anul XXVI. pag. 14).

La 15 Septemvrie 1894 a avut loc Concursul pentru admiterea în Anul I al fostei Școale Naționale de Poduri și Șosele din București transformată după războiu în Școală Politehnică. Rezultatul acelui concurs a fost neașteptat de slab. Primul la clasificație nu obținuse de cât nota 15,50 (maximum fiind 20) și nu a fost de cât al 35-lea pe tabloul de clasificare generală al celor 64 elevi ai Școalei, inclusiv cei 10 admiși atunci în Anul I din Anul Preparator. După normele de atunci, primii 30 la clasificare erau de drept interni, dacă erau români. S'a întâmplat însă ca printre primii 30 să fie 5 străini, așa că numai grație acestui fapt Anul I de atunci a putut să-și aibă sergentul său de clasă! Era un rezultat dezastros față de anii precedenți când primul dintre cei admiși în Anul I era printre primii dela clasificația generală. Eu, împreună cu alți ingineri, fuseserăm chemați de fostul Director al Școalei, CONSTANTIN STURZA, ca să supraveghem pe candidați la darea tezelor, și eram în curent cu ce făcuseră candidații.

După darea rezultatelor generale şi începerea cursurilor la acea Şcoală, în după amiaza zilei de 4 Octomvrie, ne găseam mai mulţi ingineri absolvenţi ai Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele în Birourile linii ferate Feteşti-Cernavoda de sub conducerea ilustrului inginer ANGHEL SALIGNY. Birourile erau în Strada Manea Brutaru (azi General Budişteanu) No. 14 în fundul curţei. In o odăiţă mică stetea singur inginerul VASILE CRISTESCU; era camera cea mai apropiată de stradă pe stânga. El absolvise Şcoala în 1892. In alte birouri erau inginerii VICTOR BALABAN şi MIHAIL ROCO din seria 1893 şi eu cu colegul meu de clasă ION G. ZOTTU din seria 1894. Orele de biurou erau pe atunci dela 11 la 18, adică 7 ore continui. Creerul cel mai dârz refuza să stea să calculeze continuu în tot acel interval, arii, volume, greutăţi, eforturi, momente de inerţie, etc., şi atunci, la anumite ore, ne întruneam mai mulţi în acelaş biurou şi, — cum se zice, — mai puneam ţara la cale. In ziua de 4 Octomvrie 1894 ne-am întrunit aceşti cinci ingineri, de care vorbirăm, în biroul lui VASILE CRISTESCU, unde le-am expus rezultatele Concursului de Admitere în Anul I al Şcoalei de Poduri şi Şosele. S'a început atunci o discuţie aprinsă în privinţa cauzelor care au adus la asemenea rezultate şi ale acelora care făceau ca mai înainte să se obţină rezultate mai frumoase. Era firesc ca pe noi, foştii elevi ai acelei Şcoale, să nu ne lase indiferenţi rezultatul Concursului din acel an, când vedeam mai ales că profesori de ai noştri, ca ANGHEL SALIGNY, ne preferau inginerilor veniţi din Şcoli străine. Rezultatul nu era de natură să menţină reputaţiunea câştigată a Şcoalei noastre tehnice superioare nici să contribuie la propăşirea Corpului tehnic român.

In timpul discuţiunilor, VASILE CRISTESCU, ne spuse că pe vremea lui candidaţii la Şcoala Naţională de Poduri şi Şosele veneau bine pregătiţi în matematici, căci lucrau probleme la Revista *„Recreaţii Ştiinţifice"*, care a apărut la Iaşi în anii 1882—1889, Revista fusese înfiinţată de profesorii C. CLIMESCU, N. CULIANU, I. M. DOSPINESCU, G. I. LUCESCU, I. MELIK, V. PALADI, I. V. PRAJA, I. D. RALET, G. ROŞU şi G. ZARIFOPOL, iar la urmă rămăsese singur C. CLIMESCU. Revista a dus-o greu, căci cheltuielile erau mari şi veniturile mici. După încetarea acelei reviste ieşane, puţini liceeni lucrau la Jurnalul lui VUIBERT sau la al lui LONGCHAMPS iar câţiva studenţi, elevi ingineri şi chiar ingineri la revista belgiană *Mathesis,* care apărea la Gand sub conducerea renumiţilor profesori P. MANSION şi J. NEUBERG.

După această expunere a lui VASILE CRISTESCU, inginerul ION ZOTTU, care se pregătise un an la Facultatea de ştiinţe pentru a putea intra în Şcoala Naţională de Poduri şi Şosele, se adresează atunci lui CRISTESCU şi mie, care lucram la revista *Mathesis,* şi ne spune că de ce lucrăm la reviste străine şi nu scoatem o revistă matematică românească, ca să profite elevii liceelor noastre care vor să devină matematiciani, profesori, ingineri sau ofiţeri de arme speciale. O asemenea revistă ar fi de o mare utilitate, căci ar scuti multor elevi buni, care vor să se facă ingineri, un an de pregătire de matematici la Facultatea de ştiinţe, putând intra direct din liceu în Anul Preparator al Şcoalei.

Eu i-am răspuns lui ZOTTU, că de scos o revistă de matematici nu ar fi greu, dar e greu de susţinut materialiceşte, probă *Recreaţiile ştiinţifice* care nu au putut dura decât şase ani, cu mari greutăţi, de şi nu era specială pentru matematici, ci mai publica articole de ştiinţele naturale, ştiinţele fizico-chimice, geografie, etc. Soarta acelei Reviste nu era de natură să încurajeze o întreprindere de acelaş fel. La noi reviste literare, pe care, le putea citi o lume întreagă, nu se puteau susţine fără sacrificii mari ale redactorilor lor, fără subvenţiuni, fără abonamente forţate, dar o revistă specială de matematici, ştiinţă pe care o hulea toată lumea!. *„Trebuie găsiţi banii şi apoi matematicianii"* !..

S'a încins atunci o discuţiune asupra mijloacelor financiare care ar putea asigura apariţiunea Revistei. Nu s'a găsit alt mijloc decât cotizaţia personală a redactorilor. Era vădit că trebuia scoasă o Revistă de matematici şi că noi trebuia să ajutăm prin ori ce mijloace Şcoala în care am căpătat, timp de cinci ani gratuit, cultura tehnică, şi care ne-a întreţinut în internat patru ani. In plus, după cum spune BACON, orice om rămâne toată viaţa dator propăşirii profesiunii sale. De aceia ne-am hotărît câte cinci să ne restrângem bugetele teatrelor, petrecerilor, plimbărilor, etc. ca să putem da până la 20 lei (aur) lunar pentru susţinerea Revistei, şi de a mai căuta şi alţii care să se asocieze cu noi. Consfătuirea s'a terminat însărcinându-se VASILE CRISTESCU cu luarea de informaţiuni pe la tipografii despre tipărirea Revistei şi pe mine cu redactarea unei declaraţiuni de solidarizare în vederea tipăririi Revistei. După propunerea lui VICTOR BALABAN i s'a dat acestei reviste numele de *„Gazeta Matematică"*. Deciziunea de a se scoate Revista era astfel luată.

A doua zi VASILE CRISTESCU ne comunică că apariţiunea Revistei ar putea fi asigurată dacă s'ar găsi 10 redactori care să plătească,—nu numai să subscrie,—15 lei lunar; altfel era necesar cel puţin 20 lei lunar. O asemenea cotizaţiune pare azi fără nici o însemnătate, însă nu trebuie uitat că aceşti lei erau lei aur şi după valoarea lor de atunci, echivalează cu aproape 1000 lei daţi lunar! Declaraţia pe care o redactasem cerea ca toate cheltuielile să fie plătite din cotizaţii iar veniturile să se capitalizeze. Cotizaţiile nu se puteau reduce de cât în măsura în care veniturile Capitalului pot acoperi cheltuielile de tipărire. Declaraţiunea începea astfel: *„Subsemnaţii ne obligăm pe noi înşine şi unul pe altul...“* şi se încheia cu jurământul: *„Aşa să ne ajute Dumnezeu“*. Primul care a semnat-o a fost VASILE CRISTESCU care era cel mai vechiu inginer dintre noi.

Toată chestiunea era acum să se mai găsească încă cinci redactori care să se oblige a da 15 lei lunar. Această sumă era pe atunci nemai pomenit de mare pentru întreprinderi nerentabile, care să ceară şi muncă desinteresată şi să nu procure nici o distracţie! Ea era evident foarte mare pentru aceia mai ales a căror curbă a Casei stătea totdeauna în regiunea negativă! Perspectiva de rentabilitate a întreprinderii noastre era cu totul imaginară! Adevărata valoare a multora din promisiunile ce ni se făceau, nu o puteam determina! Teama de indiferenţa celora la care se adresa Revista, teama de lipsă de cititori pentru matematici, teama de lipsă de materie originală, coprindea şi pe alţii, cum ne coprindea şi pe noi uneori. Teama ca Revista să nu moară înainte de a muri Redactorii ei, era şi mai mare!. Un lucru rămânea necontenit cert şi pozitiv: dorinţa celor *cinci:* VICTOR BALABAN, VASILE CRISTESCU, ION IONESCU, MIHAIL ROCO şi ION ZOTTU de a mai găsi alţi *cinci!*. Declaraţiunea semnată de aceştia a umblat prin toată ţara şi a fost semnată după 9 luni de inginerul EMANOIL DAVIDESCU (decedat în 1905) şi MAURICIU KINBAUM (azi inginer la Buenos Aires), absolvenţi ai Şcoalei în 1894. In Iulie 1895 se înscriu inginerii noi eşiţi din Şcoală, NICULAE NICULESCU (mort în 1924) şi TANCRED CONSTANTINESCU. Intr'o seară din luna August 1895 semnează declaraţia şi inginerul A. G. IOACHIMESCU, coleg cu VASILE CRISTESCU, care se întorsese atunci din Franţa dela studii de specializare.

Cu modul acesta numărul de *zece* s'a complectat şi *Gazeta*

Matematică putea apare. O consfătuire a redactorilor din Bucureşti dă lui VASILE CRISTESCU grija Redacţiunii şi lui ION ZOTTU administraţiunea şi Casieria. Inginerul MIHAIL ROCO este însărcinat cu redactarea *„Introducerii"* care s'a publicat în prima pagină din Anul I şi care începe astfel:

„Scopul acestei reviste este: 1) *Publicarea de articole originale de matematici.* 2) *Desvoltatea gustului pentru studiul acestei ştiinţe şi al cercetărilor originale"*.

S'a cerut apoi materie de publicat dela redactorii care nu erau în Bucureşti şi s'a decis apariţiunea la 15 Septemvrie 1895, a doua zi după inaugurarea Podului peste Dunăre la Cernavoda. O nenorocire însă era să întrerupă realizarea hotărîrii noastre. La finele lunei August, VICTOR BALABAN cade grav bolnav fără speranţe de scăpare. Cu modul acesta numărul de *zece* se descomplecta. Publicaţia era ameninţată! Am hotărît să nu stricăm preparativele de tipărire cu speranţa că vom găsi şi pe al zecelea imediat după ce va apare primul număr, când mulţi neîncrezători se vor convinge de hotărîrea noastră nestrămutată. De altfel, înainte chiar de apariţiunea primului număr, Redacţia a fost complectată cu D-ra CONSTANŢA POMPILIAN, licenţiată în matematici, azi D-na C. ZOSSIMA, directoarea Institutului Pompilian din Bucureşti. VICTOR BALABAN s'a stins la câteva zile după apariţiunea primului număr al *Gazetei Matematice*, al cărui naş a fost. Om de caracter, fire entusiastă, camarad excelent, nu a mai fost în stare să vază această revistă apărută şi să se ducă pe lumea cealaltă cu mulţumirea sufletească că strădaniile lui de a se ridica nivelul matematicilor în România au căpătat un început de realizare! Credinţa antică şi medievală, că o clădire mare nu durează dacă la temelia ei nu se pune o viaţă de om, a înfăptuit-o la *Gazeta Matematică* inginerul VICTOR BALABAN!

Inainte de apariţiune s'a mai ivit o împrejurare care era să oprească opera noastră. La 29 Iunie 1894 se înfiinţase la Bucureşti *„Societatea Amicii Ştiinţelor Matematice"* sub Preşedenţia Profesorului universitar C. GOGU, şi ni se făcuse propunerea de a ne contopi cu acea Societate. Opoziţiunea lui VASILE CRISTESCU, ION ZOTU şi a mea au oprit această contopire, şi asfel *Gazeta Matematică* a putut lua fiinţă.

Dificultăţile care au trebuit să fie învinse la început au fost foarte mari. Slabele noastre mijloace financiare nu ne-a permis să

mergem dela început la o Tipografie mare, cu lucrători obişnuiţi a culege matematici, ci ne-am dus la aceia care a lăsat mai eftin, la *„Tipografia Populară"*, cu toate că matematica numai ştiinţă populară nu este! Multe din semnele matematice nici nu existau la acea tipografie, şi culegătorul trebuia să şi le cioplească singur! Primele patru numere ce am scos acolo se resimt mult de acest lucru. Nu era de cât un culegător, MACHE, mai abil, pe care VASILE CRISTESCU a avut multă amărăciune până să-l înveţe să aşeze exponenţii, indicii, radicalii, etc. Corecturile i-au dat mult de lucru, căci ce era bun azi se strica a doua zi. Pentru ca să se asigure apariţiunea la timp a Revistei, el se ducea alternând cu colegul IOACHIMESCU, în timpul serii, în mansardele acelei tipografii, învăţând pe MACHE cum să culeagă, cum să corecteze greşelile, şi cum să aranjeze formulele. Erau zile în care, dacă MACHE culegea o pagină, era lucru mare! Când patronul tipografii îi făcea observaţiune că merge prea încet şi că nu-i ese la socoteală pe preţul oferit, ei îi zâmbea ironic şi în zicea: *„Ai D-ta, Domnule idee de ce este asta? Asta-i matematică, Domnule!"*

Dela No. 2 înainte, sarcina lui VASILE CRISTESCU a mai fost uşurată, căci după inaugurarea Podului peste Dunăre eu am fost mutat în Bucureşti iar în Noemvrie 1894 a intrat în Redacţia *Gazetei Matematice* GHEORGHE ŢIŢEICA, care nu s'a dat în lături dela orice obligaţiune care ar fi fost în scopul apariţiunii exacte şi propăşirii *Gazetei Matematice*. Trebue ştiut că Redactorii făceau singuri corespondenţa cu abonaţii şi trimiţătorii de probleme sau de manuscrise de tipărit; ei făceau expediţiunea, încasau abonamentele, etc. Numai în Anul X, bugetul ne-a permis se alocăm 20 lei lunar pentru un secretar-comptabil-scriitor-archivar-expeditor!. Sarcinile financiare au putut fi reduse la 12,50 lei (aur) lunar, căci au mai venit redactori: Profesorul ION GHIBALDAN (mort în 1898) în Noemvrie 1894 şi inginerul OCTAV ALEXANDRINI (mort în 1905) în Decemvrie 1894. In primul an Redactorii au contribuit cu suma de 1729 lei aur la susţinerea *Gazetei Matematice*.

VASILE CRISTESCU a avut grija Redacţiunii până la plecarea sa din Bucureşti. De câte ori era mutat cu serviciul în Bucureşti, dese ori a ţinut locul redactorului de serviciu. Numerele din *Gazeta Matematică*, tipărite prin îngrijirea lui, se pot determina matematiceşte prin proporţia mai redusă a erorilor de tipar faţă de numerele

anterioare şi ulterioare. In special, după războiul din 1916—1919, V. CRISTESCU şi-a dat toată osteneala pentru a readuce *Gazeta Matematică* la starea de înflorire la care ajunsese înainte de războiu. Iată ce spune în această privinţă D-l. G. ŢIŢEICA, în Darea de seamă a Concursului din 1921. (Anul XXXVI, pag. 249).

„Şi iată că deodată cu începerea celui de al doilea pătrar de veac, **Gazeta Matematică,** *şi-a atins din nou, graţie veteranului nostru coleg inginer* V. CRISTESCU *acea regularitate matematică cu care şi-a câştigat simpatia corespondenţilor".*

Serviciile aduse de V. CRISTESCU la tipărirea *Gazetei Matematice* au fost într'adevăr foarte mari şi au fost făcute cu cea mai desăvârşită dezinteresare.

După criza financiară dela începutul secolului actual, cu ocazia intrării *Gazetei Matematice* în Anul X al existenţei sale, din cauza sacrificiilor mari care se cereau redactorilor pentru tipărire, o parte dintr'înşi, care câştigaseră şi pe V. CRISTESCU, cereau încetarea apariţiunei revistei. O adiere miasmatică ameninţa să molipsească atmosfera curată în care trăiserăm până atunci şi să distrugă armonia care exista între cei ce se ocupau mai deaproape de *Gazeta Matematică.* Măsurile energice şi de dezinfectare care s'au luat atunci au readus viaţă în redacţie, au făcut să reapară din entuziasmele pierdute şi au creiat entuziasme noi. La o circulară trimisă membrilor redactori spre a se şti care vor să continue şi care nu, V. CRISTESCU a răspuns următoarele:

„Inchei răspunsul meu dorind ca Gazeta să fie condusă şi să aibă şi în viitor succesul moral pe care l'a avut până acum şi urez membrilor redactori, care vor continua a fi şi pe viitor redactori, ca să ajungem cu toţi să sărbătorim jubileul de 25 ani al fondării şi existenţii ei".

In ceeace priveşte participarea lui V. CRISTESCU la administrarea revistei mai am de adăugat că cu începere de la 1 Septemvrie 1909, vechea *Redacţie* patriarhală a *Gazetei Matematice* a fost transformată, la o şedinţă ţinută la Valea Călugărească, în *Societate.* Cu această ocaziune V. CRISTESCU a luat o parte activă la elaborarea Statutelor şi la recunoaşterea Societăţii de persoană morală şi juridică. Pe baza acestor Statute el a făcut parte din *Delegaţiunea* de conducere a Societăţii în anii 1910—1911 şi 1911—1912. E locul aci să spun că la *Gazeta Matematică* nu a existat niciodată demnităţi

de preşedinţi, secretari generali, directori, şefi, etc., aşa că au lipsit cu totul zâzănii şi animozităţi provocate de lupte între membri pentru ocuparea a unor asemenea titluri. Deviza noastră este aceia pe care a accentuat-o ANGHEL SALIGNY la Serbarea dela 17 Mai 1909 spunând:

„Mă simt foarte fericit acum când mă găsesc în mijlocul unor bărbaţi a căror deviză este scrisă pe colţurile menuului ce ni s'a servit, adică : **Entusiasm, armonie, sacrificii continui, muncă dezinteresată".**

(Va urma). I. IONESCU.

SUR L'ISOPÔLE D'UNE DROITE PAR RAPPORT À UN TRIANGLE

Avant de connaître les intéressantes recherches de M. C. SERVAIS sur l'isopôle d'une droite [1]), nous avions communiqué à M. J. NEUBERG quelques résultats sur le même sujet. Les voici, exposés par des procédés très élémentaires.

1. Considérons un triangle ABC et une droite Δ quelconque, de son plan. Des sommets A, B, C traçons des parallèles de direction arbitraire qui rencontrent Δ en des points α, β, γ, sous le même angle θ dans le même sens de rotation; puis d'un point ω quelconque du plan traçons trois droites qui coupent les côtés BC, CA, AB sous l'angle $(\pi - \theta)$, de même sens que θ. Ces droites rencontrent Δ en des points α', β', γ'. Si l'on désigne l'intersection des droites $A\alpha$ et BC par M, les triangles $\omega\alpha'\beta'$ et ACM, $\omega\alpha'\gamma'$ et AMB sont semblables, et

$$\alpha'\beta' : AM = \omega\alpha' : CM \quad , \quad \alpha'\gamma' : AM = \omega\alpha' : BM.$$

Les segments rectilignes $\alpha'\beta'$, $\alpha'\gamma'$ sont directement proportionnels à BM, CM, c'est-à-dire à $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$. Par suite

$$\alpha'\beta' : \alpha\beta = \alpha'\gamma' : \alpha\gamma = \beta'\gamma' : \beta\gamma. \qquad (1)$$

Réciproquement, si l'on marque sur une droite Δ du plan du triangle ABC deux triples de points (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ qui vérifient la relation (1), les points α, β, γ étant les projections d'angle

1) *Mathesis,* 1922 — 262.

θ de A, B, C sur Δ, les droites tracées des points α', β', γ' de manière à couper BC, CA, AB sous l'angle $(\pi - \theta)$, concourent en un point ω.

En particulier, lorsque les points α', β', γ' se confondent avec les points α, β, γ, on obtient ce théorème qui constitue une définition de l'isopôle d'une droite :

Soient α, β, γ *les projections d'angle* θ *des sommets* A, B, C *d'un triangle sur une droite* Δ *de son plan. Les projections d'angle* $(\pi - \theta)$ *des points* α, β, γ *respectivement sur* BC, CA, AB *concourent en un point* ω, *isopôle de* Δ *par rapport au triangle* ABC [1]).

2. Par le point Q où le droite Aα rencontre le cercle (O) circonscrit, de rayon R, au triangle ABC, traçons la corde QPQ' qui coupe BC en P sous l'angle $(\pi - \theta)$. Désignons par φ_1, φ_2, φ_3 les angles de même sens que fait la droite Δ avec BC, CA, AB respectivement. On a

$$CQ = 2R \sin CBQ = 2R \sin CAQ = 2R \sin(\theta - \varphi_2)$$
$$BQ = 2R \sin BCQ = 2R \sin(\theta - \varphi_1).$$

Or,

$$BQ \cdot CQ = 2R \cdot \frac{PQ}{\sin\theta},$$

d'où

$$PQ = BQ \cdot CQ : 2R \sin\theta = \frac{2R}{\sin\theta} \sin(\theta - \varphi_2) \sin(\theta - \varphi_3).$$

Les droites $\omega\beta$ et Aα, antiparallèlles par rapport à l'angle (AC, Δ), se coupent sous l'angle C du triangle ABC ; de plus, on a angle $\omega\beta\alpha$ = angle CAQ.

Comme le segment rectiligne $\overline{\alpha\beta}$ est la projection d'angle θ du côté BA = c sur Δ,

$$\overline{\alpha\beta} = c \sin ABC : \sin\theta = c \sin(\theta - \varphi_3) : \sin\theta ;$$

d'où

$$\overline{\omega\alpha} = \overline{\alpha\beta} \sin CAQ : \sin C = \frac{c}{\sin C} \cdot \frac{\sin(\theta - \varphi_2) \sin(\theta - \varphi_3)}{\sin\theta} = \overline{PQ}. \quad (2)$$

---

1) Cette definition que nous avons établie autrement encore, (*Nouvelles Annales* 1914 — 219), a été obtenue moins simplement par A. THIRD, (*Proceedings of the Edinburg Mathematical Society* XXXI — 17 à 34), et par M. SERVAIS, loc. cit.

Les droites $\omega\alpha$ et PQ, égales et parallèles, déterminent un parallélogramme. La droite ωP, parallèle à αAQ, est donc la droite de SIMSON d'angle $(\pi - \theta)$, du point Q' du cercle circonscrit, pour le triangle ABC.

Nous avons montré que les droites de SIMSON d'angle $(\pi - \theta)$ des intersections d'une droite Δ avec le cercle circonscrit au triangle ABC passent aussi par ω [1]). Par suite, *par l'isopôle ω d'angle θ d'une droite Δ qui rencontre le cercle circonscrit à un triangle* ABC, *il passe trois droites de* SIMSON *d'angle* $(\pi - \theta)$.

3. La droite αAQ, déterminée par la direction de Δ et par l'angle θ, reste fixe lorsque la droite Δ se déplace *parallèlement* à elle-même.

Il en est de même des droites QPQ' et $P\omega$. Cette dernière constitue le lieu de l'isopôle ω.

4. La relation (2) conduit aussi à l'expression suivante de la distance $\overline{\omega S} = \overline{d}$ du point ω à la droite Δ :

$$\overline{\omega S} = \overline{\omega\alpha}\ \sin\omega\alpha\beta = \overline{\omega\alpha}\ \sin(\theta - \varphi_1)\,;$$

d'où

$$\overline{\omega S} = \overline{d} = \frac{2R}{\sin\theta}\left|\ \sin(\theta - \varphi_1)\ \sin(\theta - \varphi_2)\ \sin(\theta - \varphi_3)\ \right|,$$

soit, en développant,

$$d = \frac{2R}{\sin\theta}\left|\ \sin\varphi_1\cos\theta - \sin\theta\cos\varphi_1\ \right| \cdot \left|\ \sin\varphi_2\cos\theta - \sin\theta\cos\varphi_2\ \right|$$

$$\cdot \left|\ \sin\varphi_3\cos\theta - \sin\theta\cos\varphi_3\ \right|.$$

Lorsque $\theta = \frac{\pi}{2}$, cette relation devient celle que J. NEUBERG à donnée pour *l'orthopôle,*

$$\overline{d} = 2R\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\varphi_3\ ^{2}).$$

V. THÉBAULT
Le Mans (France).

---

1) *Nouvelles Annales,* 1914 — 221.
2) *Bulletins de l'Académie royale de Belgique,* 1910.

CENTRUL DE GREUTATE LA TRIUNGHIU ȘI LA TETRAEDRU

Vreau să arăt o metodă foarte elementară pentru a determina centrul de greutate al unui triunghiu omogen și al unui tetraedru omogen.

Pentru a face aceasta, voiu admite numai că centrul de greutate există și că dacă se consideră două figuri omotetice în raport cu un punct, centrele lor de greutate sunt puncte omoloage.

Reamintesc că centrul de greutate al maselor $m_1, m_2, \ldots, m_p$ plasate în punctele $A_1, A_2, \ldots, A_p$ este în punctul G definit de formula vectorială

$$\vec{OG} = \frac{m_1 \vec{OA}_1 + m_2 \vec{OA}_2 + \ldots + m_p \vec{OA}_p}{m_1 + m_2 + \ldots + m_p}$$

unde O este o origină arbitrară.

1. Să considerăm întâiu o bară omogenă AB. Ea are un centru de greutate G. Dacă pe prelungirea lui AB se ia bara BC identică cu bara AB, ea va avea un centru de greutate G_1, care are față de BC aceiași poziție pe care o are G față de AB. Deducem imediat că $\vec{GG}_1 = \vec{AB}$.

Bara AC este de două ori mai mare decât bara AB, este omotetică cu bara AB, centrul de omoteție fiind A. Ea are un centru de greutate G′ care în figura AC este omologul lui G din figura AB, adică:

$$\vec{AG'} = 2\,\vec{AG}.$$

In fine observăm că G′ este centrul de greutate al maselor identice cu masa barei AB, plasate în G și G_1, adică:

$$\vec{AG'} = \frac{\vec{AG} + \vec{AG}_1}{2}.$$

Această ecuație ne va da poziția centrului de greutate G al barei AB. Intr'adevăr, ea se mai scrie:

$$2\,\vec{AG} = \frac{2\,\vec{AG} + \vec{AB}}{2},$$

de unde se deduce că

$$\vec{AG} = \frac{\vec{AB}}{2},$$

adică centrul de greutate al unei bare omogene este la mijlocul ei.

Este evident că această metodă nu este cea mai simplă pentru determinarea centrului de greutate a unei bare omogene. Ea este însă punctul de plecare al acestui articol și generalizată convenabil, ne va conduce la determinarea centrelor de greutate la triunghiu și la tetraedru, pe care am anunțat-o mai sus.

2. Să aplicăm metoda precedentă la determinarea centrului de greutate a unui paralelogram. Să considerăm paralelogramul OACB și fie G centrul lui de greutate. Să transformăm prin omoteție paralelogramul OACB, luând ca pol punctul O și ca raport de omoteție 2. Vom obține un paralelogram OA'C'B' de patru ori mai mare ca cel dat. El are un centru de greutate G', care este omologul lui G, adică:

$$\vec{OG'} = 2\,\vec{OG}.$$

Prelungind laturile BC și AC, paralelogramul OA C'B' se împarte în patru paralelograme identice cu paralelogramul OACB. Fie G_1, G_2, G_3 centrele lor de greutate. Ele ocupă în paralelogramul respectiv, aceiași poziție pe care G, o ocupă în paralelogramul OACB. Astfel deducem că,

$$\vec{GG_1} = \vec{G_3G_2} = \vec{OA} \quad ; \quad \vec{GG_3} = \vec{G_1G_2} = \vec{OB}.$$

In fine observăm că G' este centrul de greutate al maselor identice cu masa paralelogramului dat, plasate în G, G_1, G_2 și G_3, de unde deducem ecuația:

$$\vec{OG'} = \frac{\vec{OG} + \vec{OG_1} + \vec{OG_2} + \vec{OG_3}}{4}$$

Această ecuație determină poziția centrului de greutate a paralelogramului. Intr'adevăr avem:

$$\vec{OG_1} = \vec{OG} + \vec{OA} \quad ; \quad \vec{OG_3} = \vec{OG} + \vec{OB}$$

$$\vec{OG_2} = \vec{OG} + \vec{OA} + \vec{OB},$$

şi ecuaţia de mai sus devine:

$$2\vec{OG} = \frac{4\vec{OG} + 2(\vec{OA} + \vec{OB})}{4},$$

de unde se deduce că

$$\vec{OG} = \frac{OA + OB}{2},$$

adică centrul de greutate al unui paralelogram este în punctul de întâlnire al diagonalelor lui.

3. Cu aceste pregătiri putem trece la determinarea centrului de greutate al unui triunghiu.

Fie OBC un triunghiu omogen şi G centrul lui de greutate. Să transformăm prin omoteţie acest triunghiu, luând O ca pol şi ca raport de omoteţie 2. Căpătăm triunghiul OB'C' al cărui centru de greutate G' este omologul lui G din figura OBC. Este evident că avem:

$$\vec{OG'} = 2\vec{OG}.$$

Fie D mijlocul lui B'C'. Triunghiul OB'C' se compune din triunghiurile identice OBC, CDC' şi paralelogramul BCDB' a cărei masă este dublul masei triunghiului OBC. Fie G_1 şi G_2 centrele de greutate ale triunghiului CDC' şi paralelogramului BCDB'. Observăm că G' este centrul de greutate al maselor proporţionale cu 1, 1 şi 2 plasate în G, G_1 şi G_2. Rezultă atunci că avem:

$$\vec{OG'} = \frac{\vec{OG} + \vec{OG_1} + 2\vec{OG_2}}{1 + 1 + 2};$$

însă

$$\vec{OG_1} = \vec{OG} + \vec{OC},$$

şi

$$\vec{OG_2} = \frac{\vec{OB} + \vec{OD}}{2} = \frac{2\vec{OB} + \vec{OC}}{2},$$

aşa că ecuaţia precedentă arată că:

$$2\vec{OG} = \frac{2\vec{OG} + 2(\vec{OB} + \vec{OC})}{4},$$

de unde

$$\vec{OG} = \frac{\vec{OB} + \vec{OC}}{3}.$$

Dacă notăm cu O' mijlocul lui BC, atunci

$$\vec{OO'} = \frac{\vec{OB} + \vec{OC}}{2},$$

și deci

$$\vec{OG} = \frac{2}{3}\vec{OO'},$$

ceeace arată că centrul de greutate al unui triunghiu omogen OBC se găsește pe mediana OO' la două treimi de vârful O.

4. Să considerăm acum paralelipipedul omogen OABC O'A'B'C', vârfurile opuse fiind O, O'; A, A'; B, B'; C, C'. Se demonstrează ca și la No. 2, că centrul de greutate este în punctul G, definit de:

$$\vec{OG} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}}{2},$$

unde se întretae diagonalele OO', AA', BB', CC'.

5. Să considerăm o prismă triunghiulară omogenă ale cărei baze sunt OAB, CDE, muchiile paralele fiind OD, AC, BE. Fie G centrul ei de greutate. Să transformăm prin omoteție această prismă, luând punctul O ca pol și ca raport de omoteție 2. Vom căpăta prisma OA'B'C'D'E' al cărui centru de greutate G' este omologul lui G din prisma dată. Avem prin urmare:

$$\vec{OG'} = 2\,\vec{OG}.$$

Fie F mijlocul lui A'B'; P, Q, R mijloacele laturilor E'C', C'D'; D'E'; L, M, N mijloacele segmentelor C'A', B'E', FP. Prisma OA'B'C'D'E' este împărțită în paralelipipedul ABB'FQRE'P al cărui centru de greutate G_1 este la mijlocul lui RF și patru prisme triunghiulare identice cu prisma dată și ale căror centre de greutate le notăm cu G, G_2, G_3, G_4. Paralelipipedul ABB'FQRE'P are o masă egală cu de patru ori masa prismei date.

Observăm că G' este centrul de greutate al maselor proporționale cu 4, 1, 1, 1, 1 plasate respectiv în punctele G_1, G, G_2, G_3, G_4. Avem deci:

$$\vec{OG'} = \frac{4\,\vec{OG_1} + \vec{OG} + \vec{OG_2} + \vec{OG_3} + \vec{OG_4}}{4 + 1 + 1 + 1 + 1}.$$

Insă

$$\vec{OG}_1 = \frac{\vec{OR} + \vec{OF}}{2} = \frac{\vec{OA} + 2\vec{OB} + 2\vec{OD}}{2}$$

$$\vec{OG}_2 = \vec{OG} + \vec{OD}$$

$$\vec{OG}_3 = \vec{OG} + \vec{OA}$$

$$\vec{OG}_4 = \vec{OG} + \vec{OA} + \vec{OD}.$$

Ecuația precedentă devine deci:

$$2\vec{OG} = \frac{4\vec{OG} + 2(\vec{OA} + \vec{OD}) + 2(\vec{OA} + 2\vec{OB} + 2\vec{OD})}{8}.$$

Din această ecuație se deduce că:

$$OG = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{3} + \frac{\vec{OD}}{2},$$

ceeace arată că centrul de greutate al prismei triunghiulare este la mijlocul segmentului care unește centrele de greutate ale celor două baze.

6. Să trecem acum și să determinăm centrul de greutate al unui tetraedru. Fie OABC un tetraedru dat și G centrul lui de greutate. Transformăm acest tetraedru prin omoteție luând O ca pol și ca raport de omoteție 2. Obținem un alt tetraedru OA'B C' al cărui centru de greutate G' este omologul lui G, adică:

$$\vec{OB'} = 2\ \vec{OG}.$$

Fie, α, β, γ mijloacele laturilor B'C', C'A', A'B'. Tetraedrul OA'B'C' se descompune în tetraedrele indentice OABC, $B\gamma B'\alpha$ ale căror centre de greutate sunt G și G_1, și prismele triunghiulare $AA'\beta\ B\gamma\alpha$, $ABC\beta\alpha C'$ ale căror centre de greutate sunt G_2 și G_3. Masele celor două prisme sunt egale cu de trei ori masa tetraedrului dat.

G' este centrul de greutate al maselor proporționale cu 1, 1, 3, 3 plasate respectiv în G, G_1, G_2 și G_3.

Avem deci:

$$\vec{OG'} = \frac{\vec{OG} + \vec{OG}_1 + 3\vec{OG}_2 + 3\vec{OG}_3}{1 + 1 + 3 + 3}.$$

Insă:

$$\vec{OG}_1 = \vec{OG} + \vec{OB}$$

$$\vec{OG}_2 = \frac{\vec{OA} + \vec{OA'} + \vec{O\beta}}{6} + \frac{\vec{O\alpha} + \vec{OB} + \vec{O\gamma}}{6}$$

$$OG_3 = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}}{6} + \frac{\vec{O\alpha} + \vec{O\beta} + \vec{OC'}}{6}.$$

Observăm că:

$$\vec{O\alpha} + \vec{O\beta} + \vec{O\gamma} = \vec{OA'} + \vec{OB'} + \vec{OC'} = 2\,(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$$

şi

$$\vec{O\alpha} + \vec{O\beta} = \frac{1}{2}\,(\vec{OA'} + \vec{OB'} + 2\,\vec{OC'}) = \vec{OA} + \vec{OB} + 2\,\vec{OC}.$$

Deducem că:

$$\vec{OG}_2 + \vec{OG}_3 = \frac{5\,(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}) + 2\,(\vec{OA} + \vec{OC})}{6}.$$

Ecuaţia care determină pe G este prin urmare:

$$2\,\vec{OG} = \frac{2\,\vec{OG} + \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \frac{5}{2}\,(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})}{8}$$

de unde se scoate:

$$14\,\vec{OG} = \frac{7}{2}\,(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}),$$

adică:

$$\vec{OG} = \frac{1}{4}\,(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}).$$

Fie O' centrul de greutate al feţei ABC. Avem:

$$\vec{OO'} = \frac{1}{3}\,(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}),$$

şi deci

$$\vec{OG} = \frac{3}{4}\,\vec{OO'},$$

ceeace arată că centrul de greutate al tetraedrului OABC se găseşte pe dreapta care uneşte pe O cu centrul de greutate al feţei opuse, la trei pătrimi de O.

D. V. Ionescu
Profesor la Facultatea de Ştiinţe
din Cluj.

PREMIUL „INGINER AL. ROȘU“

D-l AL. A. ROȘU a donat și în anul acesta suma de 500 lei pentru a se acorda, în memoria tatălui său, un premiu pentru activitatea originală cea mai rodnică avută de către abonații elevi de liceu, studenți ai Facultăților, elevi ai școalelor Politehnice și Militare din țară, în cursul volumului XXXIX, în domeniul geometriei elementare.

Activitatea va consta din articole, note și probleme originale de geometrie elementară.

In cazul când condițiunile impuse nu vor fi îndeplinite, premiul «ING. AL. ROȘU» se va acorda celui mai harnic corespondent al Gazetei, elev de liceu.

COMISIUNEA PENTRU PREMIUL „ING. AL. ROȘU“ :
N. BOTEA, AL. A. ROȘU, O. N. ȚINO.

RAPORTUL COMISIUNEI
PENTRU
ACORDAREA PREMIULUI „V. CRISTESCU“

Subsemnații întrunindu-ne și cercetând, conform regulamentului premiului, publicat în Volumul XXXVIII al *Gazetei Matematice,* nu am găsit niciun articol referitor la geometria triunghiului sau la trigonometrie, al cărui autor să fie elev de liceu, de școală militară, de politehnică sau student universitar. Articole îndeplinind condițiunile de mai sus, au fost primite la redacție, dar din cauza articolelor mai vechi și a lipsei de spațiu n'au putut fi publicate în intervalul 15 Sept. 1932 — 15 Aug. 1933. In aceste condițiuni premiul nu se poate acorda pentru această perioadă și conform articolului 3 din regulamentul premiului, urmează ca să se cumuleze până la acordarea lui.

COMISIUNEA PENTRU PREMIUL „V. CRISTESCU“ :
N. BOTEA, COLONEL LITEANU,
LT. C-DOR GH. NICULESCU.

Acest raport s'a citit și aprobat în Adunarea Generală din 21 Februarie 1934.

NOTE MATEMATICE

28. *Sur une propriété relative aux nombres entiers consécutifs.*

Si l'on désigne par $S_{m,n}$ la somme des puissances m-*ièmes* des n premiers nombres entiers, on soit que

$$S_{1,n} = \frac{n(n+1)}{2}, \quad S_{3,n} = \left|\frac{n(n+1)}{2}\right|^2 = S_{1,n}^2;$$

d'où l'on tire

$$S_{1,n} \times S_{3,n} = \left|\frac{n(n+1)}{2}\right|^3 = S_{1,n}^3.$$

Cette dernière formule conduit à la suivante

$$S_{1,n}^3 = S_{1,n} + S_{1,n-1} \times S_{1,n+1} + S_{1,n-1} \times S_{1,n} \times S_{1,n+1}.$$

En effet, on a

$$S_{1,n}^3 = \left|\frac{n(n+1)}{2}\right|^3 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2} \times \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$+ \frac{(n-1)n}{2} \times \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}\left[1 + \frac{(n-1)(n+2)}{2} + \frac{n(n^2-1)(n+2)}{4}\right].$$

Or, la quantité entre crochets se réduit à

$$\frac{1}{4}\left|n^4 + 2n^3 + n^2\right| = \left|\frac{n(n+1)}{2}\right|^2.$$

V. THÉBAULT.

29. *O veche Societate matematică.* In prefaţa unei Algebre a lui HEINRICH MEISSNERN din 1740 găsesc următoarele notiţe.

Autorul a fost membru al Societăţii Kunst-Rechnungs-übenden Gesellschaft înfiinţată pela 1690. Statutele Societăţii şi lista membrilor se găsesc în cartea lui JOHANN JACOB ZIMMERMANN, întitulată *Fundamental-Aufgaben von der Sonn- und Mond-Finsternnissen.* Hamburg 1890. 8. Membrii ei au făcut multe publicaţiuni printre care şi de ale autorului mai sus citat.

I. IONESCU.

30. *Cuadratura cercului.* (Urmare dela pag. 210). In cursul lunei lanuarie a sosit la Bucureşti pe adresa Primarului Capitalei o scrisoare din Duisburg, (oraş pe Rin mai jos de Düsseldorf) şi din Eschweiler (în apropiere de Aix-la-Chapelle) două scrisori, prin care Primarul era rugat să comunice adresa legatarului deţinător al testamentului răposatului BELA KRISTOVICS, care a lăsat să se dea 40.000.000 (patru zeci milioane) lei aceluia care în 100 de ani dela moartea lui va rezolva problema cuadraturii cercului. Primăria a trimis acele scrisori *Gazetei Matematice,* prin mine ca *„Administrator delegat"* al Revistei (!) ca să trimitem semnatarilor acelor scrisori răspunsul cuvenit.

Scrisoarea din Duisburg, e datată din 30 Decemvrie 1933, şi este semnată de D-l J.... R....., care ne spune că a citit într'un ziar german (nu specifică anume care), următoarea notiţă:

„Matematiciani, la front!"

„Bukarest. *Unii oameni, în miile de ani trecuţi (căci deja atât de veche este problema) au pierdut timpul lor, fericirea lor, şi chiar averea lor cu căutarea de a rezolva problema cuadraturii cercului. Până azi nu s'a ajuns de a se face din un cerc un patrat cu o arie perfect exactă. Chiar bogatul* BELA KRISTOVICS *din Bucureşti a căutat, a căutat şi a murit, înainte de a fi deslegat problema. Cum de altfel mulţi au murit cu siguranţă din cauza aceasta.*

„In testament însă se poate citi, că el a lăsat fiului său 20.000.000 lei; aceluia însă care ar rezolva cuadratura cercului, scrie el, să i se dea 40.000.000 lei. Fiul iubeşte însă atât de puţin matematica, în cât el a atacat testamentul, dar o apărare energică s'a făcut înaintea justiţiei, care a hotărît:

„Testamentul este legalmente valabil. Nu se poate lua în considerare pentru care motive, — după părerea matematicianilor de azi, — rezolvarea chestiunii cuadraturii cercului ar fi o himeră. Deocamdată se decide a se acorda o durată de timp de 50 de ani, înainte de a se lua în consideraţiune o nouă acţiune în această chestiune".

„Trebuie însă să menţionăm anume că, BELA KRISTOVICS *a fost destul de deştept ca să puie o limită testamentului său. El a spus că dacă în 100 de ani testamentul nu-şi va produce*

efectul, atunci el nu va mai fi valabil. Şi de aceia el a precizat că după 100 de ani banii vor reveni de drept membrilor familii care vor exista pe atunci, dacă nimeni până atunci nu va fi în stare să facă cuadratura. Justiţia însă a decis ca după 50 de ani să se mai cerceteze încă odată cazul".

Autorul scrisorii din Duisburg spune că *„eu sunt sigur că am făcut această descoperire"* însă nu o voi comunica decât celor în drept căci se teme de vreun *„furt de propietate intelectuală"*, mai ales că premiul se ridică la o sumă mare.

Scrisoarea din Eschweiler, a D-lui J... C....., e datată 3 Ianuarie 1934. In ea se spune că informaţia s'a citit în ziarul *„Westdeutsches Grenzblatt für Stollberg und Eschweiler"*. Suma în joc este tot de 40.000.000 lei. Autorul nu dă coprinsul informaţiunii; dă însă o demonstraţie *„preliminară"*. Autorul limitează pe π la 3,1415927. Pentru un cerc cu diametrul 100 dă aria 31415,927 şi verifică că un patrat cu latura 177,2453864 are aria 31415,92700008530496. Mai face verificări pentru cercurile de diametre de 500, 750mm, 900mm. Autorul cere Primarului Capitalei comunicarea testamentului.

Aceste două scrisori le-am făcut cunoscut Secţiunii matematice a Societăţii Române de ştiinţe, în seara zilei de 22 Ianuarie. Ce am urmărit prin această comunicare, care nu e de natură să facă să propăşească cu nimic matematica? E chestiune de revanşă! Sunt câţiva ani de când un fost student român în matematici la Universitatea din Goettingen mi-a spus că la o întrunire matematică ţinută acolo, un profesor de matematici a făcut aprecieri foarte defavorabile asupra stării matematicilor în România, luând de bază nişte soluţiuni eronate trimise de unii *fermatişti* români. Se ştie că s'a dat acest nume acelora care, caută să demonstreze că ecuaţia:

$$x^n + y^n = z^n,$$

este imposibilă în numere întregi pentru $n > 2$, sau să dovedească că teorema nu e adevărată. Pentru tranşarea acestei chestiuni Universitatea deţine, dinainte de războiu, un premiu de 100.000 mărci, care nu se ştie ce au mai devenit în urma metamorfozelor prin care a trecut marca germană dela războiu încoace. Chestiunea nu este încă rezolvată, şi atunci se caută soluţia de cei pricepuţi, dar şi de foarte mulţi nepricepuţi. Aceştia sunt *fermatiştii,* analogi *cuadratorilor* din secolele trecute şi din cel actual. Diferenţa este că aceştia

din urmă nu mai au rostul de a fi, căci problema cuadraturii cercului este înmormântată din 1882.

Universitatea din Goettingen a pus mâna pe câțiva *fermatiști* români. Suntem însă răsbunați: am pus și noi mâna pe doi *cuadratori germani!*

(Va urma). I. IONESCU.

31. *Asupra problemei 2773.*

Problema 2773 rezolvată în „*Gazeta Matematică*", Volumul XXXVI, No. 7, pe 2 căi diferite, se mai poate încă rezolva în modul următor:

Fie L', M', N' punctele unde se intersectează perechile de drepte: (AB, DE), (BC, EF), (CA, FD) de pe figura din locul indicat. Punctul L este evident conjugatul armonic al punctului L' față cu A, B căci dreapta SL este polara punctului L' față cu SA, SB.

La fel, M este conjugatul lui M' față cu B, C iar N conjugatul lui N' față cu C, A.

Dar punctele L' M' N' sunt colineare — sunt anume pe dreapta de intersecție a planelor ABC, DEF. Deci dreptele AM, BN, CL sunt concurente în polul trilinear al acestei drepte, în raport cu triunghiul ABC.

Dacă L_1, M_1, N_1 sunt punctele analoage punctelor L, M, N situate însă pe laturile lui DEF, pentru aceleași motive dreptele DM_1, EN_1, FL_1 sunt concurente în polul trilinear al dreptei de intersecție a planelor: ABC, DEF, față cu triunghiul DEF de astădată.

E de observat în fine că cei 2 poli trilineari, de mai sus, sunt în linie dreaptă cu punctul S, centrul de omologie al triunghiurilor ABC, DEF din spațiu.

Făcând perspectiva acestor proprietăți din spațiu, pe un plan, avem câteva proprietăți interesante ale triunghiurilor omologice situate în același plan.

* * *

Un fel de extindere a proprietății din problema 2773 este următoarea:

Fie SLMNP *o piramidă patrulateră cu vârful* S *și baza* LMNP *un patrulater plan oarecare. Pe muchiile* SL, SM, SN, SP *se iau respectiv patru puncte arbitrare:* A, B, C, D *cari formează un patrulater strâmb* ABCD.

Fie α, β, γ, δ *punctele de intersecţie ale diagonalelor patrulaterelor* ABML, BCNM, CDPN, DALP. *Dreptele* $S\alpha$, $S\beta$, $S\gamma$. $S\delta$ *întâlnesc laturile* AB, BC, CD, DA *respectiv în* a, b, c. d.

Punctele a, b, c, d *sunt în acelaş plan.*

Demonstraţia acestei proprietăţi e foarte simplă. Să notăm cu a', b', c', d' punctele de intersecţie ale perechilor de drepte: (LM, AB), (MN, BC), (NP, CD), (PL, DA). Se vede imediat că aceste puncte sunt conjugatele armonice ale punctelor a, b, c, d respectiv în raport cu câte două vârfuri ale patrulaterului strâmb ABCD. Deci avem relaţiile:

$$\frac{aA}{aB} = -\frac{a'A}{a'B}, \quad \frac{bB}{bC} = -\frac{b'B}{b'C}, \quad \frac{cC}{cD} = -\frac{c'C}{c'D}, \quad \frac{dD}{dA} = -\frac{d'D}{d'A}.$$

Inmulţindu-le şi ţinând seamă că punctele a', b', c', d' sunt în planul LMNP, deci după teorema lui MENELAUS extinsă în spaţiu avem:

$$\frac{a'A}{a'B} \cdot \frac{b'B}{b'C} \cdot \frac{c'C}{c'D} \cdot \frac{d'D}{d'A} = +1,$$

conchidem că:

$$\frac{aA}{aB} \cdot \frac{bB}{bC} \cdot \frac{cC}{cD} \cdot \frac{dD}{dA} = +1,$$

deci în baza reciprocei aceleeaşi teoreme, punctele a, b, c, d situate pe laturile patrulaterului strâmb ABCD sunt situate în acelaş plan.

CEZAR COŞNIŢĂ
Licenţiat în Matematice, Bârlad.

32. *Asupra exerciţiului 55. Vol. XXXVI.*

Relaţia stabilită în acel exerciţiu este condiţia ca o ecuaţie completă de gradul patru să se poată pune sub forma unei ecuaţii binome de acelaş grad.

Forma sub care apăruse acel exerciţiu nu avea niciun sens.

AL. A. R.

33. *Deformaţiunea traectoriei unui proectil, datorită formelor solului peste care trece.*

Dacă traectoria este descrisă de un proectil care se roteşte cu o viteză unghiulară ω, aşa cum se obicinueşte, atunci proectilul poate fi substituit cu un *vârtej* a cărei circulaţie ar fi:

$$\Gamma = \pi a \cdot \omega$$

unde a este calibrul proectilului.

Se demonstrează apoi în «Aerodinamică», că un vârtej în prezența unui plan, dă naștere unei «atracții» către plan de intensitate:

$$F = \rho \cdot \frac{\Gamma^2}{4\pi \cdot d}$$

unde ρ este massa specifică a aerului și d depărtarea vârtejului de plan.

In aceste condiții variațiile de deformație a traectoriei vor fi:

$$dz = \frac{F}{m} \cdot t \rightarrow \text{pentru cote;}$$

$$dx = \frac{dz}{\operatorname{tg}\theta} \rightarrow \text{» abscise;}$$

unde m este massa proectilului, t durata de traect până în punctul (x, z) și θ înclinarea tangentei la traectorie.

Astfel dacă traectoria trece peste un deal, ea va fi turtită mai mult, decât dacă ar trece peste o câmpie sau o vale.

MAIOR I. LINTEȘ.

CHESTIUNI DE EXAMEN

UNIVERSITATEA DIN BUCUREȘTI, FACULTATEA DE ȘTIINȚE

Secția Matematici

Sesiunea Iunie 1933

ANUL I

ALGEBRA SUPERIOARĂ

(Partea I-a)

1°. Să se studieze variația funcțiunii:

$$y = \mathrm{L}(x-1) - x + 3$$

și să se reprezinte grafic.

2°. Din desvoltarea lui $(a-b)^{2n+1}$ după formula binomului, grupând termenii egal depărtați de extreme și împărțind cu $(a-b)$ să se deducă identitatea:

$$0 = (2n+1) - (2n-1)\,C^1_{2n+1} + (2n-3)\,C^2_{2n+1} - (2n-5)\,C^5_{2n+1} + \ldots + (-1)^n\,C^n_{2n+1}$$

3°. Să se extragă rădăcina cubică din cantitatea complexă;

$$\frac{1+i}{1-i}.$$

4°. Ţinând seama de valoarea lim $e^{\frac{1}{n}}$ pentru $n \to \infty$ şi de natura seriilor $\sum \frac{1}{n}$ şi $\sum \frac{1}{n^2}$ să se deducă natura seriilor cu termeni generali:

$$u_n = \frac{1}{e^{\frac{1}{n}}}, \quad v_n = \frac{1}{ne^{\frac{1}{n}}}, \quad w_n = \frac{1}{n^2 e^{\frac{1}{n}}}.$$

5°. Să se separe cu ajutorul şirului lui ROLLE rădăciniie ecuaţiei:

$$4x^5 - 9{,}5x^4 + 55x^3 - 50x^2 + 20x - 10 = 0.$$

GEOMETRIA ANALITICĂ

I.

Să se construiască parabola:

(1) $$x^2 + 4xy + 4y^2 + 2x - y + 1 = 0,$$

găsindu-i-se axa şi vârful. Să se scrie ecuaţia generală a conicelor care trec prin punctele comune parabolei (1) cu axele Ox şi Oy.

Se cere locul geometric al centrelor acestor conice.

II.

Se dă în spaţiu curba

$$(C) \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x - z - 1 = 0. \end{cases}$$

Se cere 1°. Ecuaţia conului cu vârful în origină şi care trece prin curba (C).

2°. Ecuaţiunea cilindrului ce trece prin (C) şi are generatoarele paralele cu dreapta D de ecuaţiuni

$$z = 2z \quad , \quad y = -z.$$

3°. Ecuaţia suprafeţei care se obţine prin rotaţia curbei (C) în jurul dreptei Δ:

$$x = 0 \quad , \quad z + 1 = 0.$$

ANUL II

ALGEBRA SUPERIOARĂ

(Partea II-a)

1°. Să se demonstreze divergenţa seriei

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

cu termeni descrescători, având

$$u_{2n} = \frac{1}{2^n} \; (n = 1, 2, \ldots).$$

2°. Să se rezolve ecuaţia

$$\cos z = a\,(ie^{iz} + 1).$$

3°. Se dă forma

$$x^2 - 2xy + 2yz - z^2.$$

Să se formeze discriminantul ei şi să se observe pe el numărul patratelor de forme lineare în care se descompune.

4°. Să se afle fracţiile cuprinse între 0 şi 1, ştiind că numitorul ultimei reduse este 100 şi numitorul penultimei este 7.

ASTRONOMIA

I.

1°. Legile de mişcare ale pământului.

2°. Să se stabilească formulele cu care se calculează fazele principale ale unei eclipse totale de soare.

II.

1°. Efemerida lunei.

2°. Să se expună calculul distanţei unei astre la pământ (luna, soarele, planete, stele).

MECANICA

Un fir greu, omogen, e suspendat în A şi B. Intr'un punct C, care împarte firul în raportul m/n se suspendă o greutate p. Să se determine:

1°. Tensiunea firului în C.

2°. Relaţiile scalare din C, care determină echilibrul firului.

3°. Să se scrie toate relaţiile care determină constantele de integrare.

ANALIZA

I.

Se consideră curba:

$$x = t \quad , \quad y = t^2 \quad , \quad z = \frac{2}{3} t^3.$$

Să se calculeze curbura, torsiunea şi raportul acestor două cantităţi. Este curba o elice? Să se găsească direcţiunea fixă, cu care tangentele fac un unghiu constant.

II.

Planul tangent în M la o suprafaţă taie pe Ox şi Oy respectiv în A şi B. Să se determine suprafeţele pentru care $\overline{OA} + \overline{OB} = 0$ şi în particular acele care conţin curba

$$x^2 + y^2 = 1 \quad , \quad z = x^2.$$

TEORIA FUNCŢIILOR

I.

Proprietăţile modulului funcţiei olomorfe $f(z)$.

II.

Să se calculeze prin metoda reziduurilor integrala:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}.$$

BIBLIOGRAFIE

The Mathematical Gazette. Vol. XVIII. Februarie 1934. No. 227. Londra. Asociaţiune matematică. Extrase din unele note de cărţi matematice de G. N. WATSON. Fascicole pansimetrice, de B. M. PEEK. Congruienţe şi paralelism, de E. H. NEVILLE. Operatori E şi Δ, de S. BARNARD. Fracţii continui recurente, de H. ORFEUR. Teoria exponenţialelor şi funcţiunilor logaritmice cu derivatívele lor, de W. MILLER. Determinarea focarelor, directoarelor, axelor şi excentricităţilor unei conice a cărei ecuaţie este dată cu coeficienţi numerici, de LAWRENCE CRAWFORD.

Bulletin de la Société Mathématique de Grèce. Tomul XIV. Fascicola 2. Atena 1933. Asupra ecuaţiunilor diferenţiale nelineare de al doilea ordin ale lui HAMEL, de A. ROSENBLATT (in limba germană). Despre o cunoscută inegalitate a aritmeticii, de TH. BAROPULOS. Despre o temă a lui J. HERBRAND, de F. VASILIU. Despre o formă a seriei (S) a lui RIEMANN pentru s pereche, de MAURICIU BRICA. Familie de curbe admiţând acelaşi plan rectificant, de F. CONSTANTINIDIS (în limba franceză). Despre o ecuaţie diferenţială de o formă specială, de ELEFTERIE VORU. Criza instituţiilor de ştiinţă matematică greacă. Dece nu au creat Grecii numerile incomensurabile, traducere după H. SCHOLZ. Comunicarea Societăţii Matematice din Grecia (se anunţă că congresul interbalcanic din Iulie 1934 n'a fost aprobat de societatea matematică din Grecia şi că aceasta nu va lua parte în nici un caz la congres). O discuţie largă publică asupra liceului, de N. SACHELARIU, G. PALEOLOGUL, F. CONSTANDINIDI şi F. LUPAŞI.

Journal de Mathématiques élémentaires publié par H. VUIBERT. Anul 58. No. 9. Februarie 1934. Paris.

Idem. No. 10. Paris. Notă asupra unor puncte din geometria triunghiului, de R. TORTRAT.

Revista Ştiinţifică „V. ADAMACHI". Vol. XIX. No. 4. Octomvrie — Decemvrie 1933. Iaşi.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XIII. No. 12. Februarie 1934. Timişoara. Formule de analiză combinatorie, de COL. GH. BUICLIU,. Curbe pseudo-omogene, de IOAN V. MATIEŞ.

Ad. Mineur. Géométrie analytique plane. I. Le point, la droite, et la circonférence. Librairie classique J. VAN DIJL. Rue des étudiants 38 et 38a. Bruxelles 1930.

Autorul a căutat ca în un spaţiu restrâns să dea părţile fundamentale ale geometrii analitice a punctului, dreptei şi cercului, utilizând toate mijloacele moderne: vectori, echipolenţe, coordonate punctuale, tangenţiale şi ternare, elemente imaginare, inversiune, separarea planului în regiuni la studiul curbelor şi al locurilor geometrice, coordonate normale şi baricentrice, rapoarte anar-

monice, etc. Chestiunile sunt lămurite prin exemple şi probleme, în afară de 187 probleme şi exerciţii propuse.

O asemenea carte este de mare folos începătorilor în studiul geometriei analitice.

I. I.

M. GHERMANESCO. *Sur les équations aux différences finies.* (Extras din Acta mathematică), Stockholm.

CERERI

Răspuns la cererea No. 25. Prin acea cerere întrebam ce se înţelege prin *paşi geometriceşti?* In Anul XXVII, pag. 90, am dat un răspuns după cartea lui AMFILOCHIE *din Hotin* şi după *L'Intermédiaire des mathématiciens,* unde s'a stabilit că acel pas era de 1,62 m. In Vol. IX. din *Mathematical Gazette* s'a publicat o serie de scrieri răsleţe ale lui MORGAN, printre care, la pag. 176 a acelui volum şi una intitulată *«The Geometrical Foot»,* în care se dau date interesante asupra acestei chestiuni.

MORGAN spune că piciorul geometric se utiliza în secolul XVI şi citează scrierea *Margarita Philosophica* din 1508 în care se vorbeşte de piciorul geometric. In *Quaestiones Geometricae* din 1621 se vorbeşte iarăşi de acel picior.

După căderea imperiului Roman nu a mai fost o unitate de măsură generală pentru lungimi, ci unităţile variau după ţări, oraşe şi chiar în acelaş loc, cum era pe vremuri la noi stânjenul Şerban-Vodă, stânjenul Constantin-Vodă, etc. Matematicianii şi autorii de cărţi de matematică din epoca Renaşterii, au căutat să aibă o unitate de lungime anumită şi comună tuturor şi atunci au căutat să adopte piciorul Roman, pe care-l putuseră restabili după construcţiunile rămase sau după ruine. Pentru ca lumea să cunoască această lungime au pus-o în întregime — dacă încăpea — sau fracţiuni din ea, prin cărţile de aritmetică şi mai ales de geometrie, de unde i-a venit acelui *picior* calificativul de *geometric.* Piciorul avea 4 laturi de palmă de câte 4 degete. După MORGAN piciorul geometric avea nouă *inche* şi trei sferturi, ceeace revine la 0,2476 m. Un pas geometric avea 6 picioare, adică 1,4659 m, lungime care nu corespunde cu cea dată în Răspunsul anterior.

I. I.

DIVERSE

Secţiunea matematică a Societăţii Române de Ştiinţe a ţinut şedinţă în seara zilei de 5 Februarie. D-l G. ŢIŢEICA a prezentat membrilor pe ilustrul matematician italian FRANCESCO SEVERI, care a făcut o comunicare asupra geometriei algebrice.

In seara zilei de 19 Februarie, secţiunea a ţinut şedinţă la care D-l N. CIORĂNESCU a făcut o comunicare asupra formulei lui TAYLOR, iar D-l GH. GHEORGHIU asupra polinoamelor asociate funcţiunilor metasferice.

In zilele de 13 — 15 Aprilie, va avea loc la Bucureşti *Congresul Asociaţiunii Române pentru înaintarea şi răspândirea ştiinţelor*, în urma iniţiativei luate de *Societatea Română de Ştiinţe*. Taxa de înscriere este de 100 lei. Cererile şi corespondenţa se pot trimite la Facultatea de ştiinţe din Bucureşti, Palatul Universităţii (Bulevardul I. C. Brătianu) unde este sediul Congresului, sau D-lui O. ONICESCU, Secretarul general a Societăţii Române de Ştiinţe, Strada Roselor, No. 9.

Se vor face înlesniri de transport şi de găzduire în Bucureşti.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 3579. *Să se studieze variaţiunea funcţiunii*

$$y = + \sqrt{\frac{x\,(x-1)}{(x-2)\,(x-3)}}$$

şi să se reprezinte curba.

O. N. ŢINO.

Observăm în primul rând că funcţiunea (curba) există numai în regiunile planului pentru care

$$\frac{x\,(x-1)}{(x-2)\,(x-3)} \geqq 0,$$

sau încă pentru care

$$T\,(x) \equiv x\,(x-1)\,(x-2)\,(x-3) \geqq 0.$$

Insă $T\,(x)$ este pozitiv numai când x se găseşte în unul din intervalele $(-\infty, 0)$; $(+1, +2)$; $(+3, +\infty)$, deci vom studia variaţiunea lui y numai în aceste intervale. Când facem pe x să tindă către $+\infty$ sau $-\infty$, funcţiunea y tinde către $+1$, deci la extremităţile intervalului $(-\infty, +\infty)$ curba este asimptotă dreptei $y = +1$. Tot astfel dacă x tinde către $+2$ sau $+3$, în regiunile de existenţă, y creşte la infinit. Calculând derivata funcţiunii y în raport cu x, avem:

$$y' = \frac{-2x^2 + 6x - 3}{(x-2)\,(x-3)\sqrt{T\,(x)}},$$

vedem că rădăcinile derivatei

$$\left(x' = \frac{3+\sqrt{3}}{2} \quad \text{și} \quad x'' = \frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)$$

se găsesc tocmai în intervalele de neexistență ale funcțiunii y, prin urmare *nu avem puncte de maxim sau minim pentru ordonata curbei* în nici unul din intervalele de existență. In intervalul $(-\infty, 0)$, derivata y' fiind negativă, funcțiunea descreşte în tot intervalul; asemenea în intervalul $(+3, +\infty)$, y descreşte continuu; pe când în intervalul $(+1, +2)$ derivata y' fiind pozitivă, funcțiunea y creşte continuu. Observăm în plus, că avem:

$$\lim_{x \to \begin{smallmatrix}+\infty\\-\infty\end{smallmatrix}} y' = 0, \quad \lim_{x \to 0} y' = -\infty; \quad \lim_{x \to +1} y' = +\infty;$$

$$\lim_{x \to +2} y' = +\infty, \quad \lim_{x \to +3} y = -\infty,$$

deducem, pe lângă aşezarea tangentelor la extremitățile ramurilor, că în intervalul $(+1, +2)$ curba își schimbă concavitatea, adică trebuie să aibă cel puțin un *punct de inflexiune*. Pentru a studia mai precis concavitatea curbei în cele trei regiuni de existență, să studiem semnul derivatei a doua a lui y. Calculând această derivată avem:

$$y'' = \frac{4x^5 - 26x^4 + 60x^3 - 60x^2 + 30x - 9}{x(x-1)(x-2)^2(x-3)^2\sqrt{T(x)}}.$$

Se observă dela început că pentru $x < 0$, y'' păstrează un semn constant, deci în tot acest interval y'' fiind negativ, *concavitatea curbei este întoarsă către axa ordonatelor negative*. Pentru celelalte două intervale este necesar să studiem rădăcinile numărătorului lui y'', pe care să-l notăm cu $\varphi(x)$. Deşi $\varphi'(x) = 0$ este o ecuațiune rezolvabilă (fiind de gradul al patrulea), vom întrebuința teorema lui Rolle şi şirul lui Rolle, după cum urmează.

Avem succesiv:

$$\frac{1}{2}\varphi'(x) \equiv 10x^4 - 52x^3 + 90x^2 - 60x + 15$$

$$\frac{1}{8}\varphi''(x) \equiv 10x^3 - 39x^2 + 45x - 15; \quad \frac{1}{24}\varphi'''(x) \equiv 10x^2 - 26x + 15.$$

Fie x_1 una din rădăcinile reale ale ultimei derivate (adică

$10x_1^2 - 26x_1 + 15 \equiv 0$); pentru formarea şirului lui ROLLE corespunzător lui $\varphi''(x)$ calculăm expresiunea $\varphi''(x_1)$, anume:

$$\frac{1}{8}\varphi''(x_1) \equiv -3{,}8x_1 + 4{,}5.$$

Avem astfel imediat:

$\varphi''(-\infty) < 0$, $\varphi''(1{,}3 - \sqrt{0{,}19}) > 0$, $\varphi''(1{,}3+\sqrt{0{,}19}) < 0$, $\varphi''(+\infty) > 0$

prin urmare $\varphi''(x)$ are trei rădăcini reale cuprinse în intervalele:

$(-\infty, 1{,}3-\sqrt{0{,}19})$; $(1{,}3 - \sqrt{0{,}19}, 1{,}3+\sqrt{0{,}19})$; $(1{,}3+\sqrt{0{,}19}, +\infty)$.

Pentru studierea rădăcinilor lui $\varphi'(x)$ să însemnăm cu α una oarecare din rădăcinile reale $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$ ale lui $\varphi''(x)$ (adică $10\alpha^3 - 39\alpha^2 + 45\alpha - 15 \equiv 0$) şi să calculăm expresiunea $\varphi'(\alpha)$. Avem succesiv:

$$\frac{1}{2}\varphi'(\alpha) \equiv -13\alpha^3 + 45\alpha^2 - 45\alpha + 15 \equiv -3\alpha^2(\alpha - 2).$$

Cum două din rădăcinile lui $\varphi''(\alpha) = 0$ sunt mai mici decât $1{,}3 + \sqrt{0{,}19} < +2$ şi cu $\varphi''(+2) < 0$ rezultă că $\alpha_3 > +2$; prin urmare avem pentru $\varphi'(x)$ următorul şir al lui ROLLE

$\varphi'(-\infty) > 0$; $\varphi'(\alpha_1) > 0$; $\varphi'(\alpha_2) > 0$; $\varphi'(\alpha_3) < 0$; $\varphi'(+\infty) > 0$,

deci $\varphi'(x) = 0$ are numai două rădăcini reale cuprinse în intervalele

$$(\alpha_2, \alpha_3) \text{ şi } (\alpha_3, +\infty).$$

Observând că

$$\varphi'(1{,}7) > 0,\ \varphi'(+2) < 0,\ \varphi'(+3) > 0,$$

rezultă că cele două rădăcini reale ale lui $\varphi'(x)$ sunt cuprinse în intervalele $(+1{,}7\ ;\ +2)$ şi $(+2,\ +3)$. Deoarece derivata lui $\varphi(x)$ are numai două rădăcini reale, şirul lui ROLLE pentru $\varphi(x)$ are numai trei intervale, deci $\varphi(x)$ are cel mult trei rădăcini reale. Am observat însă dela început că $\varphi(x)$ n'are rădăcină negativă. De altă parte observând că $\varphi(+1) < 0$, $\varphi(1{,}7) > 0$, $\varphi(+2) > 0$. Insemnând cu x' şi x'' cele două rădăcini reale ale lui $\varphi'(x) = 0$ $(x' < x'')$, observăm, că pentru intervalul $(+1,\ +1{,}7)$ conţinut în intervalul $(-\infty,\ x')$, şirul lui ROLLE al lui $\varphi(x)$ având o schimbare de semn, avem o rădăcină reală pentru $\varphi(x)$.

In intervalul $(+1{,}7,\ +2)$ nu pot fi două rădăcini reale ale lui $\varphi(x)$, căci în acest caz având trei rădăcini reale pentru $\varphi(x)$ în

intervalul $(+1, +2)$, după teorema lui ROLLE ambele rădăcini reale ale lui $\varphi'(x)$ ar fi cuprinse în intervalul $(+1, +2)$, contrar celor stabilite mai sus.

Aşa dar, în intervalul $(1{,}7, +2)$ nu există nici o rădăcină a lui $\varphi(x)$. De altă parte, prin metoda lui NEWTON, găsim că limita superioară a rădăcinilor pozitive ale lui $\varphi(x)$ este $L = +3$, aşa că în intervalul $(+3, +\infty)$ nu este nici o rădăcină reală a lui $\varphi(x)$. Aşadar, $\varphi(x)$ fiind, în tot intervalul $x > +3$, pozitiv, concavitatea curbei rămâne tot *timpul întoarsă către axa ordonatelor pozitive.*

X fiind rădăcina reală a lui $\varphi(x)$ în intervalul $(+1, +2)$ avem $y'' < 0$ pentru intervalul $(+1, X)$, în care deci concavitatea curbei este întoarsă către axa ordonatelor negative, şi $y'' > 0$ pentru intervalul $(X, +2)$, în care ca urmare concavitatea curbei este întoarsă către axa ordonatelor pozitive.

Aşa dar, curba prezintă pentru $x = X$ un punct de inflexiune. Împărţind intervalul $(+1, +1{,}7)$ şi aproximând găsim $X = 1{,}16$, cu aproximaţiune mai mică de o sutime prin adaus. Cu aceste date curba poate fi construită.

Observare. Intrebuinţând şirul lui STURM (care este limitat la polinomul de gradul al doilea) se poate arăta că $\varphi(x)$ are o singură rădăcină reală pozitivă în intervalul $(+1, +2)$.

A rezolvat problema dând construcţiunea grafică exactă Domnul AL. A. ROŞU (Absolvent Lic. Mănăstirea Dealului).

Au rezolvat problema fără a arăta existenţa punctului de inflexiune Domnii: HULUBEI C. TELEMAC, ION MĂTIEŞ (Studenţi); I. I. ROŞESCU, T. P. TOFAN, ER. TREMBA, SORIN ISCU (Elevi Sem. Pedag. Cluj); AL. AL. GHEORGHIU (Lic. Piatra Neamţ); IOAN JEBA (Lic. Lugoj); J. M. POPESCU şi EM. MEREUŢĂ.

O. N. Ţ.

PROBLEMA 3717. *Ce sumă a avut cineva, dacă şi-a consumat-o în* n *zile, cheltuind zilnic a* n*-a parte din cât are, plus 1 leu?*

LOCOT.-COL. GH. POTOPEANU.

Să notăm cu S suma cerută; cu $C_1, C_2, \ldots C_k, \ldots C_{n-1}, C_n$ cheltuelile zilnice; cu $R_1, R_2, \ldots R_k, \ldots R_{n-1}, R_n$ sumele rămase la sfârşitul fiecărei zile.

Avem relațiunile:

$$C_1 = \frac{S}{n} + 1 \quad , \quad R_1 = S - C_1,$$

$$C_2 = \frac{R_1}{n} + 1 \quad , \quad R_2 = R_1 - C_2,$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$C_k = \frac{R_{k-1}}{n} + 1 \quad , \quad R_k = R_{k-1} - C_k,$$

$$C_{k+1} = \frac{R_k}{n} + 1 \quad , \quad R_{k+1} = R_k - C_{k+1},$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$C_{n-1} = \frac{R_{n-2}}{n} + 1 \quad , \quad R_{n-1} = R_{n-2} - C_{n-1},$$

$$C_n = \frac{R_{n-1}}{n} + 1 \quad , \quad R_n = R_{n-1} - C_n.$$

Intrucât însă la finele zilei a n-a nu a mai rămas nimic, avem:

(1) $$R_n = 0.$$

Deducem din relațiile de mai sus:

$$R_1 = S - \left(\frac{S}{n} + 1\right),$$

$$R_1 = \frac{n-1}{n} S - 1.$$

$$C_2 = \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n} S - 1\right) + 1,$$

$$C_2 = \frac{n-1}{n^2} S + \frac{n-1}{n}.$$

$$R_2 = \frac{n-1}{n} S - 1 - \frac{n-1}{n^2} S - \frac{n-1}{n}$$

$$R_2 = \frac{(n-1)^2}{n^2} S - \frac{2n-1}{n},$$

$$C_3 = \frac{1}{n}\left[\frac{(n-1)^2}{n^2}S - \frac{2n-1}{n}\right] + 1$$

$$C_3 = \frac{(n-1)^2}{n^3}S + \frac{(n-1)^2}{n^2}$$

$$R_3 = \frac{(n-1)^2}{n^2}S - \frac{(n-1)^2}{n^3}S - \frac{n^2-(n-1)^2}{n} - \frac{(n-1)^2}{n^2}$$

$$R_3 = \frac{(n-1)^3}{n^3}S - \frac{n^3-(n-1)^3}{n^2}.$$

Să aplicăm metoda *inducțiunei,* adică să demonstrăm că dacă avem:

$$R_{k-1} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}S - \frac{n^{k-1}-(n-1)^{k-1}}{n^{k-2}}$$

$$C_k = \frac{(n-1)^{k-1}}{n^k}S + \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1},$$

atunci avem și:

$$(2) \qquad R_k = \left(\frac{n-1}{n}\right)^k S - \frac{n^k-(n-1)^k}{n^{k-1}}$$

și

$$(3) \qquad C_{k+1} = \frac{(n-1)^k}{n^{k+1}}S + \left(\frac{n-1}{n}\right)^k.$$

In adevăr avem

$$R_k = R_{k-1} - C_k,$$

$$R_k = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}S - \frac{(n-1)^{k-1}}{n^k}S - \frac{n^{k-1}-(n-1)^{k-1}}{n^{k-2}} - \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1},$$

$$R_k = \frac{(n-1)^{k-1}}{n^k}(n-1)S - \frac{n^k - n(n-1)^{k-1} + (n-1)^{k-1}}{n^{k-1}},$$

de unde obținem apoi relația (2).

Deasemenea avem:

$$C_{k+1} = \frac{R_k}{n} + 1,$$

$$C_{k+1} = \frac{(n-1)^k}{n^{k+1}}S - \frac{n^k-(n-1)^k}{n^k} + 1$$

de unde apoi obținem relația (3).

Pentru a calcula pe S putem folosi relaţia:

$$(4) \qquad S = C_1 + C_2 + \ldots + C_k + \ldots + C_n$$

dar obţinem pe S în mod mult mai simplu ţinând seamă de (1), şi anume, făcând în formula (2):

$$k = n,$$

obţinem:

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^n S - \frac{n^n - (n-1)^n}{n^{n-1}} = 0$$

deci avem:

$$S = \frac{n^n - (n-1)^n}{(n-1)^n} n$$

sau:

$$S = \frac{n^{n+1}}{(n-1)^n} - n.$$

Observare. Relaţia (4) se poate obţine şi adunând egalităţile din coloana II-a dela începutul soluţiei de mai sus, şi ţinând seamă de (1).

Notă. Au rezolvat problema fără a demonstra exactitatea relaţiilor (2) şi (3) următorii: D-ra JUSTINA GURĂU, D-nii N. N. ALDEA, D. V. BOLGAR, CORNELIU DRĂGAN, EUGEN DUMITRESCU, G. GHEORGHIU-GLADIŞ, P. I. GHIŞOIU, D. H. IANCU, HARALAMBIE IONESCU, EMILIAN MIHALCEA şi C. N. POPESCU.

Alţi corespondenţi au confundat a n-a parte cu a n^a — a (n la puterea a). Celelalte soluţii primite sunt greşite.

R. T. I.

PROBLEMA 4063. *Să se calculeze suma*

$$12 + 1324 + 135246 + \ldots,$$

numerele fiind scrise în un sistem de numeraţiune cu baza mai mare ca ultima cifră a ultimului termen al sumei.

H. IONESCU.

Soluţie dată de D-l N. N. MIHĂILEANU (Constanţa).

Fie

$$u_n = 135 \ldots (2n-1)\, 246 \ldots (2n)$$

termenul de rang n până la care sumăm şi $x > 2n$, baza sistemului de numeraţie pe care, mai general ca în enunţ, o luăm mai mare

ca $2n$ iar nu mai mare ca ultima cifră a lui $2n$. Dacă S este suma cerută, se vede că ea se descompune în

$$S_1 = x + 13x^2 + \ldots + 135 \ldots (2n-1)\, x^n$$

și

$$S_2 = 2 + 24 + 246 + \ldots + 246 \ldots (2n).$$

Pentru S_1 putem scrie succesiv

$$S_1 = \sum_1^n (2k-1) \sum_0^{n-k} x^{k+2i} = \sum_1^n (2k-1)\, x^k \frac{x^{2(n-k+1)} - 1}{x^2 - 1}$$

$$\therefore\ S_1 = \frac{1}{x^2-1}\left[2\sum_1^n kx^{2n-k+2} - 2\sum_1^n kx^k - \sum_1^n x^{2n-k+2} + \sum_1^n x^k\right].$$

Dar se găsește ușor, și în parte e știut, că

$$\sum_1^n x^k = x\,\frac{x^n - 1}{x - 1}$$

$$\sum_1^n kx^k = x\,\frac{nx^{n+1} - (n+1)\,x^n + 1}{(x-1)^2}$$

$$\sum_1^n x^{2n-k+2} = x^{2n+2} \sum_1^n x^{-k} = x^{n+2}\,\frac{x^n - 1}{x - 1}$$

$$\sum_1^n kx^{2n-k+2} = x^{2n+2} \sum_1^n kx^{-k} = x^{n+2}\,\frac{x^{n+1} - (n+1)\,x + n}{(x-1)^2}.$$

Introducând în S_1 și făcând calculele, se găsește

$$S_1 = \frac{x}{(x^2-1)\,(x-1)^2}\,[x^{2(n+1)}$$

$$+ x^{2n+1} - (2n+1)\,x^{n+2} + (2n+1)\,x^n - x - 1].$$

Calculul lui S_2 este cunoscut. Avem succesiv

$$S_2 = 2\,[1 + 12 + 123 + \ldots + 123 - (n)]$$

$$\therefore\ S_2 = 2\sum_1^n k \sum_0^{n-k} x^i = 2\sum_1^n k\,\frac{x^{n-k+1} - 1}{x - 1}$$

$$\therefore\ S_2 = \frac{2}{x-1}\left[\sum_1^n kx^{n-k+1} - \sum_1^n k\right] = \frac{2}{x-1}\left[x^{n+1}\sum_1^n kx^{-k} - \sum_1^n k\right]$$

$$\therefore\ S_2 = \frac{2}{x-1}\left[\frac{x^{n+2} - (n+1)\,x^2 + nx}{(x-1)^2} - \frac{n\,(n+1)}{2}\right].$$

Dacă se adună S_1 cu S_2, se găseşte după efectuarea calculelor şi reducerilor, că expresiunea sumei căutate S este

$$\frac{x^{2n+3}+x^{2n+2}-(2n-1)x^{n+3}+2x^{n+2}+(2n+1)x^{n+1}-(n+1)(n+2)x^3-n(n-1)x^2+n(n+3)x-n(n+1)}{(x+1)(x-1)^3}$$

D-l M. MARGULIUS (Bucureşti) a rezolvat foarte bine problema dând rezultatul exact, fără a pune diferitele sume sub semnul Σ, scriindu-le dezvoltat.

PROBLEMA 4129. A, B *şi* C *fiind unghiurile unui triunghiu să se demonstreze relaţia*

$$\frac{\sin 2(A+B)+\sin 2(B+C)+\sin 2(C+A)}{\sin(A+B)+\sin(B+C)+\sin(C+A)} = -8\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C.$$

CORNELIU N. POPESCU.

Soluţie dată de D-nii: N. ACIKGHEOZIAN, I. D. CÂRSTOIU, C. I. CHIRIAC, I. CURCHI, I. P. IACOBESCU, CONST. D. IONESCU, H. P. IONESCU-BISS, CEZAR IVĂNESCU, M. MĂNESCU, M. MARGULIUS, D. MAVRODIN, M. LEONTE A. NEGREA, ŞT. E. OLTEANU, C. N. OPRESCU & M. D. STOICESCU, I. C. PAREPEANU, M. I. POPESCU-STĂNEŞTI, N. N. ALDEA, G. ŞT. ROŞCA, I. N. SAGER, ŞT. TEODORESCU, CHIRIAC TRIFON, P. M. VÂRLAN, N. D. ZANE, MARTIN ZIFF şi V. GODEANU.

Deoarece

$$A+B+C = 180^0,$$

avem

$$\sin 2(A+B) = -\sin 2C, \text{ etc.}\ldots.$$

$$\sin(A+B) = \sin C, \text{ etc.}\ldots.$$

Deci

$$\Sigma \sin 2(A+B) = -\Sigma \sin 2C = -4\sin A\sin B\sin C$$

şi

$$\Sigma \sin C = 4\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C.$$

Introducând valorile acestor sume în prima parte a relaţiei din enunţ avem

$$\frac{-4\sin A\sin B\sin C}{4\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C} = -\frac{8\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C\cos\tfrac{1}{2}C}{\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C}$$

ceeace ne dă tocmai partea a 2-a a relaţiei date.

Q. E. D.

Notă. Autorul problemei a stabilit relaţia din enunţ plecând dela

$$\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \sin\alpha_3 - \sin(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) = 4\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\sin\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}\sin\frac{\alpha_3+\alpha_1}{2}.$$

(Trig. CARLO BOURLET pag. 102).

COLONEL LITEANU.

PROBLEMA 4201. *Orice ecuaţie de gradul al treilea, ai cărei coeficienţi sunt puterile* p, [p *negativ sau pozitiv* $\leqslant 3$] *ale termenilor consecutivi ai unei progresii aritmetice, are o singură rădăcină reală.*

P. SERGESCU.

Soluţie dată de I. ZARDA (student, Cluj).

Putem socoti progresia crescătoare, fără a restrânge generalitatea, căci în cazul contrar ecuaţia transformată în $\frac{1}{x}$ satisface presupunerei noastre şi ea are acelaşi numar de rădăcini reale ca ecuaţia în x. In plus, putem socoti că primul termen e 1. In adevăr, dacă primul termen e a şi dacă însemnăm raţia progresiei cu ar, înmulţim toată ecuaţia cu a^{-p} şi obţinem ecuaţia:

$$1 + (1+r)^p x + (1+2r)^p x^2 + (1+3r)^p x^3 = 0,$$

unde $r > 0$, căci progresia e presupusă crescătoare. Ecuaţia derivată

$$(1+r)^p + 2(1+2r)^p x + 3(1+3r)^p x^2 = 0$$

are discriminantul

$$4[(1+2r)^{2p} - 3(1+r)^p(1+3r)^p] = 4[(1+4r+4r^2)^p - 3(1+4r+3r^2)^p].$$

Dacă p e negativ (egal cu $-q$) numărătorul câtimei din paranteza mare devine:

$$(1+4r+3r^2)^q - 3(1+4r+4r^2)^q$$

şi e evident negativ.

Dacă p e pozitiv, discriminantul se poate scrie:

$$4(1+4r+3r^2)^p\left[\left(1+\frac{r^2}{1+4r+3r^2}\right)^p - 3\right].$$

Primii factori sunt pozitivi. In paranteza cea mare, termenul

$$\left(1+\frac{r^2}{1+4r+3r^2}\right)^p,$$

fiind o putere pozitivă a unei câtimi supraunitare, crește cu p. Semnul discriminantului este acela al expresiei din paranteza mare. Cum aceasta crește cu p, rezultă că dacă e negativă pentru $p = 3$, discriminantul va fi negativ pentru $p < 3$. Or, pentru $p = 3$, expresia

$$(1 + 4r + 4r^2)^3 - 3(1 + 4r + 3r^2)^3$$

e un polinom în r cu toți coeficienții negativi. Ca atare, discriminantul ecuației derivate e negativ pentru $p < 3$.

Rădăcinile ecuației derivate sunt imaginare și deci ecuația propusă nu poate avea decât o rădăcină reală.

Observare. Să considerăm ecuația analoagă de gradul al doilea

$$1 + (1 + r)^p x + (1 + 2r)^p x^2 = 0 \qquad (r > 0).$$

Discriminantul ei

$$(1 + r)^{2p} - 4(1 + 2r)^p = (1 + 2r + r^2)^p - 4(1 + 2r)^p$$

e evident negativ pentru $p < 0$. Prin urmare, în acest caz, ecuația de gradul al doilea are rădăcinile imaginare. Dar, pentru $p \geqslant 1$, se pot găsi valori destul de mari pentru r, așa ca discriminantul să fie pozitiv și deci ecuația să aibă rădăcinile reale. De pildă, pentru $p = 1$, $r = 7$, ecuația

$$1 + 8x + 15x^2 = 0$$

are rădăcinile reale $-\frac{1}{3}$ și $-\frac{1}{5}$.

Pentru $p = 2$, $r = 3$, ecuația

$$1 + 16x + 49x^2 = 0$$

are rădăcinile reale, etc.

De altfel discriminantul se poate scrie

$$(1 + 2r)^p \left[\left(1 + \frac{r^2}{1 + 2r} \right)^p - 4 \right],$$

câtimile $(1 + 2r)^p$ și $\left(1 + \frac{r^2}{1 + 2r} \right)^p$ cresc cu p, aci sunt puterile unor cantități supraunitare. Deci, dacă discriminantul e pozitiv pentru $p = 1$ și pentru o anume valoare a lui r, discriminantul corespunzător oricărui $p > 1$ și aceleiași valori r, e pozitiv și deci ecuația propusă are rădăcinile reale.

PROBLEMA 4223. *Se dă triunghiul* ABC *şi cercul său circumscris* O. *Fie* α, β, γ *şi* A_1, B_1, C_1 *punctele unde* AO, BO, CO *taie respectiv laturile opuse şi cercul* O.

Să se arate că avem relaţiunea:

$$\frac{\overline{A_1\alpha}}{\overline{A\alpha}} + \frac{\overline{B_1\beta}}{\overline{B\beta}} + \frac{\overline{C_1\gamma}}{\overline{C\gamma}} = 1.$$

N. N. ALDEA.

Soluţiune şi generalizare dată de D-l N. N. MIHĂILEANU (Student, Bucureşti).

Fie P *un punct oarecare în planul triunghiului* ABC, *iar* $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ *cevienele corespunzătoare pe care purtăm respectiv segmentele* $\overline{PA_1} = k\,\overline{AP}$, $\overline{PB_1} = k\,\overline{BP}$, $\overline{PC_1} = k\,\overline{CP}$.

Intre segmentele determinate de α, β, γ *respectiv pe* $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$, *avem relaţiunna:*

$$\sum \frac{\overline{\alpha A_1}}{\overline{A\alpha}} = 2k - 1. \qquad (1)$$

Intr'adevăr:

$$\sum \frac{\overline{\alpha A_1}}{\overline{A\alpha}} = \sum \frac{\overline{AA_1}}{\overline{A\alpha}} - 3. \qquad (2)$$

Dar

$$\frac{\overline{AA_1}}{\overline{AP}} = k + 1$$

sau:

$$\overline{AA_1} = (k+1)\,\overline{AP}.$$

Asemenea

$$\overline{BB_1} = (k+1)\,\overline{BP}\ ,\ \overline{CC_1} = (k+1)\overline{CP}.$$

Astfel avem:

$$\sum \frac{\overline{AA_1}}{\overline{A\alpha}} = (k+1) \sum \frac{\overline{AP}}{\overline{A\alpha}}, \text{ dar } \sum \frac{\overline{AP}}{\overline{A\alpha}} = 2, \qquad (3)$$

deci

$$\sum \frac{\overline{\alpha A_1}}{\overline{A\alpha}} = 2(k+1) - 3 = 2k - 1. \qquad (4)$$

In cazul când $k = 1$, care cuprinde în sine pe al problemei propuse, avem:

$$\sum \frac{\alpha A_1}{A\alpha} = +1. \tag{5}$$

Observare. Raportul k este pozitiv sau negativ, demonstrațiunea de mai sus este generală, ținând seamă de sensul segmentelor.

II. Au dat soluțiuni analoage în cazul problemei propuse Domnii: IOAN CURCHI (Student, București), ALEXANDRU D. STOICA, CEZAR IVĂNESCU (Student, Iași), PANAIT MAZILU.

Soluțiunea II-a. Fie AH_1 și $A_1A'_1$ înălțimile duse din A și A_1 pe latura BC în triunghiurile BAC și BA_1C. Din triunghiurile asemenea αAH_1 și $\alpha A_1A'_1$ avem:

$$\frac{A_1\alpha}{A\alpha} = \frac{A_1H'_1}{AH_1}. \tag{6}$$

Observând că:

$$\sphericalangle BA_1A'_1 = \sphericalangle ABC \text{ și } \sphericalangle BA_1A = \sphericalangle BCA,$$

deducem din triunghiurile dreptunghiuri BA'_1A_1, A_1BA, AH_1B relațiunile cunoscute:

$$A_1A'_1 = A_1B\cos B\ ,\ A_1B = AB\,\mathrm{cotg}C\ ,\ AH_1 = AB\sin B,$$

din care rezultă imediat:

$$\frac{A_1\alpha}{A\alpha} = \frac{AB\,\mathrm{cotg}\ C\cos B}{AB\sin B} = \mathrm{cotg}B\ .\ \mathrm{cotg}C. \tag{7}$$

In acelaș fel obținem analoagele relațiunii (7).

De altă parte, dacă A_1B_1C sunt unghiurile unui triunghiu, avem identitatea:

$$\Sigma\ \mathrm{cotg}B\ \mathrm{cotg}C = +1,$$

rezultă deci că

$$\sum \frac{A_1\alpha}{A\alpha} = +1.$$

Alte soluțiuni trigonometrice au fost date de D-rele ELIZA MOISE, MARIA DRĂGUȚ, DORINA FABIUS și Domnii: IANCU M. SAGER. S.-LT. ION C. PARAPEANU, IOAN CURCHI, MIRCEA LEONTE A. NEGREA, MARIUS MARGULIUS, ALFRED H. GEIER.

Observare I. Prima soluțiune permite ca problema să fie extinsă în spațiu cu trei dimensiuni permițând astfel enunțarea următoarei proprietăți pentru un tetraedru:

Dacă avem un tetraedru ABCD *şi un punct* P *şi dacă luăm pe dreptele* AP, BP, CP, DP *respectiv punctele* A_1, B_1, C_1, D_1 *astfel ca:*

$$\overline{PA_1} = k \cdot \overline{AP}\ ,\ \overline{PB_1} = k\,\overline{BP}\ ,\ \overline{PC_1} = k\,\overline{CP}\ ,\ \overline{PD} = k\,DP,$$

avem relaţiunea:

$$\frac{\overline{\alpha A_1}}{\overline{A\alpha}} + \frac{\overline{\beta B_1}}{\overline{B\beta}} + \frac{\overline{\gamma C_1}}{\overline{C\gamma}} + \frac{\overline{\delta D_1}}{\overline{D\delta}} = 3k - 1,$$

unde α, β, γ, δ *sunt punctele unde dreptele* AP, BP, CP, DP *înţeapă feţele corespunzătoare vârfurilor, iar* k *un număr pozitiv sau negativ.*

Demonstraţiunea este aproape identică cu soluţiunea dată în cazul planului.

II. Domnul IOAN CURCHI (Student, Bucureşti) a dat această extindere în spaţiu cu trei dimensiuni pentru problema propusă.

III. Putem da o generalizare interesantă în plan, trecând dela triunghiu la patrulater, anume: *Fie patrulaterul* ABCD *şi un punct* P *interior lui şi nesituat pe nici una din cele două diagonale. Fie* α_1, α_2, α_3 *punctele unde* AP *taie respectiv latura* BC, *prelungirea lui* $\overline{DC}$, *diagonala* BD; β_1, β_2, β_3; γ_1, γ_2, γ_3; δ_1, δ_2, δ_3 *punctele analoage. Dacă luăm pe dreptele* AP, BP, CP, DP *respectiv punctele* A_1, B_1, C_1, D_1 *astfel că*

$$\overline{PA_1} = k\,\overline{AP}\ ,\ \overline{PB_1} = k \cdot \overline{BP}\ ,\ \overline{PC_1} = k\,\overline{CP}\ ,\ \overline{PD_1} = k\,\overline{DP},$$

avem relaţiunea:

$$\sum_{\alpha}^{\delta}\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{\overline{\alpha_i A_i}}{\overline{A\alpha_i}}\right) = 2^2(2k-1).$$

Observăm că:

$$\frac{\overline{\alpha_i A_1}}{\overline{A\alpha_i}} = \frac{\overline{AA_1}}{\overline{A\alpha_i}} - 1 = (k+1)\frac{\overline{AP}}{\overline{A\alpha_i}} - 1\ ;$$

dar:

$$\sum_{1}^{3}\frac{\overline{AP}}{\overline{A\alpha_i}} = 1 - \frac{ar\,.\,BPC}{ar\,.\,BAC} - \frac{ar\,.\,CPD}{ar\,.\,CAD} + \frac{ar\,.\,BPD}{ar\,.\,BAD}\,.$$

Asemenea avem:

$$\sum_{1}^{3}\frac{\overline{BP}}{\overline{B\beta_i}} = 3 - \frac{ar\,.\,CPD}{ar\,.\,CBD} - \frac{ar\,.\,DPA}{ar\,.\,DBA} - \frac{ar\,.\,CPA}{ar\,.\,CBA}$$

$$\sum_{1}^{3}\frac{\overline{CP}}{\overline{C\gamma_i}} = 3 - \frac{ar\,.\,DPA}{ar\,.\,DCA} - \frac{ar\,.\,APB}{ar\,.\,ACB} - \frac{ar\,.\,DPB}{ar\,.\,DCB}$$

$$\sum_{1}^{3}\frac{\overline{DP}}{\overline{D\delta_i}} = 3 - \frac{ar\,.\,APB}{ar\,.\,ADB} - \frac{ar\,.\,BPC}{ar\,.\,BDC} + \frac{ar\,.\,APC}{ar\,.\,ADC}\,,$$

(punctul P interior triunghiurilor ABC şi BCD).

Rezultă relaţiunea:

$$\sum_{\alpha}^{\delta}\left(\sum_{1}^{3}\frac{\overline{AP}}{\overline{A\alpha_i}}\right)=2^3,$$

şi ca urmare

$$\sum_{\alpha}^{\gamma}\left(\sum_{1}^{3}\frac{\overline{\alpha_i A_1}}{\overline{A\alpha_i}}\right)=(k+1)\sum_{\alpha}^{\gamma}\left(\sum_{1}^{3}\frac{\overline{AP}}{\overline{A\alpha_i}}\right)-4=2^3(2k-1),$$

rezultat care subzistă în toate cazurile din figură.

IV. Problema poate fi încă generalizată.

O. N. Ţ.

PROBLEMA 4242. *Se cer patratele de 6 cifre care sunt de una din formele* aabcbc *şi* aabccb.

V. Thébault.

1. *Forma aabcbc.* Fie x^2 patratul cerut. Avem

$$317\leqslant x\leqslant 999 \tag{1}$$

$$a\times 110000+bc\times 101=x^2$$

$$\therefore\quad aa\times 99\times 101+bc\times 101+aa=x^2,$$

deci x^2 este de forma $101m+aa$. Ori după Nota D-lui Col. Gh. Buicliu din *Gazeta Matematică* pag. 374, Vol. XXXVIII, numerele ale căror patrate sunt de această formă, şi valorile corespunzătoare ale lui aa sunt respectiv:

$$x=101m\pm 27 \quad \text{cu} \quad aa=22 \tag{2}$$

$$x=101m\pm 28 \quad \text{cu} \quad aa=77 \tag{3}$$

$$x=101m\pm 29 \quad \text{cu} \quad aa=33 \tag{4}$$

$$x=101m\pm 47 \quad \text{cu} \quad aa=88. \tag{5}$$

Fie $aa=22$. Cel mai mic şi cel mai mare număr de 6 cifre care începe cu 22 sunt 220000 şi 229999 ale căror rădăcini sunt respectiv 469,... şi 979,... Deci când x^2 începe cu 22 avem

$$469<x\leqslant 479. \tag{6}$$

Dând în (2) lui m valori care să dea pentru x numere cuprinse între limitele (6) se găseşte că x ar putea fi între numerele 476, 477, 478 pe care ridicându-le la pătrat găsim că numai

$$478^2=228484$$

răspunde problemei pentru cazul (2).

Plecând dela (3), (4), (5) şi procedând la fel se mai găsesc soluţiile

$$577^2 = 332929 \quad \text{şi} \quad 881^2 = 776161 .$$

2. *Forma aabccb.* Suma cifrelor de rang pereche fiind egală cu aceea a cifrelor de rang nepereche, x se divide cu 11 aşa că avem

$$110000 \times a + 11 \times 91 \times b + 110 \times c = 121 \times m^2$$

$$\therefore \quad 10000 \times a + 91 \times b + 10 \times c = 11 \times m^2$$

$$\therefore \quad 9999 \times a + 88 \times b + 11 \times c + a + 3b - c = 11 \times m^2$$

$$\therefore \quad a + 3b - c = 11n . \qquad (7)$$

Cea mai mare valoare a lui $a + 3b - c$ fiind 36 urmează că putem avea $a + 3b - c$ egal cu unul din numerele 0, 11, 22 sau 33. Utilizând nota D-lui T. N. PANAITE din *Gazeta Matematică,* Vol. XXXV, pag. 134 asupra terminaţiunilor patratelor se formează următorul tabel al valorilor pe care le poate avea *bccb*:

bccb	0000	1001	4004	9009	6116	4224	5225
	6336	1441	9449	1881	4884	9889	6996

Ducând în (7) valorile care rezultă din acest tabel pentru b, c şi ţinând seama de valorile pe care le poate avea $11n$ se determină a. Se găseşte astfel că *aabccb* trebuie să se afle între numerele

$$114224 \; ; \; 226996 \; ; \; 339389 \; ; \; 556116$$

$$669009 \; ; \; 774884 \; ; \; 776336 \; ; \; 881001 .$$

Prin descompuneri în factori primi se găseşte numai soluţia

$$583^2 = 339889 .$$

Au găsit soluţiile exacte prin diferite încercări D-nii: E. MEREUŢĂ (Student, Bucureşti), C. CHIRIAC (Lic. Militar, Iaşi), IG. V. GODEANU, M. POSTELNICESCU şi P. C. MAZILU (Lic. Internat, Iaşi).

GH. B.

PROBLEMA 4331. *Se dă numărul 75600 şi se cere.*

a) *Să se desfacă într'un produs de doi factori astfel ca primul să se împartă exact cu al doilea: Să se dea toate soluţiile.*

b) *Să se desfacă într'un produs de trei factori astfel ca primul să se împartă exact cu al doilea, iar al doilea factor să se împartă exact cu al treilea.*

c) *Se poate merge mai departe cu descompuneri în acest sens?*

Nu se admite 1 ca factor în nici unul din cele trei cazuri de mai sus.

I. IONESCU.

Soluţie dată de D-nii: PANAIT C. MAZILU (Şcoala Politehnică din Bucureşti); PAUL DOBRESCU (Elev clasa VI Liceul militar, Mănăstirea Dealului); NĂSTASE MARIN (Idem clasa V); V. CSEKE (Student, Cluj).

Descompunem numărul dat în factori primi şi găsim:

$$75600 = 2^4 . 3^3 . 5^2 . 7 .$$

a) Fie $A \times B = 75600$. Numărul A trebuie să aibă pe toţi factorii primi ai lui B cu exponenţi mai mari sau cel puţin egali pentru a avea $A = \mathfrak{M}B$. Deci factorul prim 7 nu poate aparţine decât lui A. Ceilalţi ar putea aparţine cum se arată în tabloul de aci:

$$A . 2^4 . 2^3 . 2^2 . 3^3 . 3^2 . 5^2 . 5 . 7 .$$

$$B . — \ 2 \ . 2^2 . — \ 3 \ . — . 5 . —$$

Combinând aceste descompuneri aşa ca B să aibă o valoare diferită de 1, găsim soluţiunile următoare:

37800×2 ; 26200×3 ; 18900×4 ; 15120×5 ; 12600×6; 7560×10;

6300×12 ; 5040×15 ; 3780×20 ; 2520×30 ; 1260×60.

Avem dar 11 soluţiuni.

b) Fie $A \times B \times C = 75600$. Numărul A trebuie să aibă toţi factorii primi ai lui B cu exponenţi cel puţin egali cu ai acestui, iar

C pe ai lui B în aceleaşi condiţiuni. De aci, ca şi în cazul precedent, putem alcătui tabloul :

$$A \,.\, 2^4 \,.\, 2^3 \,.\, 2^2 \,.\, 2^2 \,.\, 3^3 \,.\, 3^2 \,.\, 3 \,.\, 5^2 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.$$

$$B \,.\, — \;\; 2 \;\; .\, 2^2 \,.\, 2 \;\; .\, — \;\; 3 \;\; .\, 3 \,.\, — \;\; 5 \;\; .\, —$$

$$C \,.\, — \;\; — \;\; — \;\; 2 \;\; — \;\; — \;\; 3 \,.\, — \,.\, — \,.\, — \,.$$

Combinând aceste descompuneri aşa ca B şi C să fie mai mari ca 1, găsim soluţiunile următoare :

$$420 \times 30 \times 6 \,;\, 420 \times 60 \times 3 \,;\, 840 \times 30 \times 3 \,;\, 1260 \times 30 \times 2 \,;\, 1680 \times 15 \times 3 \,;$$

$$2100 \times 6 \times 6 \,;\, 2100 \times 12 \times 3 \,;\, 3780 \times 10 \times 2 \,;\, 4200 \times 6 \times 3 \,;\, 6200 \times 6 \times 2 \,;$$

$$8400 \times 3 \times 3 \;\; ; \;\; 18900 \times 2 \times 2.$$

Avem aci 12 soluţiuni.

c) Din cele expuse până aci reese că am putea lua şi $75600 = A \times B \times C \times D$, căci putem distribui pe 2^4 la fiecare din cei patru factori A, B, C, D, câte unul la fiecare. Avem tabloul :

$$A \,.\, 2 \,.\, 3^3 \,.\, 3^2 \,.\, 3 \,.\, 5^2 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.$$

$$B \,.\, 2 \,.\, — \;\; 3 \;\; .\, 3 \,.\, — \;\; 5 \;\; —$$

$$C \,.\, 2 \,.\, — \;\; — \;\; 3 \,.\, — \;\; — \;\; —$$

$$D \,.\, 2 \,.\, — \;\; — \;\; — \;\; — \;\; — \;\; — \,.$$

Combinând descompunerile aşa ca să avem pe 2 la fiecare din cei patru factori găsim soluţiile :

$$210 \times 30 \times 6 \times 2 \;\; ; \;\; 630 \times 30 \times 2 \times 2 \;\; ; \;\; 1050 \times 6 \times 6 \times 2 \;\; ; \;\; 1890 \times 10 \times 2 \;\; ;$$

$$3150 \times 6 \times 2 \times 2 \;\; ; \;\; 9450 \times 2 \times 2 \times 2.$$

Avem aci şase soluţiuni.

Se vede dar că un număr se poate descompune cel mult în atâţia factori, în condiţiunile enunţului, cât este cel mai mare exponent al factorilor primi în care se poate descompune acel număr.

Au rezolvat problema fără a da toate soluţiunile de mai sus D-nii : D. D. MAVRODIN, M. POSTELNICESCU, V. GRIGORESCU, M. STAMATI, D. D. MEHEDINŢI, I. N. BADEA. V. CEAUŞESCU, C. CHIRIAC, H. FLORESCU, S. H. HORNSTEIN, ILIE IOAN-ŢIŢEICA, GR. MARTEŞ, N. MIHE, O. C. PETRESCU.

EXERCIŢII

17. Există numere întregi care să verifice egalitatea:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = z.$$

EMILIAN MEREUŢĂ.

R. Egalitatea dată se mai poate scrie:

$$x^2 + y^2 = xyz$$

de unde scoţând pe x în funcţiune de y şi z avem:

$$x = \frac{y}{2}(z \pm \sqrt{z^2 - 4})$$

unde x trebuind să fie întreg deducem că: $z^2 + p^2 = 4$ relaţie imposibilă în numere întregi afară de $p = 0$ când $z = \pm 2$ pentru care avem: $x = \pm y$.

PROBLEME PROPUSE

4351. Dacă după suma a trei numere, care este un patrat de trei cifre, se scrie *42,* atunci se obţine produsul acelor numere. Se cer, acele trei numere.

MAIOR I. LINTEŞ.

4352. Să se găsească în planul triunghiului ABC, punctul M, pentru care cercurile MBC, MCA şi MAB, să fie tangente la un cerc, concentric cu cercul ABC.

COLONEL GH. I. POPESCU.

4353. Se consideră în acelaş plan un punct C şi două cercuri O, O', pe care se iau punctele A şi A'. Din A şi A' se iau pe cele două cercuri, în acelaş sens arcele AM şi A'M', astfel ca

$$\overset{\frown}{AOM} = \overset{\frown}{A'O'M'} = \alpha.$$

Fie D cel de-al patrulea vârf al paralelogramului format de M, C şi M'.

Locul lui D când, punctele A şi A' fiind fixe, unghiul α variază, este un cerc O".

N. BOTEA.

4354. Fie H_a, H_b, H_c picioarele celor trei înălţimi în triunghiul ABC şi A_b, A_c simetricele vârfurilor B şi C faţă de H_a; analog se obţin punctele B_c, B_a şi C_a, C_b. Să se demonstreze că cercurile de diametru A_bA_c, B_cB_a, C_aC_b, au ca centru radical ortocentrul triunghiului ABC.

GH. VASILIU.

4355. M şi N fiind două puncte inverse în planul unui triunghiu, M' şi N' simetricele lor în raport cu centrul cercului circumscris, triunghiurile podare ale punctelor M şi N sunt omologice respectiv cu triunghiurile antipodare ale punctelor M' şi N'.

Cele două perechi de triunghiuri omologice au ca ax de omologie axul radical al cercurilor circumscrise triunghiului de referinţă şi triunghiurilor podare ale punctelor M şi N.

CONST. IONESCU BUJOR.

4356. Intr'un tetraedru ABCD circonscris unei sfere cu muchiile sale, dreptele care unesc vârfurile cu punctele lui GERGONNE ale triunghiurilor feţelor opuse se întâlnesc în acelaşi punct P.

Un plan Q, trecând prin P, întâlneşte muchiile DA, DB, DC, în punctele α, β, γ aşa că

$$A\alpha : \alpha D = x \ , \ B\beta : \beta D = y \ , \ C\gamma : \gamma D = z.$$

Să se arate că expresiunea :

$$x/(p-a) + y/(p-b) + z/(p-c),$$

în care $a, b, c, p,$ reprezintă elementele obişnuite în triunghiul ABC, păstrează o valoare constantă când planul Q variază.

V. THÉBAULT.

4357. Fie p perimetrul şi s suma diagonalelor unui poligon de n laturi. Să se arate că

$$s \leqslant \begin{cases} \dfrac{n^2-8}{8} \cdot p & n \text{ par} \\ \dfrac{n^2-9}{8} \cdot p & n \text{ impar.} \end{cases}$$

Să se arate că dacă poligonul este *convex* avem şi

$$s \geqslant \frac{n-3}{2} \cdot p.$$

TIB. POPOVICIU.

4358. Se dau în plan punctele M, O şi dreapta Δ la distanţa d de O. Tangentele în O la cele două parabole care trec prin M, O şi admit pe Δ ca directoare, întâlnesc în T, T' cercul cu centrul în O şi raza d. Fie Δ' paralela din O la Δ şi α, β, γ unghiurile pe care le fac dreptele OT, OT', OM cu Δ'. Să se demonstreze că perpendiculara din M pe Δ se întâlneşte cu perpendiculara din O pe TT' într'un punct la egală distanţă de Δ şi Δ' şi că

$$1 + \operatorname{tg}\gamma \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = 0.$$

COL. GH. BUICLIU.

4359. Un rezervoriu cilindric circular are un capac conic circular isoscel şi un fund semi-sferic. Dacă suprafaţa lui totală este cunoscută, când volumul închis este maxim ?

I. IONESCU.

4360. Să se găsească valoarea lui x care face expresiunea

$$E = \sin x + \cos x + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + \sec x + \operatorname{cosec} x$$

maximă şi acea care o face minimă.

N. C.

Începând cu N-rul 7/XXXIX „*Gazeta Matematică*“ va apare în 48 pagini, prețul abonamentului rămânând însă acelaș.

Dela apariția ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Anonim (A); *Apostol V.* (4296); *Bungețeanu D. Preduța* (4335); *Cardara Gh.* (4313); *Ceaușescu V.* (4173, 79, 223, 96, 302, 13, 28); *Chiriac C.* (4261, 67, 96, 310, 12, 17, 29); *Coandă I. V.* (4296, 317); *Coteanu I. V.* (4296, 348); *Cozma V.* (4179, 296, 329, 48); *Creangă V.* (4317); *Cseke W.* (4296, 334); *Dobrescu P.* (4296, 317, 28, 34, 48); *Dumitriu T.* (4179, 296); *Florescu Gh. H.* (4296, 348); *Gavrilescu N. C.* (4179, 296, 334, 48); *Godeanu V. Ig.* (4242, 61, 67, 317); *Goldenberg Marcel* (4296); *Grigorescu V.* (4199, 296, 328, 48); *Haret I. C.* (4296); *Ifrim D. V.* (4348); *Iliescu D.* (4296); *Ivănescu C.* (4107); *Lebădă D.* (E); *Mănac M.* (4223, 96, 328, 34); *Marin D.* (4296); *Mărmureanu Gh.* (4317); *Marteș Gr.* (4267, 96); *Mavrodin D.* (2643, 71, 4294, 348); *Mecu I. I.* (4328); *Mehedinți D. D.* (4304, 13); *Mercureanu I.* (4296, 348); *Mihăileanu N. N.* (4147); *Mihalache V. I.* (4334, 48); *Mihalcea I. Oct.* (4312, 29); *Millu I. N.* (4296, 348); *Mitache I. A.* (4296); *Negoiță C.* (4179, 348); *Negrea A. M. L.* (4321, 39, 48); *Nicoară C.* (4296); *Paparizu I.* (P); *Petrescu C. O.* (4334, 43, 48); *Pitulescu Gh.* (4313); *Popescu H.* (4296); *Postelnicescu Mircea* (4173, 242); *Predoescu M.* (4258); *Rusu Gh.* (4179, 296, 334, 48); *Săvulescu A. C.* (4179); *Sova C. Ion* (4329, 43, 48, 49, 50); *Stănești M.* (P); *Știrbu Gh.* (4179, 296, 328, 48); *Stupeanu Em.* (4179, 296, 348); *Thébault V.* (N, P); *Toescu V. Crișan* (4329); *Vasilescu N.* (4296); *Vasiliu C.* (4296); *Vasiliu I. M.* (4296).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât și cele de propus de **geometrie**, *a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.*

Manuscrisele se vor scrie **pe o singură parte a foii și nu se vor tratà mai multe chestiuni diferite pe aceiași foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipì sau coase în partea stângă*, împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală*, iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică**, ca pe o foaie de caet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exercițiile, recreațiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA“, trebue să fie originale, iar nu luate din cărți sau reviste speciale de matematici.

Colecțiunea „GAZETEI MATEMATICE“

«Gazeta Matematică» vinde ani completi broșați cu prețul de 400 lei volumul, afară de volumele: X, XVII, XVIII, XIX, XX și XXI care se vând cu prețul de 500 lei volumul.

Volumele: I, XV și XXV sunt epuizate.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu și V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **N. Abramescu,** *Lecțiunile de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediția IV revăzută și adăogită,* 1924 (Epuizată).

3. **A. G. Ioachimescu și G. Țițeica,** *Culegere de probleme de mecanică și geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme și o planșă) (Epuizată).

4. **Tr. Lalescu și Șt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografie* (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu,** *Tratat de geometrie analitică,* Fascicola I *Ediția II revăzută și adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).

Idem, Fascicola IV Aplicațiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150,—

6. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10,—

7. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediția III-a revăzută și îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. Lei 180,—

8. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu și G. Țițeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

9. **G. Țițeica,** *Culegere de probleme de geometrie* Lei 150,—

La aceste prețuri se vor adăogà taxele poștale pentru expediție.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul.* (Ediția II) Lei 150,—

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plătește înainte și începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamațiunile și cererile pentru cărți din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete numai D-lui: Inginer **Al. D. Bunescu,** Directorul General al Monitorului Oficial și Imprimeriilor Statului, B-dul Elisabeta 29, București I.

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii și orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie și expediție, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Călușei 23, București 4.

SIBIU

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXXIX

NUMĂRUL 8. — APRILIE 1934

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAȚIUNII" SIBIIU

SUMARUL

1. † Vasile Cristescu (urmare) . . . . . *I. Ionescu.*
2. Relații trigonometrice într'un triunghiu în legătură cu punctele lui Feuerbach (urmare) . . . . . *N. N. Mihăileanu.*
3. Despre șirul lui Fibonacci . . . . . *Miron Nicolesco.*
4. Note matematice: 34 — 37.
5. Concursul „Gazetei Matematice".
6. Bibliografie.
7. Cereri: 236.
8. Diverse.
9. Probleme rezolvate: 1333, 3655, 3914, 3922, 4119, 4263, 4284.
10. Exerciții: 18.
11. Probleme propuse: 4360, 4361 — 4370.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREȘTI

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAȚIONALĂ
1934

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: Colonel **Gh. Buicliu** din Ministerul Apărării Naţionale; **I. Buşilă**, Inginer Inspector General, Ministerul Lucrărilor Publice; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice" se vor trimite D-lui Inginer-Şef GH. ILIESCU, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret, Bucureşti 6.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela „*Gazeta Matematică*" („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29 Bucureşti 1) în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 691, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 214, 36, 70, 71, 97, 99, 310, 33, 67, 84, 86, 99, 412, 50, 553, 650, 79, 711, 29, 64, 876, 906, 14, 29, 59, 87, 2003, 04, 17, 70, 74, 111, 70, 338, 405, 30, 39, 66, 77, 502, 03, 56, 77, 87, 607, 09, 23, 38, 55, 65, 84, 92, 709, 13, 17, 35, 69, 80, 814, 65, 86, 89, 909, 12, 26, 36, 47, 3005, 45, 69, 81, 127, 61, 69, 208, 30, 55, 60, 98, 300, 04, 09, 10, 16, 18, 50, 405, 12, 24, 25, 45, 72, 89, 93, 522, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 88, 608, 22, 27, 32, 46, 47, 57, 65, 81, 82, 84, 99, 700, 03, 33, 36, 93, 804, 08, 29, 36, 44, 53, 64, 80, 96, 909, 13, 15, 16, 18, 20, 33, 44, 83, 4010, 13, 30, 34, 45, 53, 59, 62, 68, 70, 73, 85, 102, 03, 11, 12, 18, 19, 23, 32, 48, 50, 51, 63, 67, 69, 91, 92, 203, 06, 09, 10, 13, 25, 26, 30, 36, 40, 43, 46, 48, 49, 52, 75, 77, 80, 81, 83, 87, 88, 89, 90, 300, 01, 03, 07, 15, 18, 19, 20, 22, 27, 30, 32, 33, 37, 40, 41, 42, 44, 46, 51, 52, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procură dela „*Gazeta Matematică*" („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29. Bucureşti 1), cu preţul de 12 lei.

† VASILE CRISTESCU

III. Activitatea lui la „Gazeta Matematică"

(Urmare dela pag. 248)

In afară de munca depusă de VASILE CRISTESCU pentru tipărirea *Gazetei Matematice,* el a avut o activitate mare ca cercetător al problemelor rezolvate şi propuse de corespondenţii revistei, ca primitor de manuscrise de publicat şi ca îndrumător al tinerilor spre cercetări matematice. Mulţi din matematicianii, inginerii şi ofiţerii de azi îşi amintesc cu plăcere de sfaturile ce primeau dela VASILE CRISTESCU, la studiile şi cercetările pe care i le trimeteau pentru publicat în *Gazeta Matematică.* Ca să se vază cât ţineau la dânsul foştii corespondenţi, reproduc aci câteva pasagii din scrisorile primite la *Gazeta Matematică,* la moartea lui:

Din o scrisoare a D-lui V. ALACI, profesor la Şcoala Politecnică din Timişoara: *„Cu moartea sa se stinge una din făcliile puternice care a luminat dela început drumul larg şi infinit al* **Gazetei Matematice** *şi un val de întunerec cuprinde sufletele noastre ale tuturora care l'am cunoscut, l'am iubit, l'am admirat şi respectat".*

Din o scrisoare a D-lui P. SERGESCU, profesor la Facultatea de ştiinţe din Cluj: *„Abia acum am aflat de marea durere şi pierderea nereparabilă pe care o încearcă* **Gazeta Matematică** *prin pierderea unuia din stâlpii ei,* V. CRISTESCU. *Cuvintele omeneşti nu pot traduce sentimentele adânci . . . Dumnezeu să primească în rândul drepţilor sufletul dispărutului nostru stâlp,* V. CRISTESCU, *căci mult bine a făcut ţării prin munca sa desinteresată. Eternă fie-i memoria! Noi toţi cei din Cluj avem exact aceleaşi sentimente, pe care le-am exprimat mai sus atât de slab".*

Din o scrisoare a D-lui Colonel G. BUICLIU: *„Trimit omagiu de recunoştinţă memorii aceluia care a fost* V. CRISTESCU *şi care, cu colegii săi de acum 30 ani ne-a stimulat şi ne-a entusiasmat pentru frumoasa ştiinţă a matematicilor. Ca semn al acestui pios omagiu vă rog să stăruiţi ca să mi se acorde o favoare. Să mi se trimită mie spre redijare şi publicare tot materialul pe care-l are adunat* V. CRISTESCU *în Biblioteca sa şi care are*

contingenţe cu **Gazeta Matematică,** *cum ar fi probleme de propus, note, articole, probleme de redijat care i-au fost repartizate şi orice chestiune în legătură cu acel material. Eu mă ofer să le coordonez, să le complectez, să le redijez şi să le public în* **Gazeta Matematică,** *pentru a întreţine vie memoria stimatului nostru coleg de până azi* VASILE CRISTESCU".

Familia lui V. CRISTESCU, compusă din soţia sa, D-na IULIA CRISTESCU, şi ficele sale D-na VICTORIA PĂŞCANU şi D-ra LUCIA CRISTESCU, au îndeplinit această pioasă dorinţă a D-lui Colonel G. BUICLIU, D-sa achitându-se cu toată conştiinţiozitatea şi complect până azi de această frumoasă îndatorire pe care şi-a luat-o.

La problemele, notele sau articolele trimise de corespondenţi, VASILE CRISTESCU le făcea deseori modificări şi adaose spre a deveni mai interesante şi mai frumoase. La soluţiunile pe care le redija dânsul, adăoga la fine observaţiuni, complectări şi notiţe bibliografice foarte interesante. Nu lăsa nici o problemă de construcţii geometrice la care să nu examineze cu toată minuţiozitatea cazurile de posibilitate şi numărul soluţiunilor ce comportau. Ori de câte ori dispunea de timp, relua unele discuţiuni peste care trecuse cam repede, ca de exemplu în articolele din Anul VI, pag. 127—131, 149—152, 178—180, în care se dă discuţia unei chestiuni de geometrie. Insuficienţele unor enunţuri, enunţurile restrictive, soluţiile greşite sau incomplecte ereau menţionate în note speciale. Erea intolerabil în chestiuni de prioritate, chiar faţă de dânsul; erea fără milă contra plagiatorilor de chestiuni sau probleme propuse.

In *Gazeta Matematică,* VASILE CRISTESCU a publicat 97 probleme propuse. Dintre acestea câteva sunt de *aritmetică* şi de *algebră,* alcătuite mai ales în vederea de a da de lucru începătorilor în studiul matematicilor. In acelaşi scop a scris şi un articol, după CATALAN, în primul număr din primul an, asupra variaţiunii funcţiunii.

$$y = (ax^2 + bx + c)/(a'x^2 + b'x + c'),$$

şi a dat la începutul Anului II soluţiile chestiunilor puse la Concursul pentru ocuparea Catedrei de matematici dela Gimnaziul din Râmnicul Vâlcii. Câteva probleme sunt de *Geometrie analitică,* dintre care mai multe cu proprietăţi ale *cisoidei.*

O atenţiune mai deosebită a dat-o VASILE CRISTESCU chestiunilor de *trigonometrie,* în care domeniu a şi propus multe probleme,

unele foarte interesante prin simplitatea relațiunilor sau prin discuțiunile interesante la care dedea loc alegerea soluțiunilor admisibile. Multe din ele se referă la relațiuni între elementele triunghiurilor plane și sferice. In anul I a și scris un articol în care dă demonstrațiuni noi pentru găsirea lungimilor bisectoarelor, medianelor și înălțimilor unui triunghiu sferic.

In anul 1901 Redacția *Gazetei Matematice* hotărînd să tipărească o Culegere de probleme de *Aritmetică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie,* pentru folosul elevilor de liceu și pentru sporirea fondurilor de tipărire a Revistei, V. CRISTESCU și-a luat sarcina de a redija partea referitoare la *Trigonometrie.* A adunat din cărți, reviste, și mai ales din *Gazeta Matematică*, 963 de probleme de goniometrie, trigonometrie plană și sferică, care, cu indicațiunile de rezolvare și cu răspunsurile, ocup 146 pagini în volumul tipărit atunci. Această culegere a fost mult apreciată și de Reviste străine [1]).

Tot în domeniul Trigonometriei V. CRISTESCU a desvoltat o mare activitate și la Concursurile *Gazetei Matematice.* La toate concursurile de dinainte de războiu și la câteva în urmă, el a fost propunătorul chestiunilor la tezele de trigonometrie și examinatorul la probele orale la această materie. El a dat acestor concursuri toată atențiunea și tot timpul disponibil supraveghind tezele, îngrijind deseori de masa elevilor aduși în București și nelipsind dela mesele comune cu candidații, după terminarea concursurilor. In anii 1905 și 1906 s'a dus la Iași, iar în 1907 și 1908 la Piatra-Neamț pe cheltuiala sa, pentru a supraveghia tezele date grupurilor de candidați concentrați în acele orașe, pentru concurs. De atunci înainte concursurile au avut loc la București întrucât Ministerul Lucrărilor Publice dedea drumul gratuit pe Căile Ferate candidaților, mulți din ei urmând a fi viitorii ingineri ai acelui Minister.

Cele mai numerose articole, note și probleme ale lui V. CRISTESCU se refer însă la *geometria elementară* și în special la *geometria triunghiului,* pentru care dânsul avea o predilecțiune

1) Ediția I a acelei Culegeri fiind epuisată, V. CRISTESCU începuse revizuirea ei și complectarea în vederea scoaterei unei noi edițiuni. Materialul rămas dela dânsul a fost încredințat tânărului și entusiastului profesor dela Liceul din Oltenița, TRAIAN DORDEA. Moartea acestuia după a lui V. CRISTESCU, la un an și ceva, a făcut ca o parte din materialul adunat să se piardă, așa ca apariținea ediținii II să întârzie mult.

specială, căpătată încă de pe când lucra la *Recreații științifice*. In acest domeniu, atât în *Gazeta Matematică* cât și în *Mathesis*, după cum am arătat, a găsit rezultate noi și interesante. Astfel, în această revistă a studiat triunghiurile de arie maximă înscrise în elipsă (Anul III, 245—250, 269—273), a studiat proprietăți ale mediatoarelor unui triunghiu (V, 157—165, 180—185, 206—213, 230—235, 253—256), a găsit unele relațiuni metrice într'un triunghiu dintr'o formulă generală (XXXVI, 21), a dat unele proprietăți ale ortopolului (XXXIII, 363). Prin probleme propuse și note matematice întâlnim proprietăți ale punctelor lui BROCARD, punctul lui LEMOINE, dreapta lui SIMSON, cercul lui LONGCHAMPS, cercul celor 9 puncte, punctul și parabola lui FEUERBACH, cercurile adjunte, isocentrele triunghiului, poligoanele armonice, etc.

Un interes deosebit a dat V. CRISTESCU *triunghiurilor speciale*. Aceste triunghiuri se bucură de proprietăți pe care nu le au toate triunghiurile, sau au anumite relațiuni între elementele lor, sau unele elemente au anumite valori. Astfel, în prima categorie el a cerut, prin problema 5 din primul număr al Anului I, să se găsească condițiunea care o satisface triunghiurile la care centrul de greutate se află pe cercul înscris și la care D-l G. ȚIȚEICA a găsit relația:

$$5\,(a^2 + b^2 + c^2) = 6\,(ab + bc + ca).$$

In a doua categorie este *triunghiul automedian*, la care patratele laturilor sunt în progresiune aritmetică, și pentru care enumără 14 proprietăți la finele soluției problemei 701 (I, 157—162) și pentru care a scris și un articol în Anul XXVIII (241—244). Tot așa în problema 2473 (XXIX, 342) studiază triunghiurile în care avem:

$$\cos^2 \tfrac{1}{2}\,(A - B) = \cos \tfrac{1}{2} A \,.\, \cos \tfrac{1}{2} B.$$

In categoria treia intră triunghiul cu un unghiu de 120^0 la care arată că dreptele la 45^0 ce pornesc din piciorul înălțimei ce pleacă din A, trec prin picioarele bisectoarelor din B și C. (I, 154).

Pentru triunghiurile speciale V. CRISTESCU prepara o bibliografie complectă din care s'a publicat, după moartea lui, ceeace s'a găsit (XXXV, 365—369) și în care el recomandă facerea unei bibliografii complecte a triunghiurilor speciale.

Dintre triunghiurile speciale, acelea care l'au pasionat mai mult au fost triunghiurile *pseudo-isoscele* sau *isosceloide*, cum le zicea NEUBERG. Sunt proprietăți de care se bucură numai triunghiurile

isoscele, ca de exemplu aceia de a avea două bisectoare interioare de lungimi egale. Această proprietate a triunghiului isoscel a interesat pe mulți matematicieni, în cât și azi se vede apărând, din când în când, prin revistele de matematici. VASILE CRISTESCU i-a dat o soluție în *Recreații științifice,* apoi două soluții trigonometrice în un articol din *Gazeta Matematică* (Anul XV, 65—71) și alta mai simplă în altul (XXII 33—35). Sunt însă proprietăți, care aparțin triunghiurilor isoscele dar aparțin și unor anumite triunghiuri speciale, cărora li s'a zis *pseudo-isoscele.* Triunghiuri de asemenea natură, găsite de V. CRISTESCU, sunt următoarele:

a) Triunghiul care are vârfurile în picioarele bisectoarelor unui triunghiu (*pedalul* bisectoarelor) poate fi isoscel și dacă triunghiul este scalen, când între laturile lui există relația:

$$\frac{a}{b+c} = \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}.$$

Se arată (Problema 542, VIII, 109), că există triunghiuri care să satisfacă această relațiune și apoi că nu există triunghiuri pseudo-isoscele pentru pedalele medianelor și înălțimilor.

b) Ortocentrul poate fi pe o înălțime a pedalului bisectoarelor dacă un triunghiu scalen îndeplinește relația:

$$(b+c)\ a^3 + bca^2 - (b+c)\ (b^2+c^2)\ a - bc\ (b+c)^2 = 0.$$

(Problema 708, XII, 85).

c) Centrul de greutate al unui triunghiu scalen poate fi pe o înălțime a pedalului bisectoarelor dacă avem relațiunea:

$$(b+c)\ a^3 - 3\,bca^2 - (b+c)\ (b-c)^2\,a - bc\ (b+c)^2 = 0.$$

(Problema 2693, XXIX, 301).

d) Punctul lui FEUERBACH (contactul cercului înscris cu al cercului celor 9 puncte) poate fi pe o înălțime a triunghiului dacă avem:

$$\cos B + \cos C = 1.$$

(Problema 3125, XXIX, 428).

e) Punctul lui FEUERBACH poate fi pe o mediană a triunghiului dacă avem:

$$a\,(b+c) = b^2 + c^2.$$

f) Punctul lui FEUERBACH poate fi pe o mediatoare a triunghiului dacă avem:

$$h_a = R + r.$$

(Problema 3194, XXXI, 385).

V. CRISTESCU nu s'a ocupat cu istoricul matematicilor, decât în legătură cu chestiunile ce studia dânsul. Aşa găsim o scurtă biografie a lui FEUERBACH la finele Notei 37, Anul XXVII, 394. După moartea lui, s'a găsit un manuscris neterminat cu un necrolog al lui J. NEUBERG, care s'a publicat în Anul XXXV pag. 201—202.

Ca originar din judeţul Vaslui, pe VASILE CRISTESCU l'a interesat cererile puse de mine cu No. 11 în Anul XXI şi 47 în Anul XXXIV privitoare la vasluianul NICULAE MILESCU SPĂTARUL, savant român din secolul XVII, şi s'a apucat să studieze viaţa şi opera acestuia. Răspunsul la Cererea 47 s'a publicat în Anul XXXIV, 427, iar pentru cealaltă s'a publicat *„Aritmetica lui* NICULAE MILESCU SPĂTARUL", după manuscrisele rămase dela CRISTESCU, în Anul XXXV, pag. 16—19.

V. CRISTESCU nu a făcut decât o singură recenzie în *Gazeta Matematică* şi anume unei Algebre, în Anul VII, 16—18. Această recenzie a dat loc la polemici prin presă între autorul cărţii şi autorii altor algebre pentru cursul secundar. Pe V. CRISTESCU, fire liniştită, l-a impresionat urît acele polemici şi l-a tămăduit de munca şi de grija de a mai recenziona cărţi.

* * *

Aceasta este activitatea mare şi rodnică pe care a desfăşurat-o VASILE CRISTESCU la *Gazeta Matematică* 34 ani continui şi pe care nu a părăsit-o decât odată cu viaţa lui! Ea a fost apreciată de toţi care au stat în jurul acestei reviste şi de corespondenţii ei. Ca semn vădit al sentimentelor pe care el a ştiut să le sădească în inimile acestora e destul să spun că trei din ei, fraţii Căpitan GH. NICULESCU, Profesorul universitar MIRON NICULESCU şi Profesorul de Liceu AL. NICULESCU au înfiinţat la *Gazeta Matematică* fondul „V. CRISTESCU" din care să se premieze anual autorul celui mai bun articol de geometria triunghiului sau de trigonometrie. Regulamentul acestui fond e publicat în *Gazeta Matematică* Anul XXXVIII pag. 125.

Asemenea fapte, care onorează pe discipolii spirituali ai lui VASILE CRISTESCU, sunt de natură să păstreze vie memoria aceluia, care a lucrat la punerea temeliilor şi la înălţarea edificiului ştiinţific naţional: *Gazeta Matematică.*

I. IONESCU.

RELAŢII TRIGONOMETRICE INTR'UN TRIUNGHIU IN LEGĂTURĂ CU PUNCTELE LUI FEUERBACH

(Urmare [1])

Fie acum φ, $\varphi_a \ldots$, punctele F ale triunghiului

$$\overline{A\varphi}^2 = \overline{AI}^2 + \overline{I\varphi}^2 + 2 \cdot AI \cdot I\varphi \cdot \cos AIO_9$$

$$\overline{A\varphi}^2 = 16R^2 \sin^2\tfrac{1}{2}B \sin^2\tfrac{1}{2}C + 16R^2 \sin^2\tfrac{1}{2}A \sin^2\tfrac{1}{2}B \sin^2\tfrac{1}{2}C$$

$$+ 32R^2 \sin\tfrac{1}{2}A \sin^2\tfrac{1}{2}B \sin^2\tfrac{1}{2}C \cdot \frac{8\sin\tfrac{1}{2}B \sin\tfrac{1}{2}C - \cos\dfrac{B-C}{2}(2\cos A + 1)}{1 - 8 \sin\tfrac{1}{2}A \sin\tfrac{1}{2}B \sin\tfrac{1}{2}C}$$

$$= \frac{8R^2 \sin^2\tfrac{1}{2}B \sin^2\tfrac{1}{2}C}{1 - 8\sin\tfrac{1}{2}A \sin\tfrac{1}{2}B \sin\tfrac{1}{2}C} \{(3 - \cos A)(1 - 8\sin\tfrac{1}{2}A \sin B \sin\tfrac{1}{2}C)$$

$$+ 4 \sin\tfrac{1}{2}A \left[8\sin\tfrac{1}{2}B \sin\tfrac{1}{2}C - \cos\frac{B-C}{2}(2\cos A + 1)\right]\}$$

$$= \frac{8R^2 \sin^2\tfrac{1}{2}B \sin^2\tfrac{1}{2}C}{1 - 8\sin\tfrac{1}{2}A \sin\tfrac{1}{2}B \sin\tfrac{1}{2}C} \{3 - \cos A + 4\sin\tfrac{1}{2}A [\sin\tfrac{1}{2}B \sin\tfrac{1}{2}C - \cos\tfrac{1}{2}B \cos\tfrac{1}{2}C]$$

$$- 8 \cos A \sin\tfrac{1}{2}A \cos\tfrac{1}{2}B \cos\tfrac{1}{2}C\}$$

$$= \frac{8R^2 \sin^2\tfrac{1}{2}B \sin^2\tfrac{1}{2}C}{1 - 8\sin\tfrac{1}{2}A \sin\tfrac{1}{2}B \sin\tfrac{1}{2}C} \{3 - \cos A - 2(1 - \cos A)$$

$$- 8 \cos A \sin\tfrac{1}{2}A \cos\tfrac{1}{2}B \cos\tfrac{1}{2}C\} = \ldots$$

$$(13)_{**} \quad A\varphi = 2R\sqrt{2}\sin\tfrac{1}{2}B \sin\tfrac{1}{2}C \sqrt{\frac{1 + \cos A(1 - 8\sin\tfrac{1}{2}A \cos\tfrac{1}{2}B \cos\tfrac{1}{2}C)}{1 - 8 \sin\tfrac{1}{2}A \sin\tfrac{1}{2}B \sin\tfrac{1}{2}C}}$$

$$= \frac{AI\sqrt{2R^2 + AH(R - 2r_a)}}{2\sqrt{R(R - 2r)}} .$$

Analog

$$\overline{A\varphi_a}^2 = \overline{AI_a}^2 + \overline{I_aO_9}^2 - 2 \cdot AI_a \cdot I_a\varphi_a \cdot \cos AI_a\varphi_a$$

$$\overline{A\varphi_a}^2 = 16R^2 \cos^2\tfrac{1}{2}B \cos^2\tfrac{1}{2}C + 16R^2 \sin^2\tfrac{1}{2}A \cos^2\tfrac{1}{2}B \cos^2\tfrac{1}{2}C$$

$$- 32R^2 \sin\tfrac{1}{2}A \cos^2\tfrac{1}{2}B \cos^2\tfrac{1}{2}C \cdot \frac{8\cos\tfrac{1}{2}B \cos\tfrac{1}{2}C - \cos\dfrac{B-C}{2}(1 + 2\cos A)}{1 + 8 \sin\tfrac{1}{2}A \cos\tfrac{1}{2}B \cos\tfrac{1}{2}C}$$

[1]) A se vedea începutul în N-rul 4, pag. 123.

$$= \frac{8R^2 \cos^2 \tfrac{1}{2}B \cos^2 \tfrac{1}{2}C}{1+8\sin \tfrac{1}{2}A \cos \tfrac{1}{2}B \cos \tfrac{1}{2}C} \{(3-\cos A)(1+8\sin \tfrac{1}{2}A \cos \tfrac{1}{2}B \cos \tfrac{1}{2}C)$$

$$- 4 \sin \tfrac{1}{2}A \left[8\cos \tfrac{1}{2}B \cos \tfrac{1}{2}C - \cos \frac{B-C}{2}(2\cos A+1)\right\}$$

$$= \frac{8R^2 \cos^2 \tfrac{1}{2}B \cos^2 \tfrac{1}{2}C}{1+8\sin \tfrac{1}{2}A \cos \tfrac{1}{2}B \cos \tfrac{1}{2}C} \{3 \cos A + 4\sin \tfrac{1}{2}A [\sin \tfrac{1}{2}B \sin \tfrac{1}{2}C - \cos \tfrac{1}{2}B \cos \tfrac{1}{2}C]$$

$$+ 8 \cos A \sin \tfrac{1}{2}A \sin \tfrac{1}{2}B \sin \tfrac{1}{2}C\}$$

$$= \frac{8R \cos^2 \tfrac{1}{2}B \cos^2 \tfrac{1}{2}C}{1+8\sin \tfrac{1}{2}A \cos \tfrac{1}{2}B \cos \tfrac{1}{2}C} \{3 - \cos A - 2(1-\cos A)$$

$$+ 8 \cos A \sin \tfrac{1}{2}A \sin \tfrac{1}{2}B \sin \tfrac{1}{2}C\} = \ldots$$

(14) $A\varphi_a = 2R\sqrt{2\cos \tfrac{1}{2}B \cos \tfrac{1}{2}C}\sqrt{\dfrac{1+\cos A(1+8\sin \tfrac{1}{2}A \sin \tfrac{1}{2}B \sin \tfrac{1}{2}C)}{1+8\sin \tfrac{1}{2}A \cos \tfrac{1}{2}B \cos \tfrac{1}{2}C}}$

$$= \frac{AI_a \sqrt{2R^2 + AH(R+2r)}}{2\sqrt{R(R+2r_a)}}.$$

Din triunghiul φAI,

(15)

$$\cos A \varphi O_9 = \frac{4[\sin \tfrac{1}{2}B \sin \tfrac{1}{2}C - \cos A \sin \tfrac{1}{2}A]}{\sqrt{2}\sqrt{(1-8\sin \tfrac{1}{2}A \sin \tfrac{1}{2}B \sin \tfrac{1}{2}C)[1+\cos A(1-8\sin \tfrac{1}{2}A \cos \tfrac{1}{2}B \cos \tfrac{1}{2}C)]}}$$

și

(16)

$$\cos A \varphi_a O_9 = \frac{4[\cos \tfrac{1}{2}B \cos \tfrac{1}{2}C + \cos A \sin \tfrac{1}{2}A]}{\sqrt{2}\sqrt{(1+8\sin \tfrac{1}{2}A \cos \tfrac{1}{2}B \cos \tfrac{1}{2}C)[1+\cos A(1+8\sin \tfrac{1}{2}A \sin \tfrac{1}{2}B \sin \tfrac{1}{2}C)]}}$$

De aici rezultă și relația :

$$\sqrt{(R-2r)[R+\cos A(R-2r_a)]} \cdot \cos A \varphi O_9$$

$$+ \sqrt{(R+2r_a)[R+\cos A(R+2r)]} \cdot \cos A \varphi_a O_9$$

$$= 2R\sqrt{2}\cos \frac{B-C}{2}.$$

Avem deasemenea

(17)

$$\sin \varphi AI = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sin \tfrac{1}{2}A \sin \dfrac{B-E}{2}[2\cos A - 1]}{\sqrt{(1-8\sin \tfrac{1}{2}A \sin \tfrac{1}{2}B \sin \tfrac{1}{2}C)[1+\cos A(1-8\sin \tfrac{1}{2}A \cos \tfrac{1}{2}B \cos \tfrac{1}{2}C)]}}$$

și

(18)

$$\sin\varphi_a AI_a = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}A \sin\frac{B-C}{2}[2\cos A - 1]}{\sqrt{(1+8\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C)[1+\cos A(1+8\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C)]}}$$

și încă, calculând cosinusurile în funcție de laturi

(17')

$$\cos\varphi AI = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{B-C}{2}[2\cos A + 1] - 1}{\sqrt{(1-8\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C)[1+\cos A(1-8\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C)]}}$$

(18')

$$\cos\varphi_a AI_a = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{B-C}{2}[2\cos A + 1] + 1}{\sqrt{(1+8\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C)[1+\cos A(1+8\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C)]}}.$$

De aici rezultă și identitățile remarcabile între unghiurile unui triunghiu:

$$\sin^2\tfrac{1}{2}A \cdot \sin^2\frac{B-C}{2} \cdot [2\cos A - 1]^2 + \{1 - \sin\tfrac{1}{2}A\cos\frac{B-C}{2}[2\cos A + 1]\}^2$$

$$= \frac{1}{2}[1 - 8\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C][1 + \cos A(1 - 8\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C].$$

$$\sin^2\tfrac{1}{2}A \cdot \sin^2\frac{B-C}{2}[2\cos A - 1]^2 + \{1 + \sin\tfrac{1}{2}A\cos\frac{B-C}{2}[2\cos A + 1]\}^2$$

$$= \frac{1}{2}[1 + 8\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C][1 + \cos A(1 + 8\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C)].$$

Deci

(19) $$\cos\varphi AO = \cos(\varphi AI + IAO)$$

$$= \frac{4}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C - \cos A\sin\frac{1}{2}A\cos(B-C)}{\sqrt{(1-8\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C)[1+\cos A(1-8\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C)]}}$$

(20) $$\cos\varphi_a AO = \cos(\varphi_a AI_a + I_a AO)$$

$$= \frac{4}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C + \cos A\sin\frac{1}{2}A\cos(B-C)}{\sqrt{(1+8\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C)[1+\cos A(1+8\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C)]}}$$

Din triunghiurile φAO, $\varphi_a AO$

$$\overline{O\varphi}^2 = \overline{A\varphi}^2 + \overline{AO}^2 - 2.AO.A\varphi.\cos\varphi AO, \quad \overline{O\varphi_a}^2 = \overline{A\varphi_a}^2 + \overline{AO}^2 - 2.AO.A\varphi_a\cos\varphi_a AO$$

$$(21)\ \overset{*}{*}\overset{*}{*}\ O\varphi^2 = \frac{R^2}{1-8\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}[1 - 8\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C$$

$$- 16\sin^2\tfrac{1}{2}A\sin^2\tfrac{1}{2}B\sin^2\tfrac{1}{2}C + 16\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C\cos A\cos B\cos C]$$

$$= \frac{R}{R-2r}[R(R-2r) - r(r-2\rho)]$$

$$(22)\ \overset{*}{*}\overset{*}{*}\ \overline{O\varphi_a}^2 = \frac{R^2}{1+8\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}[1 + 8\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C$$

$$- 16\sin^2\tfrac{1}{2}A\cos^2\tfrac{1}{2}B\cos^2\tfrac{1}{2}C - 16\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C\cos A\cos B\cos C]$$

$$= \frac{R}{R+2r_a}[R(R+2r_a) - r_a(r_a+2\rho)].$$

*

S'ar putea calcula mai departe, distanțele $\varphi\varphi_a$, $\varphi_b\varphi_c$ etc., însă acest studiu pare arid. Vom arăta mai bine concurența dreptelor $A\varphi_a$, $B\varphi_b$, $C\varphi_c$, proprietate pe care n'am întâlnit-o, dar o cred cunoscută.

Fie M intersecția $A\varphi_a$ cu O_9I

$$\sin(A\varphi_a, O_9I) = \sin(IA\varphi_a + AIO_9).$$

$$(23)\ \overset{*}{*}\overset{*}{*}\ \sin AMI$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}(B-C)[2\cos A - 1][1 + 8\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C]}{\sqrt{(1+8\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C)[1+\cos A(1+8\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C)] \cdot [1-8\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C]}}$$

deci

$$\frac{IM}{\sin IA\varphi_a} = \frac{AI}{\sin AMI}.$$

$$(24)\ \overset{*}{*}\overset{*}{*}\ IM = 4R\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C \cdot \frac{1-8\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}{1+8\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C} = r \cdot \frac{R-2r}{R+2r}.$$

Se vede de aici, din cauza simetriei, că $B\varphi_b \cdot C\varphi_c$ trec tot prin M, situat pe O_9I, astfel ca

$$(25)\qquad \frac{IM}{IO_9} = \frac{Rr}{R+2r}.$$

Se mai observă din (24) că poziția lui M depinde numai de R și r și deci când triunghiul ABC variază, rămânând înscris cercului egal cu (O) și circumscris lui (I), locul lui M este un cerc cu centrul în I.

N. N. Mihăileanu
Constanța.

DESPRE ŞIRUL LUI FIBONACCI

1. Recentul articol al D-lui ION B. FLORESCU asupra şirului lui FIBONACCI [1]), mă determină să public câteva din chestiunile pe care le-am propus studenţilor la Seminarul de Algebră Superioară şi Teoria Numerelor, în anii trecuţi — şi cari se raportă la acest şir.

Şirul lui FIBONACCI se defineşte, după cum se ştie, prin relaţia de recurenţă

$$U_n = U_{n-1} + U_{n-2} \tag{1}$$

cu $U_0 = 0$, $U_1 = 1$. Mare parte din autori, inclusiv autorul mai sus citat, iau $U_0 = 1$, $U_1 = 1$. Decalajul cu o unitate a indicilor, aşa cum se va face în acest articol, va simplifica mult enunţarea rezultatelor.

Din relaţia (1) se deduce imediat, prin aplicarea ei repetată termenilor U_{n-1}, U_{n-2}, . . . , următoarea relaţie, de altfel cunoscută, fundamentală pentru ceeace va urma,

$$U_n = U_{k+1} \cdot U_{n-k} + U_k \cdot U_{n-k-1} . \tag{2}$$

Vom mai avea încă nevoie de prelungirea şirului lui FIBONACCI *la stânga,* definind termenii cu indici negativi. Pentru aceasta vom face în relaţia (1) $n = 1$, ceeace ne dă

$$U_{-1} = U_1 ,$$

apoi $n = 0$, ceeace ne va da

$$U_{-2} = - U_2 .$$

Zic că în general vom avea

$$U_{-n} = (-1)^{n+1} U_n . \tag{3}$$

Intr'adevăr, să presupunem relaţia adevărată pentru toate numerele naturale până la $n - 1$ inclusiv; vom arăta că relaţia este adevărată şi pentru n. Din (1) deducem schimbând pe n în $-n+2$,

$$U_{-(n-2)} = U_{-(n-1)} + U_{-n} ,$$

sau, înlocuind pe U_{-n+2} prin $(-1)^{n-1} U_{n-2}$ şi pe U_{-n+1} prin $(-1)^n U_{n-1}$,

$$(-1)^{n-1} U_{n-2} = (-1)^n U_{n-1} + U_{-n}$$

de unde

$$U_{-n} = (-1)^{n+1} (U_{n-1} + U_{n-2}) = (-1)^{n+1} U_n$$

ceeace era de demonstrat.

1) Vezi G. M. Anul XXXVIII, 1933, pp. 168 — 170 şi 203 — 205.

Vom observa că relația (1) fiind acum valabilă pentru orice valoare întreagă, pozitivă *sau negativă*, a lui n, relația (2) va fi și ea valabilă oricari ar fi n și k întregi.

2. Fie q câtul și r restul împărțirii unui întreg a printr'un întreg b. Avem

$$(4) \qquad a = bq + r \qquad (r < b).$$

Mai putem încă scrie

$$a = b(q + 1) - r' \quad (r' = b - r < b).$$

Unul sau altul — indiferent — din numerele r și r' va fi pentru noi *restul* împărțirii lui a prin b. Această ambiguitate nu are nici o influență asupra multor rezultate din Teoria Numerelor cari își au originea în identitatea (4). Nouă ne va permite însă enunțarea, sub o formă simplă, a unui important rezultat privitor la șirul lui FIBONACCI.

3. Din relația (2) deducem

$$(5) \qquad \frac{U_n}{U_k} = U_{n-k-1} + \frac{U_{n-k} \cdot U_{k+1}}{U_k}.$$

In aceeaș relație să punem $n = \lambda - 2\mu$, $k = \lambda - \mu$, de unde $\lambda = 2k - n$, $\mu = k - n$. Obținem

$$U_{\lambda-2\mu} = U_{\lambda-\mu+1} \cdot U_{-\mu} + U_{\lambda-\mu} \cdot U_{-\mu-1},$$

sau scriind n în loc de λ, k în loc de μ, și ținând seama de (3),

$$U_{n-k} \cdot U_{k+1} = U_k \cdot U_{n-k+1} + (-1)^k \cdot U_{n-2k}.$$

Inlocuind în (5), obținem

$$(6) \qquad \frac{U_n}{U_k} = U_{n-k-1} + U_{n-k+1} + (-1)^k \frac{U_{n-2k}}{U_k}.$$

Nu avem decât să aplicăm această identitate câtului $\frac{U_{n-2k}}{U_k}$, $\frac{U_{n-4k}}{U_k}$ etc...., ca să ajungem la o identitate de forma

$$\frac{U_n}{U_k} = S \pm \frac{U_{n-2ki}}{U_k}.$$

Putem însă alege pe i astfel încât să avem

$$r = | n - 2ki | < k.$$

Atunci vom avea

$$\frac{U_n}{U_k} = S \pm \frac{U_r}{U_k} \quad (r < k)$$

ceeace ne arată că restul (în sensul general de mai sus) al împărţirii lui U_n prin U_k este U_r. Se vede apoi uşor că r este restul (în sensul general) al împărţirii lui n prin k. Putem deci enunţa următoarea proprietate fundamentală a şirului lui FIBONACCI.

Restul împărţirii, unul prin altul, a doi termeni ai şirului lui FIBONACCI *este un termen al şirului lui* FIBONACCI.

Indicele restului împărţirii este restul împărţirii, unul prin altul, a indicilor.

Din această teoremă decurg o mulţime de rezultate. Vom indica pe cele mai sugestive.

I. *Condiţia necesară şi suficientă ca doi termeni ai şirului lui* FIBONACCI *să fie divizibili unul prin altul, este ca indicii lor să fie divizibili unul prin altul.*

Să numim cu D (a, b) cel mai mare comun divizor a două numere întregi a şi b. Putem atunci enunţa o a doua consecinţă a teoremei de mai sus :

II. *Cel mai mare comun divizor a doi termeni ai şirului lui* FIBONACCI *este un termen al şirului lui* FIBONACCI. *Indicele celui mai mare comun divizor este cel mai mare comun divizor al indicilor.*

Proprietatea se generalizează evident pentru mai mulţi termeni. Putem scrie deci

$$D(U_a, U_b, U_c, \ldots) = U_{D(a, b, c, \ldots)}.$$

III. *Condiţia necesară şi suficientă ca doi termeni ai şirului lui* FIBONACCI *să fie primi între ei, este ca indicii lor să fie primi între ei, sau să aibă numărul 2 ca cel mai mare comun divizor.*

Este o consecinţă imediată a proprietăţii precedente, dacă ţinem seama că avem

$$U_1 = U_2 = 1.$$

IV. *Termenii* U_4 *şi* U_p, *unde* p *este prim absolut, sunt singurii cari nu admit ca factori (afară de ei înşişi şi de unitatea) termeni ai şirului lui* FIBONACCI.

Putem însfârşit enunţa o ultimă proprietate [1]).

V. *Termenii şirului lui* FIBONACCI, *multipli ai unui număr oarecare* d, *sunt distribuţi în şir în mod uniform, adică din* k *în* k, U_k *fiind cel mai mic termen pozitiv, divizibil prin* d.

Dacă *d* este un termen al şirului lui FIBONACCI, teorema este evidentă, căci nu este decât repetarea proprietăţii II. Dacă nu, fie U_k un termen al şirului lui FIBONACCI, divizibil prin *d*.

Avem, conform proprietăţii a II-a,

$$d \leqslant D(U_k, U_h) = U_{D(k,h)}.$$

Insă cum

$$D(k, h) \leqslant k,$$

rezultă

$$U_{D(k,h)} \leqslant U_k.$$

Inegalitatea este imposibilă, deoarece U_k este cel mai mic termen divizibil prin *d*, deci

$$U_{D(k,h)} = U_k$$

de unde

$$D(k, h) = k$$

adică

$$h \equiv \mathcal{M}_k$$

ceeace era de demonstrat.

MIRON NICOLESCU.

---

1) Această proprietate, în cazul particular în care *d* este o putere (întreagă) a unui termen al şirului lui FIBONACCI, a fost enunţată de D-l ION B. FLORESCU, în articolul citat.

NOTE MATEMATICE

34. *Sur les nombres de* PYTHAGORE. Dans un récent article, *Gazeta Matematica*, vol. XXXIX, p. 205), nous avons retrouvé cette formule de M. R. GOORMAGHTIGH :

$$S = 2^{n-2} \cdot n\,(n+1) = 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2}\, n\,(n+1), \qquad (1)$$

qui exprime la somme de tous les nombres contenus dans tous les groupes de 1, de 2, . . . , de n nombres que l'on peut former avec les n premiers nombres entiers.

Recherchons les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'entier S soit un carré parfait.

1° $n = 2m$ est un entier *pair*. Alors, on a

$$S = 2^{2(m-1)} \cdot n\,(n+1).$$

Ce produit n'est jamais carré parfait car, autrement, le produit $n\,(n+1)$ de deux entiers consécutifs serait aussi un carré, ce qui est absurde.

2° $n = 2m + 1$ est un entier *impair*. Dans ce cas,

$$S = (2^m)^2 \cdot \frac{1}{2}\, n\,(n+1).$$

Pour que S soit carré parfait, il faut et il suffit que le nombre entier triangulaire $\frac{1}{2}\, n\,(n+1)$ le soit également.

Posons

$$\frac{1}{2}\, n\,(n+1) = k^2,$$

ce qui conduit à l'équation

$$n^2 + n - 2k^2 = 0,$$

dont la racine positive

$$n = \frac{1}{2}\left| -1 + \sqrt{1 + 8k^2} \right|$$

convient seule.

Pour que n soit entier, il faut que la quantité située sous le radical soit telle que

$$z^2 - 2y^2 = +1, \qquad (2)$$

en posant

$$z^2 = 8k^2 + 1 \quad , \quad y = 2k.$$

Or les premières solutions de l'équation (2),

$$z = 3 \ , \ 17 \ , \ 99 \ , \ 577, \ldots$$

$$y = 2 \ , \ 12 \ , \ 70 \ , \ 408, \ldots ,$$

fournissent les premières valeurs de n.

$$n = 1 \ , \ 8 \ , \ 49 \ , \ 288, \ldots$$

La plus petite valeur de $n > 1$ telle que l'expression (1) soit un carré parfait est donc bien $n = 49$ [1]).

V. THÉBAULT.

35. *Comunicare a Societăţii Matematice din Grecia.* «Relativ la convocarea unui Congres de Matematici, la Atena, Societatea Matematică din Grecia, care cuprinde printre membrii săi aproape totalitatea matematicianilor greci, are onoarea de a face comunicarea următoare :

«Convocarea unui Congres (interbalcanic) al Matematicianilor, la Atena, în timpul lunei Iulie 1934, n'a fost în ideia decât a unui număr foarte restrâns de profesori de matematică ai Invăţământului secundar, pentru motive şi vederi pur profesionale.

«Societatea Matematică din Grecia nu aprobă acest proiect şi declară că nici într'un caz ea nu va participa la lucrările acestui Congres».

Preşedinte : N. SAKELLARIOU, profesor la Universitatea din Atena şi la Şcoala de Ştiinţe Economice şi Comerciale.

Secretar General : ST. STAMATIS, profesor la Şcoala Tehnică (Sibitanides).

36. *Cuadratura cercului.* (Urmare dela pagina 259). In Şedinţa Societăţii Române de Ştiinţe dela 29 Ianuarie 1934, despre care am vorbit la pag. 260, D-l G. ŢIŢEICA, Secretar General al Academiei Române, a adus la cunoştinţă că şi această instituţiune a primit soluţiuni pentru cuadratura cercului în vederea premiului fictiv instituit de KRISTOVICI. Un cuadrator din Hamburg a şi angajat un avocat ca să-i apere drepturile, iar alţii s'au adresat Legaţiunei

1) Lorsque $n = 2q + 1$, la dernière formule de *d*) p. 205 doit être remplacée par la suivante :

$$S = [2^{q-1} \ . \ n \ (n + 1)]^2.$$

V. T.

Germane din Bucureşti, care a şi intervenit la Academie în această chestiune.

O altă instituţiune la care au dat asalt cuadratori, a fost Universitatea din Bucureşti. Aceasta a trimis soluţiunile primite Secţiunei Matematice a Societăţii Române de Ştiinţe, de unde am luat cunoştinţă de ele.

Un inginer civil din Kiel, D-l H..... R.... a trimis recomandată, la 27 Octomvrie 1933, o soluţiune la adresa:

„An die Spezialkommission von Mathematikern, eigesetzt für die Lösung der Quadratur des Kreisses, Laut Testament des Industriellen Herrn Adalbert KRISTOCICZ, *in Bukarest (Rumänien) Universität (Universitatea), Mathematische Fakultät (Facultatea de Matematică)“.*

Acest cuadrator dă numele de ADALBERT lui KRISTOVICI în loc de BELA. El dă aria unui cerc de 8 centimetri rază egală cu 201,06 cm^2, ceeace ar corespunde lui $\pi = 3{,}1415625$, valoare neexactă dela a patra cifră zecimală înainte. Pe baza acestei valori dă o construcţie grafică, la demonstraţia căreia ia pe $\sqrt{2} = 1{,}4142$ exact. Cu toate acestea la fine spune:

„Die Quadratur des Kreises wurde somit gelöst. Mittels Zirkel und Lineal wurde aus einem angenommen Kreise ein Quadrat konstruiert, dessen Flächeninhalt genau gleich dem Flächeninhalt des angenomen Kreises ist“.

Am reprodus textual concluzia autorului, pentruca domnii profesori din Germania, care se miră că există Fermatişti în România, să ne permită şi nouă să ne mirăm că mai există cuadratori în Germania!

O a doua soluţie primită la Universitatea din Bucureşti vine dela D-l A..... L.... din Paris, la adresa: *„Messieurs les Membres du Jury chargés d'examiner les solutions ayant trait au problème de la Quadrature du Cercle“.*

Pe acesta însă nu-l putem clasa printre cuadratori căci îşi dă seama că soluţia sa este aproximativă, întru cât spune:

*„J'ignore à quelle approximation, on est arrivé à ce jour, mais cette solution, donnant la valeur de π au 1/1000000 près, se rapproche de la formule d'*ADRIEN MÉTIUS *355/113 et a l'avantage d'être obtenue géométriquement“.*

De altfel scrisoarea se termină cu cuvintele:

„Avec l'espoir que mes travaux,—si modestes soient—ils— retiendront votre attention, je vous prie . . .“

Există soluţiuni mai precise decât aceasta, ca cea dată în 1828 de SPECHT, care revine la

$$\pi = (7/10^7) + (13\sqrt{146}/50) = 3{,}1415926531,$$

şi care are nouă cifre zecimale exacte pentru π.

Mai am de adăugat că din o notă publicată de ziarul *Universul*, de curând (25 Februarie), reese că la Tribunalul din Cluj se continuă cu primirea de soluţiuni dela cuadratori din toată lumea pentru a concura la premiul lui BELA KRISTOVICI, mare fabricant de ghete!

Din cele spuse până aci se adevereşte că zicătoarea «un nebun aruncă o piatră în puţ şi o mie de înţelepţi nu pot să o scoată», este adevărată şi în domeniul matematicilor.

Cum se explică această ploaie de soluţiuni, nu e greu de conceput: e mirajul zecilor de milioane care s'a anunţat ca premiu. E destul ca un ziarist să facă o glumă într'un ziar oarecare, pentruca să pună în mişcare pe toţi cuadratorii din lumea întreagă. E probabil însă că gluma a fost ticluită în anume scopuri. Vreunul dintre aceia care nu se împacă cu ideia că Universitatea Maghiară din Cluj a fost transformată în Universitate Română, a pus prin ziare notiţe din care să rezulte că matematicianii dela Universitatea din Cluj, şi apoi cei de pe la celelalte instituţiuni de ştiinţă din ţară, ca Academia Română, Universitatea din Bucureşti, etc., nu ştiu că problema cuadraturii cercului este imposibilă, şi că au făcut Comisiuni, au susţinut procese înaintea instanţelor judecătoreşti ca să li se încredinţeze administrarea fondului pentru acordarea unui premiu aceluia care va deslega problema cuadraturii cercului!

Dar românul are o zicătoare:

„Cine sapă groapa altuia, cade singur într'ânsa“. C.C.E.D.D.

I. IONESCU.

37. *Numere divizibile prin suma cifrelor lor.* Cu ocazia redijărei problemei 2440, a cărei soluţie s'a publicat la pagina 185 din acest an al G. M., am căutat numerele de 2 şi de 3 cifre, divizibile prin suma cifrelor lor. Dau în cele ce urmează rezultatele găsite, fără a putea afirma că aceste rezultate nu ar mai fi publicate undeva.

1°. *Cazul numerelor de 2 cifre.* Problema e foarte simplă în acest caz, de aceia dau numai rezultatele în ordinea crescândă a sumei cifrelor:

10 ; 20 ; 12 ; 21 ; 30 ; 40 ; 50 ; 24 ; 42 ; 60 ; 70 ; 80 ; 18 ; 27 ; 36 ; 45 ; 54 ; 63 ; 72 ; 81 ; 90 ; 48 ; 84.

Total 23 soluțiuni.

2°. *Cazul numerelor de 3 cifre.* Când $s = a + b + c$ este 1, 2 sau 3 se găsesc soluțiile imediate

100 ; 110 ; 200 ; 111 ; 120 ; 102 ; 210 ; 201 ; 300.

Pentru $s > 3$ avem următoarele:

a) $s = 4$. Trebue ca c să fie 0 sau 2, iar bc divizibil prin 4. Se găsesc soluțiile

112 ; 220 ; 400.

b) $s = 5$. Nu putem lua decât $c = 0$, iar $a + b = 5$. Deci:

140 ; 230 ; 320 ; 410 ; 500.

c) $s = 6$. Se dau lui c valorile 0, 2, 4, iar $a + b$ egală cu $6 - c$. In $a + b$ cifrele a și b pot avea orice valori, așa încât suma lor să fie $6 - c$. Se găsesc soluțiile

150 ; 240 ; 330 ; 420 ; 510 ; 600

132 ; 222 ; 312 ; 402

114 ; 204.

d) $s = 7$. Observ că

$$(1) \qquad \frac{abc}{s} = \frac{9\,(11a + b)}{s} + 1.$$

Se dau lui a valori dela 1 la 7 inclusiv, iar lui b valori mai mici decât 7 pentru care $4a + b$ se divide prin 7. Pentru c se ia diferența între 7 și $a + b$. Avem soluțiunile

133 ; 322 ; 511 ; 700.

e) $s = 8$. Procedând ca la *d)* se găsește

152 ; 224 ; 440 ; 512 ; 800.

f) $s = 9$. Soluţiunile următoare se scriu în mod natural

108 ; 117 ; 126 ; 135 ; 144 ; 153 ; 162 ; 171 ; 180 ;

207 ; 216 ; 225 ; 234 ; 243 ; 252 ; 261 ; 270 ; 306 ;

315 ; 324 ; 333 ; 342 ; 351 ; 360 ; 405 ; 414 ; 423 ;

432 ; 441 ; 450 ; 504 ; 513 ; 522 ; 531 ; 540 ; 603 ;

612 ; 621 ; 630 ; 702 ; 711 ; 720 ; 801 ; 810 ; 900.

g) $s = 10$. In acest caz $c = 0$, iar $a + b = 10$ şi avem soluţiile

190 ; 280 ; 370 ; 460 ; 550 ; 640 ; 730 ; 820 ; 910.

h) $s = 11$. Se vede din (1) dela *d)* că avem soluţii numai dacă b se divide prin 11, deci dacă b este zero. Soluţiile în acest caz sunt

209 ; 308 ; 407 ; 506 ; 605 ; 704 ; 803 ; 902.

i) $s = 12$. Trebue ca $11a + b$ să se dividă cu 12, iar c să fie pereche. In aceste condiţii se găsesc soluţiile

228 ; 336 ; 444 ; 552 ; 660

sau trebue ca $11a + b$ să se dividă prin 4, iar c să fie pereche. Se găsesc soluţiile de mai sus şi încă următoarele:

156 ; 192 ; 264 ; 372 ; 408 ; 480 ; 516 ; 624 ; 732 ; 804 ; 840 ; 912.

Total 17 soluţiuni pentru *i)*.

j) $s = 13$. Dăm lui a succesiv valorile dela 1 la 9 şi determinăm în fiecare caz pe b aşa ca $11a + b$ să se dividă prin 13 şi ca $a + b \leqslant 13$. Valoarea lui c rezultă apoi din a lui s. Găsim

247 ; 364 ; 481 ; 715 ; 832.

k) $s = 14$. Se procedează ca la *j)* şi se găseşte

266 ; 392 ; 518 ; 644 ; 770.

l) $s = 15$. c este nul sau 5, iar $a + b$ este 15 sau 10, din soluţiile

690 ; 780 ; 870 ; 960

195 ; 285 ; 375 ; 465 ; 555 ; 645 ; 735 ; 825 ; 915.

m) $s = 16$, ca la *j)* găsim

448 ; 592 ; 736 ; 880.

n) $s = 17$, avem soluțiile

476 ; 629 ; 782 ; 935.

o) $s = 18$, c trebue să fie pereche, avem

198 ; 288 ; 378 ; 396 ; 468 ; 486 ; 558 ; 576 ; 594 ; 648 ;

666 ; 684 ; 738 ; 756 ; 774 ; 792 ; 828 ; 846 ; 864 ; 882 ;

918 ; 936 ; 954 ; 972 ; 990.

p) $s = 19$ numai soluția 874.

q) $s = 20$ deoarece $c = 0$, iar $a + b < 20$ nu avem soluție.

r) $s = 21$ se găsesc soluțiile

399 ; 588 ; 777 ; 966.

s) $s = 22$ și $s = 23$ nu avem soluții.

t) $s = 24$ dă soluția 888.

u) $s = 25$ și $s = 26$ nu avem soluții.

v) $s = 27$ dă soluția 999.

In total cazul numerelor de 3 cifre are 180 soluțiuni.

COL. GH. BUICLIU.

CONCURSUL «GAZETEI MATEMATICE»

DIN ANUL 1934

(12 Aprilie 1934)

CLASA IV

Geometrie plană. Se consideră trei cercuri O_1, O_2, O_3 în acelaș plan. Cercurile O_1 și O_2 se întâlnesc în punctele A și B iar cercurile O_2 și O_3 se întâlnesc în punctele C și D. Dreapta AD întâlnește din nou cercul O_1 în A' și cercul O_3 în D', iar dreapta BC întâlnește din nou cercul O_1 în B' și cercul O_3 în C'. Să se arate că:

1°. Patrulaterul A'B'C'D' este înscris într'un cerc O_4.

2°. Centrele cercurilor O_1, O_2, O_3, O_4 formează un paralelogram.

Geometrie în spațiu. Fie VABC o piramidă având muchiile opuse perpendiculare și A', B', C' proecțiile vârfului V pe muchiile BC, CA, AB.

1°. Să se arate că punctul de întâlnire al perpendicularelor coborite din B, B' pe VB', VB este în linie dreaptă cu punctele obținute ducând perpendiculare din C, C' pe VC', VC și din A, A' pe VA' VA.

2°. Să se arate că există egalitatea

Vol. VB'BC' × Vol. VC'CA' × Vol. VA'AB' =

= Vol. VB'BA' × Vol. VC'CB' × Vol. VA'AC'.

unde Vol. $\alpha\beta\gamma\delta$ înseamnă volumul piramidei $\alpha\beta\gamma\delta$.

Algebra elementară. I. Un părinte spune fiului său:

Dacă lipsesc de lângă tine atâția ani cât ai tu acum, împlinesc la întoarcerea mea de două ori mai mulți ani decât vei avea tu atunci.

Dacă nu mă mai întorc, să știi că am murit cu șase ani înainte de a împlini tu dublul anilor ce ai și atunci am avut de cinci ori vârsta ta de acum patru ani.

Părintele a plecat și nu s'a mai întors.

Se cere vârsta sa și a fiului, la plecare.

II. Să se verifice identitatea:

$$a^4 + b^4 + c^4 \equiv (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(ab + bc + ac)^2 + 4abc(a + b + c).$$

CLASA V

Aritmetica. 1. Să se găsească o regulă practică pentru recunoașterea divizibilității unui număr întreg oarecare prin 27.

Aplicațiune.

2. Să se simplifice și calculeze expresiunea:

$$\left(2\frac{3}{4} + \frac{5}{2} \times \frac{7}{3\frac{4}{5}} - \frac{1\frac{2}{3}}{2\frac{1}{2}}\right)^2 : 1\frac{41041}{51984}.$$

Geometrie plană. Se consideră într'un plan trei direcții fixe Ox, Oy, Oz și un punct fix M. O dreaptă Δ dusă prin M întâlnește pe Ox în punctul A. Paralela dusă prin A la Oz întâlnește pe Oy în B iar cercul circumscris triunghiului OAB întâlnește din nou pe Δ în C.

Să se arate că dacă dreapta Δ se rotește în jurul punctului M:

1°. Punctul C se mișcă pe un cerc fix.

2°. Dreapta BC trece printr'un punct fix.

Algebra elementară. I. Se dă trinomul:

$$P(x) \equiv ax^2 + bx + c.$$

1° Știind că:

$$P(1) = 1$$
$$P(2) = 12$$
$$P(3) = 35.$$

Să se rezolve ecuația:

$$P(x^2 + a + b + c) = 0.$$

2° Dacă

$$P(1) = 4$$
$$P(2) = 9.$$

Să se găsească valorile numerice ale coeficienților astfel ca trinomul dat să fie un pătrat perfect.

3°. Dacă se dă numai relația $P(1) = 0$, se pot deduce valorile coeficienților a, b, c astfel ca trinomul dat să se poată pune sub forma unui pătrat perfect ?

II. Să se găsească adevărata valoare a fracției:

$$E = \frac{a^6 - 2a^5 b + a^4 b^2 + a^2 b^4 - 2ab^5 + b^6}{a^4 - 2a^3 b + 2a^2 b^2 - 2ab^3 + b^4}$$

pentru $a = b = 1$.

CLASA VI

Geometrie plană. In trapezul oarecare ABCD (cu bazele paralele AD și BC) se ia pe latura AB un punct oarecare M. Paralela dusă prin A la CD întâlnește dreapta MC în N, iar paralela dusă prin B la CD întâlnește dreapta MD în P.

1°. Să se arate că suma:

$$AN + BP$$

este constantă oricare ar fi M pe AB.

2°. Paralelele duse prin A și B, respectiv dreptelor MC și MD, se întâlnesc într'un punct pe dreapta CD.

Geometrie în spațiu. 1) Fie ABCD și V baza și vârful unei piramide înscrisă în sfera S — M și N două puncte situate respectiv pe înălțimea piramidei și pe diametrul sferei care pleacă din V — M_a, M_b, M_c, M_d și N_a, N_b, N_c, N_d proecțiile punctelor M și N pe muchiile VA, VB, VC, VD.

Dacă se notează A' intersecția dreptelor $M_a M_b$, $N_a N_b$ și B', C', D' intersecțiile analoage, să se arate că dreptele VA', VB', VC', VD' sunt în același plan.

2) Fie dată piramida VABC așa fel ca muchia VA să fie perpendiculară pe planul ABC și diedrul Δ având dreapta VA ca muche, admițând același plan bisector cu diedrul format de planele AVB, AVC. — P, Q punctele în care Δ întâlnește dreapta BC — B', C' punctele de întâlnire ale sferelor VAPB, VAQC cu dreptele AC, AB.

Se cere locul geometric al intersecției planelor VBB', VCC' când diedrul Δ se desface sau se închide.

(Ambele chestiuni obligatorii).

Algebră elementară. I. Să se simplifice expresia:

$$\left[\frac{\alpha + \beta\sqrt{\beta}}{\alpha - \beta\sqrt{\beta}} : \left(\frac{\beta + \sqrt[3]{\alpha^2} + 2\sqrt[6]{\alpha^2\beta^3}}{\sqrt[3]{\alpha^2} - \beta}\right)\right] \times \frac{\sqrt[3]{\alpha^2} + \sqrt[6]{\beta^3\alpha^2} + \beta}{\sqrt[3]{\alpha^2} - \sqrt[6]{\beta^3\alpha^2} + \beta}$$

II. Se consideră polinoamele:

$$P(x) = x^2 + ax + b \quad \text{și} \quad Q(x) = x^2 + px + q$$

și se notează cu x_1, x_2 rădăcinile ecuației:

(1) $$P(x) = 0.$$

1. Să se formeze ecuaţia de gr. II-a care are drept rădăcini pe:

$$Q(x_1) \text{ şi } Q(x_2).$$

2. Să se deducă de aci condiţia ca ecuaţiile:

$$P(x) = 0 \text{ şi } Q(x) = 0$$

să aibă o rădăcină comună.

3. Să se deducă ecuaţia care are drept rădăcini pătratele rădăcinilor ecuaţiei (1).

4. Presupunând $p = 0$ şi pe b şi q cunoscuţi să se determine a aşa fel încât să avem:

$$Q^2(x_1) + Q^2(x_2) + \alpha Q(x_1)\, Q(x_2) = 0.$$

(Toate chestiunile sunt obligatorii).

Trigonometrie. Chestiunea I. Să se demonstreze că avem

$$\frac{\sin(x+a)\cos x - \sin x \cos(x+a)}{\cos(x+a)\cos x + \sin x \sin(x+a)} = \operatorname{tg} a.$$

Chestiunea II. Să se demonstreze identitatea:

$$\frac{\sin^3 x}{\cos x} + \frac{\cos^3 x}{\sin x} = 2 \operatorname{cosec} 2x - \sin 2x.$$

Chestiunea III. Să se demonstreze identitatea:

$$(\sin 1001x + \sin 1000x)^2 - (\sin 5001x + \sin 5000x)^2 = (\cos 5001x + \cos 5000x)^2 - (\cos 1001x + \cos 1000x)^2.$$

(Toate chestiunile sunt obligatorii).

Trigonometrie. Chestiunea I. Să se demonstreze că

$$\frac{\operatorname{tg}(x+a) - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg}(x+a)} = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}(x-a)}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg}(x-a)} = \operatorname{tg} a.$$

Chestiunea II. Să se demonstreze identitatea:

$$\frac{\sin^5 x}{\cos x} + \frac{\cos^5 x}{\sin x} = 2 \operatorname{cosec} 2x - \frac{3}{2} \sin 2x.$$

Chestiunea III. Să se rezolve ecuaţia:

$$4 \sin^4 x + \sin 2x \cos x + 8 \sin^2 x + 12 \cos^2 x - 12 = 0.$$

(Toate chestiunile sunt obligatorii).

Mecanica. Un tren pleacă dintr'o staţiune A cu o mişcare uniform accelerată până când iuţeala ajunge 72 km./oră, după ce a trecut 8 minute dela plecare.

Din acest moment, trenul continuă a avea o mişcare uniformă, cu 72 km./oră, pe o distanţă de 50 km. — Pe ultimii 6 kilometri, înainte de a ajunge în staţiunea B, trenul are o mişcare uniform întârziată.

Se cere:

a) Distanţa AB

b) Timpul în care a fost parcursă distanţa AB

c) Să se deseneze diagramele pentru spaţii, iuţeli şi acceleraţii.

CLASA VI REALĂ

Algebra superioară. I. 1. Să se calculeze razele bazelor unui trunchiu de con circular drept în funcţie de generatoare, când se cunoaşte suprafaţa laterală, astfel încât volumul trunchiului să fie *maxim.*

2. Să se determine generatoarea astfel încât valoarea maximă a volumului să fie

$$V_{max.} = \frac{\pi g^3}{18\sqrt{3}},$$

g fiind generatoarea trunchiului de con.

Indicaţiuni. Se vor utiliza formulele

$$\text{aria lat} = \pi g\,(R + r) \quad , \quad \text{vol.} = \frac{\pi l}{3}\,(R^2 + Rr + r^2)$$

R şi r fiind razele bazelor.

II. 1. Să se calculeze valoarea determinantului

$$D_n = \begin{vmatrix} -2\cos\varphi & 1 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 1 & -2\cos\varphi & 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 1 & -2\cos\varphi & 1 \quad 0 \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 \ldots & \ldots & 1 & -2\cos\varphi \end{vmatrix}.$$

2. Să se arate că există o relaţie de recurenţă între D_n , D_{n-1} şi D_{n-2}.

3. Observând că în particular

$$D_1 = -2\cos\varphi = -\frac{\sin 2\varphi}{\sin\varphi},$$

să se deducă o formulă asemănătoare pentru D_n .

CLASA VII

Aritmetica. 1. Să se găsească o regulă practică pentru recunoaşterea divizibilităţii unui număr întreg oarecare prin 37.

Aplicaţiune.

2. Să se simplifice şi calculeze expresiunea:

$$\left(2\frac{3}{4} + \frac{5}{2} \times \frac{7}{3\frac{4}{5}} - \frac{1\frac{2}{3}}{2\frac{1}{2}}\right)^3 : \sqrt{\left(1\frac{41041}{51984}\right)^3}.$$

Geometrie plană. Se proiectează vârfurile triunghiului ABC în punctele a, b, c, pe dreapta Δ din plan. Paralelele duse prin b şi c respectiv la AB, AC se întâlnesc în A', paralelele duse prin c, a, respectiv la BC, BA se întâlnesc în B' iar dreptele duse prin a, b, paralele respectiv la CA, CB se întâlnesc în C'.

1°. Să se arate că punctele A', B', C' se găsesc pe o dreaptă Δ'.

2°. Dacă dreapta Δ se mişcă printr'o translaţie în plan, punctele A', B', C' se deplasează pe dreapta Δ'.

3°. Să se deducă de aci că Δ' e perpendiculară pe Δ.

Geometrie în spațiu. Fie dată o piramidă VABC având muchiile opuse perpendiculare — A', B', C' mijloacele muchiilor BC, CA, AB — A_1, B_1, C_1 proecțiile punctului V pe aceste muchii.

Planul paralel cu B_1C_1 dus prin VA tae planul VB'C' după dreapta α. Analog se obțin dreptele β, γ ducând prin VB, VC plane paralele respectiv cu C_1A_1 , A_1B_1 și intersectându-le cu planele VC'A', VA'B'.

Să se demonstreze următoarele:

1. Dreptele α, β, γ sunt în același plan.

2. Planul dreptelor α, β, γ trece și prin intersecția perechilor de planuri VB_1C_1 și VBC, VC_1A_1 și VCA, VA_1B_1 și VAB.

3. A'' fiind intersecția dreptelor B'C', B_1C_1 și B'', C'' punctele analoage, planele VAA'', VBB'', VCC'' au o dreaptă comună.

Algebra elementară. Se consideră ecuația:

$$x^2 + \alpha x + 1 = 0 \tag{1}$$

și se notează cu: $P_n = x_1^n + x_2^n$, x_1 și x_2 fiind rădăcinile ecuației (1).

1. Să se studieze natura rădăcinilor acestei ecuații.

2. Folosind faptul că x_1 și x_2 sunt rădăcinile ecuației (1) să se arate că avem

$$P_{n+1} + \alpha P_n + P_{n-1} = 0. \tag{2}$$

3. Să se calculeze cu ajutorul relației (2) expresia:

$$E = P_4 + aP_3 + bP_2 + cP_1 + dP_0.$$

4. Presupunând că: $4a = c$ și $d = b - \frac{1}{2}$, să se găsească valorile lui α pentru cari: $E = 0$.

5. Să se demonstreze formula:

$$P_0 + P_1 + P_2 + \ldots + P_n = 1 - \frac{\alpha + 1}{\alpha + 2} P_{n+1} - \frac{1}{\alpha + 2} P_{n+2}.$$

Ce devine această formulă pentru $\alpha = -2$?

(Toate chestiunile sunt obligatorii).

Algebra superioară. *Seria I.* 1. Să se studieze natura seriei

$$\delta = \sum_0^\infty \frac{an^2 + bn + c}{n!}$$

a, b, c fiind constante date și să i se calculeze suma în caz de convergență

2. Să se calculeze limita

$$E = \lim_{m=0} \lim_{n=\infty} \left[1 + \log (1 + m)^{\frac{1}{n}} + \frac{a}{n^2} \right]^{\frac{n^2}{mn+b}}$$

a, b fiind constante date.

Algebra superioară. *Seria II.* 1. Să se studieze natura seriei

$$\delta = \sum_0^\infty \frac{x^n y^n (y^{n+1} - x^{n+1})}{(x^n + y^n)(x^{n+1} + y^{n+1})(x^{n+2} + y^{n+2})}$$

și să i se afle suma în caz de convergență.

2. Să se calculeze limita

$$E = \lim_{n=\infty} \lim_{x=0} [1 + \operatorname{tg}(an^2 + bn + c)x]^{\operatorname{cot}(\alpha n^2 + \beta n + \gamma)x}$$

a, b, c, α, β, γ fiind constante date.

Să se determine a astfel încât limita găsită să fie $1 + \alpha$.

Geometrie Descriptivă. Chestiunea I. *Cadru* 170 × 260 m.m.

Linia de pământ Ox se va lua paralelă cu marginea mică a cadrului şi la distanţa de 170 m.m. de aceasta.

Se dă :

1. Un plan $P'\alpha P$ determinat prin două drepte LM şi LN concurente în punctul L pe linia de pământ.

M (10 , 50 , 30 ,)

N (50 , 10 , 30 ,)

L (30 , 0 , 0 ,).

2. Se mai dă de asemeni încă un alt punct Q, tot pe linia de pământ

Q (120 , 0 , 0 ,).

Se cere :

1. Să se determine urmele planului $P'\alpha P$ care conţine dreptele LM şi LN.

2. Să se construiască în acest plan $P'\alpha P$ un pătrat ABCD în care unul din vârfuri, anume vârful A, să fie chiar piciorul perpendicularei scoborite din punctul Q pe planul $P'\alpha P$, iar lungimea laturei pătratului, să fie egală cu adevărata mărime a perpendicularei scoborîte din punctul Q pe planul $P'\alpha P$.

Direcţia laturei AB a patratului ABCD din planul $P'\alpha P$, să fie după o orizontală a planului.

Chestiunea II. *Cadru* 170 × 260 m.m.

Linia de pământ Ox se va lua paralelă cu latura cea mică a cadrului şi la distanţa de 130 m.m. de aceasta :

Se dă :

1. Un plan $P'\alpha P$ determinat astfel încât „α" se găseşte pe linia de pământ la 10 m/m de origină, $\alpha P'$ face 30° cu linia de pământ şi αP face 45° cu linia de pământ.

2. O dreaptă AB.

A (70 , 12 , 65 ,)

B (130 , 40 , 50 ,).

3. O axă verticală ZZ'

Z (80 . 35 . 0 .).

Se cere :

Să se rotească dreapta AB până ce această dreaptă devine paralelă cu planul $P'\alpha P$.

Timpul acordat : 3 ore.

Observaţiune. Pentru fixarea unui punct, prima ţifră reprezintă distanţa dela origină, măsurată dela stânga spre dreapta, până la linia de ordine, a doua ţifră reprezintă depărtarea, a treia ţifră reprezintă cota.

Origina este socotită la intersecţia liniei de pământ cu linia din stânga a cadrului.

Trigonometrie. I. Să se arate că dacă în triunghiul ABC medianele BB′ şi CC′ sunt perpendiculare între ele, aria triunghiului e dată de formula:

$$S = a^2 \operatorname{tg} A.$$

II. Să se afle, cu precizia dată de tablele cu cinci zecimale, elementele unui triunghiu dreptunghic ($A = 90^0$) în care se cunoaşte:

$$b + c - a = 1 \quad ; \quad \operatorname{tg} B - \operatorname{tg} C = 2\,(\sqrt{3} - \sqrt{2}).$$

(Ambele chestiuni obligatorii).

Trigonometrie. I. Să se arate că dacă între elementele unui triunghiu avem relaţia:

$$(1) \qquad b\left(1 + \operatorname{cotg} \frac{B}{2}\right) = c\left(1 + \operatorname{cotg} \frac{C}{2}\right)$$

triunghiul este isoscel sau dreptunghic şi reciproc: să se arate că între elementele unui triunghiu dreptunghic avem relaţia (1).

II. Între elementele unui triunghiu avem relaţiile:

$$\hat{A} = 2\hat{B} + \hat{C} \quad ; \quad a = 2b - c.$$

Să se afle unghiurile triunghiurilor ce se bucură de această proprietate cu o eroare $< 1''$. (Pentru simplificare, se pot exprima în prealabil unghiurile cu ajutorul lui $\frac{B}{2} = \omega$).

(Ambele chestiuni obligatorii)

Cosmografie. Chestiunea I. Proecţiune stereografică.

a) Proprietăţi

b) Proecţiunea pe ecuator

c) Proecţiunea pe meridian.

Chestiunea II. Longitudinea şi latitudinea.

a) Definiţiune din care să rezulte deosebirea dintre longitudinea şi latitudinea geografică faţă de cea astronomică.

b) Determinarea lor.

Timpul acordat: 3 ore.

ŞCOALA PREGĂTITOARE DE OFIŢERI DE MARINĂ

Trigonometrie. Chestiuni pentru candidatul Şc. Navale.

I. Se dă patrulaterul OACB în care se cunoaşte:

$$OA = OB = D \; ; \; AC = d_1 \; ; \; BC = d_2 \; ; \; \sphericalangle \; ACB = \alpha$$

şi se cere să se calculeze diagonala OC şi unghiul OCB.

Această problemă ar avea următoarea aplicaţie în marină :

Din portul C, un bastiment de viteză V ar fi obligat să plece pe o noapte întunecoasă, cu un scop oarecare, în larg, ca să ajungă în punctul O. In A şi B ar fi două faruri de coastă, cari văzute şi din O permit verificarea ajungerii sau nu a bastimentului în acest punct. In ce ar consta această verificare şi cum s'ar face ea ?

II. Să se calculeze valoarea numerică a expresiunii :

$$E = \left(1 + \operatorname{tg} \sum_{1}^{p} \theta^0 m''\right)\left(1 - \cos \sum_{1}^{p} (\theta^0 m' + m^0\theta')\right)$$

ştiind că :

$$(\theta_1 , m_1) ; (\theta_2 , m_2) ; \ldots (\theta_p , m_p)$$

sunt toate perechile de soluţiuni ale ecuaţiei :

$$(\cos\theta + i \sin\theta)^m - 0{,}5\, i = \sqrt{0{,}75} \qquad (i = \sqrt{-1})$$

în care m este un număr întreg şi pozitiv iar θ un unghiu ascuţit.

ANUL PREPARATOR AL ŞCOALEI POLITEHNICE

Algebra Superioară. I. 1. Să se studieze natura seriei

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{(an^2x + bny + c)^2}{n!}$$

şi să i se calculeze suma în caz de convergenţă.

2. Presupunând că x şi y sunt coordonatele unui punct din plan, să se scrie ecuaţia locului geometric al acestui punct, aşa fel ca suma seriei date să fie egală cu ke, k fiind un număr dat.

3. Locul geometric fiind o curbă de gradul al doilea, să se determine valoarea lui k aşa fel ca locul să se descompună în două drepte, ale căror ecuaţii să se determine de asemeni.

II. Să se determine parametrul λ aşa fel ca între cele patru rădăcini ale ecuaţiei

$$x^4 - 8x^3 - 18x^2 + \lambda x - 175 = 0$$

să existe relaţia

$$x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2.$$

Să se rezolve apoi complect ecuaţia dată.

Geometrie analitică. I. Se consideră astroida având ca ecuaţiune, faţă de un sistem de axe ortogonale.

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = (2a)^{\frac{2}{3}}.$$

Fie punctele A $(a, 0)$ şi B $(-a, 0)$ şi o dreaptă variabilă Δ, trecând prin centrul astroidei. care taie astroida în punctele reale M şi N. Dreptele MA şi NB determină punctul P.

1°. Să se găsească ecuaţiunea carteziană raţională a locului lui P.

2°. Să se arate analitic că curba loc (P) are o axă de simetrie, o direcţiune reală de puncte la infinit, şi trece prin puncte cunoscute importante.

3°. Să se determine ecuaţiunile tangentelor în punctele particulare arătate în răspuns la 2°. Concluziuni.

(Calcul ordonat).

II. Se consideră curba (Γ), care este dată, faţă cu un sistem de axe triplu-ortogonal OXYZ, prin ecuaţiunile

$$(\Gamma)\begin{cases} x^3 + y^3 - 3(x - y)z = 0 \\ z = x + y. \end{cases}$$

1°. Să se găsească un nou sistem de axe triplu-ortogonal, cu aceiaşi origine, astfel ca (Γ) să fie aşezată în unul din nouile plane de coordonate, şi să se construiască curba (Γ) în acest caz.

2°. Să se găsească suprafaţa de rotaţie (Σ), innăscută din rotirea curbei (Γ) în jurul dreptei:

$$\Delta\begin{cases} z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$ (vechiul sistem OXYZ).

3°. Să se găsească secţiunile făcute în suprafaţa (Σ) prin vechile plane de coordonate. Să se explice rezultatul.

BIBLIOGRAFIE

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. XL. No. 1. Ianuarie 1934, New-York. Adunarea din Pasadena, de T. M. PUTNAM. Adunarea din Cincinnati, de M. H. INGRAHAM. BIRKHOFF despre măsura estetică, de C. A. GARABEDIAN. Colecţiunile lui PAPPUS de D. E. SMITH. BANACH despre operaţiunile lineare, de J. D. TAMARKIN. SAKS, despre integrare, de J. D. TAMARKIN. Sumare de memorii.

Mathesis. Tomul XLVIII. No. 1—2. Ianuarie — Fevruarie 1934. Asupra suprafeţelor strâmbe, de CL. SERVAIS. Asupra foliului lui DESCARTES de R. GOORMAGHTIGH. Exerciţii de geometrie vectorială, de R. GODEAU. Asupra punctelor lui LEMOINE ale triunghiurilor de aceeaşi bază, de H. LORENT. Exerciţii asupra coordonatelor ternare, de AD. M. Asupra extensiunii teoremelor lui LINDELOF şi POINCARÉ la unele ecuaţii cu derivate parţiale, de R. J. H. GERMAY. In chestiunea unei încercări de istoria sistemului sexagezimal, de

M. F. THUREAU-DANGIN, de J. PELSENEER. Asupra fascicolelor conjugate, de J. DIEUDONNÉ. Cercetări asupra existenței integralelor aproximative superioare și inferioare ecuații diferențiale $y' = f(x, y)$.

Bulletin de la Section Scientifique de l'*Académie Roumaine*. XVI-ème année. No. 6—7. București 1934. Sur une extenssion d'un théorème, de H. HURWITZ, par TH. ANGHELUTZA.

Journal de Mathématiques Élémentaires. Publié par H. VUIBERT. Anul 58. No. 11. Martie 1934. Paris.

Idem. No. 12 Martie 1934. Observațiuni asupra secțiunilor plane ale conului de rotație, de M. d'OCAGNE.

Sphinx. Anul IV. No. 3. Martie 1934. Bruxelles.

Idem. No. 4. Aprilie 1934. REGELE ALBERT I nu mai este ... (necrolog). Unde a ajuns astrologia? de MOREUX, Matematicianul și calculul numeric, de W. LOREY.

Boletin Matematico. Anul II. No. 2. Februarie 1934. Buenos Aires.

Revista Matematică din Timișoara. Anul XIV. No. 1. Martie 1934. Timișoara. Scurtă expunere asupra lucrărilor D-lui Ing. L. LABOCCETTA din domeniul funcțiunilor simplu descontinue, de V. ALACI.

Buletinul Societății Politehnice. Anul XLVIII. No. 1. Ianuarie 1934. București.

Idem. No, 2. Februarie 1934. București. Asupra calculului poziției punctului limită la grinzi cu zăbrele, de N. N. TOMESCU.

Statutele Asociației Inginerilor C. F. R. (Supliment la Buletinul de mai jos).

Buletinul Asociației Inginerilor C. F. R. Anul I. No. 1. Ianuarie — Fabruarie. București 1934.

Ad. Mineur. *Géométrie analitique plane. II. Les coniques: Théorie générale.* Bruxelles.

Acest volum este continuarea părții I despre care am vorbit în numărul trecut. Cap. III se ocupă cu conicele și cu coordonatele punctuale. Cap. IV cu conicele considerate ca suporturi de puncte și de tangente. Cap. V cu poluri și polare. Volumul se termină cu diverse note asupra invarianților, coordonatelor ternale, fascicole de conice, etc. Volumul conține 116 pagini.

Aprecierele pe care le-am făcut volumului precedent se menţin şi acestei continuări.

I. I.

R. J. H. GERMAI. *Application de la méthode des résidus à la généralisation de la formule de* LAGRANGE. (Supliment la *Mathesis*). Louvain 1934.

R. N. RACLIS. *Notiţă de titluri, lucrări ştiinţifice, lucrări didactice.* 31 Decemvrie 1934. Bucureşti.

GABRIEL SUDAN. *Curs de Algebră superioară şi Teoria numerelor.* Litografiat sub îngrijirea D-lui GH. TH. GHEORGHIU. Editura Facultăţii de Ştiinţe din Bucureşti 1932 — 1933.

M. GHERMĂNESCU. *Memoriu de titluri şi lucrări.* Ianuarie 1934. Bucureşti.

M. GHERMANESCO. *Sur un théorème de M. de La Vallée Poussin.* (Extras din *Bulletin de la Classe des Sciences,* de l'Académie royale de Belgique). Bruxelles.

M. GHERMANESCO. Sur l'equation $\Delta^n u = 0$. (Extras din *Mathématica*). Cluj.

SABA S. ŞTEFĂNESCU. *Théorie du plan conducteur pour l'émetteur alternatif de longueur finie.* (Extras din *Beiträge zur angewandten Geophysik*). Berlin.

ERNEST ABASON. *Elemente de mecanică,* cu o prefaţă de D. POMPEIU. Bucureşti 1933.

Acest tratat conţine 328 pag., format 165×110 partea tipărită, şi 328 figuri, conţinând chestiuni de *mecanică tecnică elementară.* După cum ne spune autorul în introducere, el este scris pentru şcolile profesionale ale Căilor Ferate şi coprinde următoarele Părţi şi Capitole.

După o *Prefaţă* scrisă de D-l D. POMPEIU, urmează o *Introducere,* iar restul este împărţit în patru părţi.

Partea I: Cap. I. Generalităţi. Cap. II. Unităţi de măsură. Cap. III. Traectorie. Timp.

Partea II. Noţiuni de cinematică: Cap. I. Mişcarea uniformă. Cap. II. Mişcarea uniform variată. Cap. III. Mişcarea circulară uniformă. Cap. IV. Transformări de mişcări. Mecanisme.

Partea III. Noţiuni de statică: Cap. I. Forţe concurente. Cap. II. Acţiune şi reacţiune. Cap. III. Forţe paralele. Cap. IV. Despre masă. Centre de greutate.

Cap. V. Momente. Cap. VI. Pârghii. Cap. VII. Stabilitatea corpurilor. Cap. VIII. Presiunea lichidelor pe pereții vaselor. Cap. IX. Despre echilibru corpurilor în general (noțiuni sumare).

Partea IV. Noțiuni de dinamică și elasticitate. Cap. I. Inerție. Principiul inerției. Cap. II. Lucru mecanic. Puterea mecanică. Grad de folosință. Principiul conservării energiei mecanice. Cap. III. Despre frecări. Rezistența aerului. Cap. IV. Noțiuni de elasticitate (tracțiune și compresiune, flambaj, forfecare, încovoiere, răsucire, rezistențe combinate).

La finele volumului se găsește un „Tablou de unități de măsură", unul cu caracteristice la câteva materiale, unul cu rezistențe admisibile și altele cu elemente pentru calculul unor fiare profilate ca de exemplu corniere, fiare U, fiare I. Volumul se încheie cu o *«Lectură asupra vieții oamenilor de știință»* despre care s'a vorbit prin tratat.

După fiecare Capitol se dă un rezumat al definițiunilor, regulilor și teoremelor tratate într'însul și apoi exerciții, cu indicarea soluțiunilor și rezultatele, asupra materiilor respectiv tratate. Numărul total al acestor exerciții, cu cele recapitulative dela urmă este de 311.

Expunerea este făcută clar, fără rigoarea matematică, avându-se în vedere cititorii la care se adresează tratatul. Astfel, lipsesc demonstrațiuni, ele fiind înlocuite cu oarecare justificări sau referințe la experiențe. S'a eliminat cu totul întrebuințarea trigonometriei, înlocuindu-se rezolvarea chestiunilor care ar fi necesitat-o cu soluționări grafice. S'a căutat de asemenea să se înlăture cu totul întrebuințarea algebrei, însă nu s'a reușit peste tot, căci întâlnim calcule și transformări literare la stabilirea formulelor sau la tragerea consecințelor dintr'însele. Executarea tipografică a formulelor lasă uneori de dorit.

Ca nomenclatură, autorul a urmat în parte Vocabularul întocmit de Societatea Română de Științe, Secțiunea Matematică; multe cuvinte sunt luate însă din uzul comun. Sunt însă cuvinte care nu corespund bine ideilor la care se referă; astfel *îngenuchere* (pag. 315) în loc de flambaj nu este nemerit, căci îngenucherea presupune un genuchiu, o articulațiune, care nu există în piesele flambate; flambajul este o încovoiere, după care ar fi fost mai bine să se facă studiul lui. Cuvântul *șoc* (pag. 326), cam șochiază! Se confundă des *iuțeala medie,* cu cea *comercială,* (pag. 49, 56, 60), când se ține seama și de opriri. Ar trebui apoi făcută o deosebire mai bună între *direcția* unei forțe și *linia ei de acțiune.* Expresiunea de *fer turnat* (pag. 147, 384, 385), nu este bună, căci ferul nu se poate turna pentru obținerea de piese.

Figurile sunt în număr îndestulător și în general clar executate. In afară de figurile geometrice, sunt și ilustrațiuni făcute de pictorul AUREL JIQUIDI. Sunt însă la câteva unele erori. Astfel la Fig. 47 s'a înegrit *bara de acuplare* în locul *bielei;* la fig. 49 cuplele trebuesc intervetite; la Fig. 104 forțele Q și R au alte poziționi; Fig. 121 nu este clară; Fig. 279 și 281 nu au forțe F și înspre stânga; la Fig. 328 este o eroare de desemn, etc.

Unele difinițiuni nu sunt complete; astfel elasticitatea nu este caracterizată prin definiția: *«Proprietatea corpurilor de a se deforma sub acțiunea forțelor și cuplelor».*[5](pag. 18), căci această definițiune nu exclude *plasticitatea.*

La unele aplicaţiuni sunt oarecare scăpări din vedere; aşa la problema dela pagina 56 nu s'a ţinut seama că linia ferată Ploieşti-Câmpina este dublă; la aplicaţia dela pagina 350, momentul rezistent al unui stâlp de beton armat nu este $bh^2/6$. Exemplul 1 dela pag. 11 nu e bine ales căci mâinele nu pot da două forţe alcătuind numai un cuplu ci şi o presiune pe axă. Această presiune există şi la figura 22 ca efect al forţei F' despre care se afirmă că nu are nici un efect. La figura 25 nu se ţine seama de înclinarea mâinei. La studiul frecării (pag. 267) legea III nu este consecinţă a legii I.

Se vorbeşte deseori de *efectul* unor agenţi mecanici fără a se arăta care este acel efect şi cum se apreciază mărimea lui exactă, sau relativă. Astfel la pag. 9 se spune că: *«Forţele se pot compara între ele, după efectele care le produc»*; la pag. 12 găsim: *«Cuplele, ca şi forţele, se pot compara între ele după efectele care le produc»*; iar mai departe *«cu cât forţele* F *care compun un cuplu sunt mai mari, cu atât efectul cuplului este mai mare»*; la pag. 15 găsim: *«efectul unui cuplu e determinat de valoarea momentului şi de sensul cuplului»*; la pag. 166 găsim *«efectul unei forţe asupra unei pârghii este cu atât mai mare cu cât intensitatea forţei este mai mare şi cu cât distanţa dela punctul sau axul fix la direcţia forţei este mai mare»*; la pag. 205 se spune că efectul a trei forţe concurente este acelaş cu al rezultantei lor.

Noţiune de *scară,* pentru altfel de mărimi decât lungimi, necesită o explicaţiune detailată.

In biografiile savanţilor dela finele cărţii sunt unele scăpări din vedere. Astfel (pag. 393) EULER a fost chemat prima dată la Petersburg, apoi la Berlin şi după aceea s'a reintors la Petersburg.

Privită în general lucrarea nu se prezintă cu o ideie unitară călăuzitoare, fapt care probabil se datoreşte necesităţii de a face un singur manual de mecanică pentru tot felul de şcoli profesionale ale Căilor Ferate: şcoli de ucenici şi maeştri de ateliere; şcoli de mecanici; şcoli de picheri; şcoli de impiegaţi de mişcare; etc. Autorul a căutat apoi să facă cartea utilizabilă şi pentru alte şcoli medii, ca şcolile de meserii, de conductori, de aviaţie, etc. Pare apoi că la aceasta a contribuit şi teama de a nu fi riguros în unele locuri şi inconplet într'altele. S'a depăşit astfel limitele care s'ar cere unor tratate elementare pentru anumite şcoli. In unele părţi, chestiunile se scobor până la unităţile de măsură pentru lungimi, suprafeţe şi volume, care trebuiesc cunoscute din clasele primare, sau la definiţia unghiului (pag. 21) ca deschiderea dintre două drepte, pe când în alte părţi (pag. 31) se vorbeşte de unghiuri mai mari decât 360°, de măsura unghiurilor în *radiani* şi *grade centezimale,* de măsurile mecanice *dină, erg, poncelet,* care se pot lăsa la o parte în cursurile elementare, ca şi întrebuinţarea literelor greceşti. In schimb, nu strica dacă se reaminteau unele teoreme din geometrie ca a lui PITAGORA, de care se face deseori uz la aplicaţiuni şi exerciţii.

Noţiunilor delicate de *forţă* şi *masă* li s'au dat oarecare desvoltare dar nu mi se pare că vor fi pricepute de începători în mecanica tehnică. La definiţia *kilogramului-forţă* nu s'a spus că atracţiunea trebue considerată în vid

la Paris ; altfel unitatea rămâne variabilă cu latitudinea şi altitudinea ; ea poate fi nulă chiar, dacă am considera punctul de pe linia pământ-lună unde atracţiunile se egalează. Cântărirea cu balanţa sau cu dinamometru nu dă acelaş rezultat pe toată suprafaţa pământului. Noţiunea de *cantitate de materie* este vagă, sau, după cum zice MACH nefericită şi neclară. Denumirile de *greutate relativă* dată masei (pag. 143, 152, 383), precum şi cea de *greutate absolută* dată densităţii (pag. 383), dau loc la confuziuni. Părerea mea e că la un curs elementar trebue pornit dela greutate, pe care o ştie toată lumea, trecut apoi la forţe în general şi apoi la masă cu ocazia căderei corpurilor în vid.

Chestiunile mai delicate, şi mai greu de priceput se puteau trata în *Note* sau *Apendice* la finele volumului. Altfel este greu pentru profesorii diferitelor şcoli ca să aleagă uşor chestiunile ce ar conveni elevilor lor. In cartea D-lui ABASON se pot găsi chestiuni utile pentru asemenea şcoli însă cel ce vrea să facă alegerea trebue să citească întâi tot volumul şi să-şi facă un program de chestiunile pe care să le expună elevilor şi de ordinea în care să le predea. Astfel un lucrător de atelier nu are nevoie de diagramele iuţelilor, iar un impiegat de mişcare nu are nevoie de formulele pentru flambaj. Consultarea cursurilor care s'au făcut prin asemenea şcoli profesionale pot uşura facerea unor asemenea programe. Aceasta până ce mijloacele ar permite ca fiecare şcoală specială să-şi aibă mecanica ei proprie, sau cum se zice *catechismul* ei pentru mecanică. Până atunci, manualul D-lui E. ABASON poate servi la culegerea de chestiuni pentru diferite specialităţi.

I. I.

CERERI

236. Aş dori să ştiu dacă se primesc în rubrica intitulată *«Exerciţii»* şi chestiuni uşoare de geometrie.

VIORICA VOGT
Studentă Matematici.

Răspuns. In această rubrică se pot pune chestiuni uşoare din toate ramurile matematicelor, de preferinţă chestiuni elementare, cu condiţia ca ele să fie originale, iar nu luate de prin cărţi sau reviste.

I. I.

DIVERSE

Societatea Română de Ştiinţe, Secţia Matematică, a ţinut şedinţă în seara zilei de 5 Martie în care D-l ŢIŢEICA a vorbit despre Topologia elementară şi D-l D. BARBILIAN despre o introducere la geometria triunghiurilor.

In seara zilei de 19 Martie D-l L. TEODORIU a făcut un referat de mecanică, D-l N. CIORĂNESCU a tratat o proprietate generală a curbelor simple închise, iar D-l C. DRÂMBĂ a vorbit despre ecuaţiile transportului prin paralelism, relativ la o clasă de suprafeţe.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1333. *Pe o bară în un plan vertical, este fixată o nivelă curbată după un cerc. Dacă bara se mişcă în jurul unui punct fix, să se găsească:*

1. *Locul geometric al bulei redusă la un punct.*
2. *Forma nivelei pentru ca locul să fie o verticală.*

COL. G. I. POPESCU.

1. Fie F punctul fix al barei, C centrul cercului după care e construită nivela, M mijlocul şi A, B extremităţile nivelei. In fine N punctul în care tangenta la nivelă este orizontală sau ceeace este tot una *bula redusă la un punct* la un moment dat. Fie încă FF' poziţia verticală a lui FM. Se duce din N paralela NN' la FC. Figura FN'NC este un paralelogram cu laturile constante, deci N' este fix şi locul lui N este un cerc cu centrul în N' şi cu raza FC.

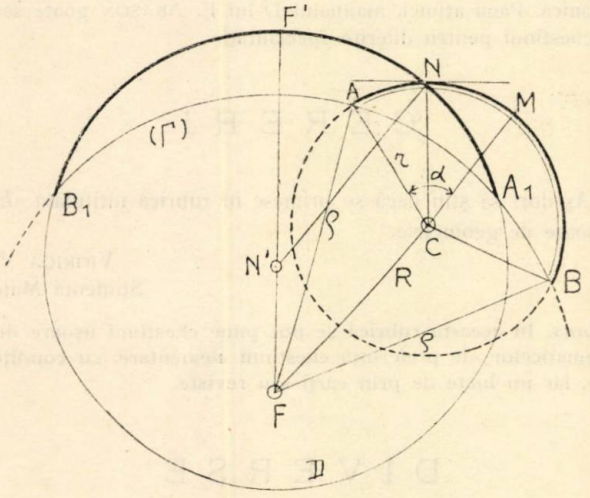


Fig. 1

2. Fie C curba căutată a nivelei, O punctul fix al tijei (fig. 2), Δ verticala dată şi M un punct pe C. Rotim nivela de un unghiu α astfel ca M să vină în M' pe Δ şi C în C'. Se notează cu P proecţia lui O pe Δ şi cu *m* proecţia lui O pe normala în M la C. Deoarece, după enunţ, tangenta în M' la C' este orizontală, înseamnă

că Δ este normala în M' la C' după cum Mm este normala în M la C. Triunghiurile dreptunghice M'PO şi MmO sunt egale ca având ipotenuzele OM', OM şi unghiurile ascuţite M'OP şi MOm egale. Deci:

$$Om = OP = C^t.$$

Şi atunci curba C se bucură de proprietatea că normala Mm în un punct M al ei este tangentă la un cerc fix O (OP), deci C *este desfăşurata cercului.*

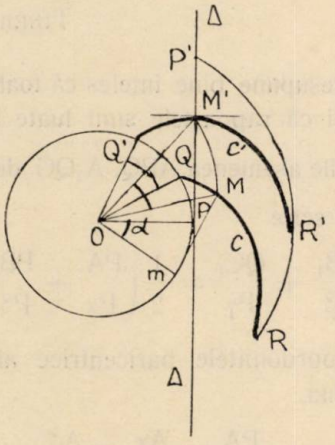


Fig. 2

Notă. 1°. S'a primit o singură soluţie necomplectă având numai răspuns la 1) fără a căuta să stabilească care parte anume din cercul N' face parte din loc. Iată cum se stabileşte aceasta:

Nivela AMB (fig. 1) şi bara FM fiind rigid legate, unghiul ACM şi razele FC, CA sunt constante. Deci FA este constantă şi dată de relaţia

$$\overline{FA}^2 = FC^2 + \overline{CA}^2 - 2\,FC \cdot CA \cos FCA$$

aşa că A, şi deci şi B, descriu un cerc (Γ) cu centrul în F şi raza FA. Acest cerc taie cercul N' în B_1 şi A_1. Când nivela ajunge cu A în A_1 sau cu B în B_1 bula este în A sau B. Dacă nivela este rotită ori cât de puţin de la A_1 spre D sau dela B_1 spre D, ea nu mai funcţionează din cauza răsturnării curburei. Deci numai arcul $B_1F'A_1$ face parte din locul cerut la 1).

2°. Punctul 2) este redijat după soluţia propunătorului problemei.

Şi în acest caz se poate observa că nu toată dreapta Δ face parte din loc. Dacă QMR este arcul nivelei şi dacă cercul O (OR) taie pe Δ în P', atunci numai PP' face parte din loc, pentru că dela P' la $+\infty$ dreapta Δ nu este întâlnită de puncte materiale ale nivelei iar dela P la $-\infty$ nivela se prezintă cu curbura răsturnată sau nu are cu Δ intersecţii de puncte materiale.

COL. GH. B.

PROBLEMA 3655. *Fie* ABC *un triunghiu oarecare,* G *centrul său de greutate şi* P *un punct arbitrar din planul triunghiului. Se ia pe prelungirea dreptei* PG *un punct* Q *aşa ca:* $2GQ = GP$. *Fie* α, β, γ, *punctele unde transversalele unghiulare* AP, BP, CP *întâlnesc laturile* BC, CA, *şi* A_1, B_1, C_1 *mijloacele laturilor.*

Să se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{QA_1}{P\alpha} + \frac{QB_1}{P\beta} + \frac{QC_1}{P\gamma} \geqslant 3.$$

TIBERIU POPOVICIU.

Soluţia. Se presupune bine înţeles că toate segmentele reprezintă lungimi şi deci că rapoartele sunt luate în valoare absolută.

Din triunghiurile asemenea APQ, A_1QG deducem $QA_1 = \frac{1}{2} PA$, ... etc. Putem dar scrie

$$\frac{QA_1}{P\alpha} + \frac{QB_1}{P\beta} + \frac{QC_1}{P\gamma} = \frac{1}{2}\left(\frac{PA}{P\alpha} + \frac{PB}{P\beta} + \frac{PC}{P\gamma}\right).$$

Fie m, n, l, coordonatele baricentrice ale punctului P. Din relaţia lui VAN AUBEL

$$\frac{PA}{P\alpha} = \frac{A\gamma}{B\gamma} + \frac{A\beta}{C\beta}$$

care este adevărată *ţinând seamă de semn,* scoatem

$$\frac{PA}{P\alpha} = \left|\frac{n+l}{m}\right| \text{ ... etc.}$$

Avem prin urmare

$$\frac{PA}{P\alpha} + \frac{PB}{P\beta} + \frac{PC}{P\gamma} = \left|\frac{n+l}{m}\right| + \left|\frac{l+m}{n}\right| + \left|\frac{m+n}{l}\right| = E.$$

Pentru un punct *interior,* m, n, l sunt pozitive, deci

$$E = \frac{n+l}{m} + \frac{l+m}{n} + \frac{m+n}{l} = \left(\frac{n}{m} + \frac{m}{n}\right) + \left(\frac{l}{n} + \frac{n}{l}\right) + \left(\frac{m}{l} + \frac{l}{m}\right) \geqslant 6$$

egalitatea fiind adevărată când $m = n = l$. Relaţia din enunţ este deci demonstrată pentru orice punct *interior.* Avem egalitate când P se confundă cu G.

Au rezolvat problema presupunând, fără să o spună, că P este în interiorul triunghiului D-nii: Gh. Th. Gheorghiu (Bacalaureat) şi P. I. Ghişoiu (elev cl. VI R.).

Relaţia dată poate să nu fie adevărată când P este în exteriorul triunghiului. In acest caz coordonatele lui P sunt de semne diferite şi se poate presupune că una e negativă şi două pozitive. Pentru fixarea ideiilor vom presupune că n, l sunt pozitive şi $m = -m'$ este negativă, şi $n \geqslant l$.

Avem după cele trei cazuri posibile

$$E = \frac{n+l}{m'} + \frac{l-m'}{n} + \frac{n-m'}{l} \geqslant \frac{n+l}{m'} \geqslant 2, \text{ dacă } n \geqslant l \geqslant m'$$

$$E = \frac{n+l}{m'} + \frac{m'-l}{n} + \frac{n-m'}{l} = 2 + \frac{(n+l-m')(n-m')}{m'n} + \frac{n-m'}{l} \geqslant 2,$$

dacă $n \geqslant m' \geqslant l$

$$E = \frac{n+l}{m'} + \frac{m'-l}{n} + \frac{m'-n}{l} = 2 + \frac{(n+l)(m'-n)(m'-l)}{m'nl} \geqslant 2,$$

dacă $m' \geqslant n \geqslant l$

egalitatea neputând avea loc decât dacă $m' = n$.

Rezumând putem spune că suma dată în enunţ are, în interiorul triunghiului un minimum relativ egale cu 3 şi care este atins atunci când P este centrul de greutate. Această sumă are minimul absolut egal cu 1 care este atins pentru punctele situate *pe prelungirile laturilor triunghiului anticomplimentar.* Pentru *orice* P avem

$$\frac{QA_1}{P\alpha} + \frac{QB_1}{P\beta} + \frac{QC_1}{P\gamma} \geqslant 1.$$

T. P.

PROBLEMA 3914. *Fie triunghiul* ABC *şi punctul* O *din planul său. Paralela din* O *la* BC *taie pe* AB *şi* AC *respectiv în* C_b *şi* B_c; *fie* A_c *şi* C_a, B_a *şi* A_b *punctele analoage.*

Considerăm intersecţiile:

$M_1 \equiv (B_c C_a, B_a C_b)$; $N_1 \equiv (C_a A_b, C_b A_c)$; $P_1 \equiv (A_b B_c, A_c B_a)$

$M_2 \equiv (A_b B_c, C_b A_c)$; $N_2 \equiv (B_c C_a, A_c B_a)$; $P_2 \equiv (C_a A_b, B_a C_b)$.

Să se demonstreze că:

1°. *Dreptele* AM_1, BN_1, CP_1 *sunt concurente;*

2°. *Dreptele* AM_2, BN_2, CP_2 *sunt deasemenea concurente.*

Cezar Coşniţă.

Soluțiune dată de Domnii: S.-Lt. I. Gh. Zamfirescu, N. N. Mihăileanu.

Fie A' piciorul cevienei AO pe BC; iar A_1 și A_2 picioarele cevienei AM_1 pe $C_b B_c$ și BC; fie B', B_1, B_2 și C', C_1, C_2 punctele analoage. Fascicolul de drepte (AB, AM_1, AC) determină pe dreptele paralele $C_b B_c$ și BC segmente respectiv proporționale, și avem:

$$\frac{\overline{A_2B}}{\overline{A_2C}} = \frac{\overline{A_1C_b}}{\overline{A_1B_c}} \cdot \tag{1}$$

In triunghiul $C_b AB_c$ aplicând teorema lui Ceva și a transversalei paralelă cu o latură a triunghiului, avem:

$$\frac{\overline{A_1C_b}}{\overline{A_1B_c}} \cdot \frac{\overline{B_aB_c}}{\overline{B_aA}} \cdot \frac{\overline{C_aA}}{\overline{C_aC_b}} = -1; \tag{2}$$

$$\frac{\overline{B_aB_c}}{\overline{B_aA}} = \frac{\overline{OB_c}}{\overline{OC_b}}; \quad \frac{\overline{C_aA}}{\overline{C_aC_b}} = \frac{\overline{OB_c}}{\overline{OC_b}} \tag{3}$$

la care alăturând relațiunea analoagă cu (1) și obținută pe aceiași cale:

$$\frac{\overline{OB_c}}{\overline{OC_b}} = \frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}} \tag{4}$$

deducem:

$$\frac{\overline{A_1C_b}}{\overline{A_1B_c}} \cdot \left(\frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}}\right)^2 = -1$$

sau încă:

$$\frac{\overline{A_2B}}{\overline{A_2C}} = -\left(\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}\right)^2 \cdot \tag{5}$$

Scriind relațiile analoage și înmulțindu-le obținem

$$\frac{\overline{A_2B}}{\overline{A_2C}} \cdot \frac{\overline{B_2C}}{\overline{B_2A}} \cdot \frac{\overline{C_2A}}{\overline{C_2B}} = -\left(\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}\right)^2. \tag{6}$$

Dar dreptele AA', BB', CC' fiind concurente în O, produsul din paranteză are după teorema lui Ceva valoarea (— 1), deci:

$$\frac{\overline{A_2B}}{\overline{A_2C}} \cdot \frac{\overline{B_2C}}{\overline{B_2A}} \cdot \frac{\overline{C_2A}}{\overline{C_2B}} = -1 \tag{8}$$

adică dreptele AM_1, BN_1, CP_1, comform reciprocii teoremii lui Ceva, *sunt concurente.*

2°. Fie $C'_a \equiv (AB, B_cM_2)$; $B'_a \equiv (AC, C_bM_2)$; $A'_1 \equiv (C_bB_c, AM_2)$, $A'_2 \equiv (BC, AM_2)$, analoagele lor obținându-se prin permutări circulare. Fascicolul A (B, M_2, C) determină pe paralelele C_bB_c, BC segmente respectiv proporționale și avem:

$$\frac{\overline{A'_2B}}{\overline{A'_2C}} = \frac{\overline{A'_1C_b}}{\overline{A'_1B_c}}. \tag{9}$$

De altă parte, aplicând teorema lui CEVA în triunghiul AC_bB_c, relativ la punctul M_2, avem:

$$\frac{\overline{A'_1C_b}}{\overline{A'_1B_c}} \cdot \frac{\overline{B'_aB_c}}{\overline{B'_aA}} \cdot \frac{\overline{C'_aA}}{\overline{C'_aC_b}} = -1. \tag{10}$$

Considerând acum fascicolele B_c (A, C_b, M_2); C (A, O, B) și dreptele paralele A_bB_a și BA, avem relațiunile:

$$\frac{\overline{C'_aA}}{\overline{C'_aC_b}} = \frac{\overline{A_bB_a}}{\overline{A_bO}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BC'}}. \tag{11}$$

Analog fascicolele C_b (A, B_c, M_2); B (A, O, C) și paralelele A_cC_a și CA dau relațiunile:

$$\frac{\overline{B'_aB_c}}{\overline{B'_aA}} = \frac{\overline{A_cO}}{\overline{A_cC_a}} = \frac{\overline{CB'}}{\overline{CA}}. \tag{12}$$

Ținând seamă de relațiunile (11), (12) și (9) relațiunea (10) devine succesiv:

$$\frac{\overline{A'_1C_b}}{\overline{A'_1B_c}} = -\frac{\overline{CA}}{\overline{CB'}} \cdot \frac{\overline{BC'}}{\overline{BA}},$$

apoi

$$\frac{\overline{A'_2B}}{\overline{A'_2C}} = -\frac{\overline{CA}}{\overline{BA}} \cdot \frac{\overline{BC'}}{\overline{CB'}}. \tag{13}$$

In mod analog avem relațiunile corespunzătoare punctelor B'_2, C'_2. Inmulțind aceste trei relațiuni între ele, obținem:

$$\frac{\overline{A'_2B}}{\overline{A'_2C}} \cdot \frac{\overline{B'_2C}}{\overline{B'_2A}} \cdot \frac{\overline{C'_2A}}{\overline{C'_2B}} = -1, \tag{14}$$

deoarece A', B', C' sunt picioarele cevienelor AO, BO, CO. Relațiunea (14) arată, comform reciprocii teoremei lui CEVA, că dreptele AM_2, BN_2, CP_2 *sunt deasemenea concurente.*

Observarea I-a. Domnul S.-Lt. I. Gh. Zamfirescu arată că *triunghiul format de dreptele* $B_a C_a$, $C_b A_b$, $A_c B_c$ *este omologic cu triunghiul* ABC. Considerând dreptele de mai sus ca transversale în triunghiul ABC şi folosind proprietăţile paralelelor duse prin O în triunghiul ABC, arată că laturile corespunzătoare ale celor două triunghiuri se întâlnesc în trei puncte colineare.

Observarea II-a. Domnul Ion C. Vasiliu examinând cu ajutorul coordonatelor trilineare problema în general ajunge la concluzia că *proprietatea dată subzistă în cazul când dreptele duse prin* O, *în loc să fie paralele, taie laturile triunghiului în trei puncte colineare.*

Aşteptăm dela corespondenţii noştri o soluţiune elementară a acestei proprietăţi generalizate.

O. N. Ţ.

PROBLEMA 3922. *Care sunt pătratele de forma* abccca?

V. C. Popescu.

Soluţie. In *Gazeta Matematică* vol. XXXIII pag. 138, este dat un tablou cu ultimele trei cifre cu care se poate termina un pătrat perfect. Din acest tablou alegem pe acelea de forma *cca* şi formăm următoarele numere în condiţiunile enunţului

1*b*0001	4*b*2224	5*b*2225	6*b*7776
1*b*4441	4*b*4444	6*b*1116	6*b*9996
1*b*8881	4*b*6664	6*b*3336	9*b*0009
4*b*0004	4*b*8884	6*b*5556	9*b*4449

9*b*8889.

Căutând într'o tabelă de pătrate perfecte (Manualul Hütte s. ex.) care din aceste numere sunt pătrate perfecte găsim că numai numerele

$$128881 = 359^2$$

$$695556 = 834^2$$

sunt soluţiile problemei.

Observaţie. La această problemă atât de elementară s'a primit o singură soluţie dela Domnul Iuliu Deac (Turda) care găseşte ambele soluţiuni. D-sa porneşte însă dela ultima cifră cu care se poate termina un pătrat perfect şi găseşte soluţiunile prin încercarea a 50 numere diferite.

I. S. A.

PROBLEMA 4119. *Să se rezolve cu ajutorul tablelor trigonometrice naturale ecuația*

$$4x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0.$$

ION S. ANTONIU.

Soluție dată de Domnii: S.-LT. ION C. PARAPEANU și DIMITRIE D. MAVRODIN (elev cl. 7 Liceul M. Eminescu).

Ecuația dată se mai poate scrie

$$(4x^4 - 1) + x(2x^2 - 1) = 0$$

sau

$$(2x^2 - 1)(2x^2 + x + 1) = 0$$

de unde

$$2x^2 - 1 = 0$$

și

$$2x^2 + x + 1 = 0.$$

Prima ecuație dă imediat

$$x_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

A doua ecuație o rezolvim cu ajutorul trigonometriei, după cum a fost arătat în G. M. vol. 38 pag. 463.

In cazul de față avem

$$B^2 - 4AC = -7 < 0.$$

Ecuațiunea are 2 rădăcini imaginare date de formula

$$x_{3,4} = -\frac{B}{2A}(1 \mp i \operatorname{tg}\varphi)$$

în care

$$i = \sqrt{-1}$$

și unghiul φ e dat de relația

$$\sec^2\varphi = \frac{4AC}{B^2}.$$

Avem

$$\sec^2\varphi = 8$$

$$\therefore \quad \operatorname{tg}\varphi = \pm\sqrt{\sec^2\varphi - 1} = \mp\sqrt{7}$$

deci

$$x_{3,4} = -\frac{1}{4}(1 \mp i\sqrt{7})$$

sau făcând calculile găsim

$$x_{3,4} = -0{,}25 \pm 0{,}66145\, i.$$

Observaţiuni: 1°. Nu a fost necesar a se întrebuinţa tablele trigonometrice naturale, ecuaţiunea fiind mult prea simplă.

2°. Domnul DIMITRIE MAVRODIN, printr'o greşeală de calcul dă valoarea ultimelor rădăcini

$$x_{3,4} = -0{,}25 \pm 0{,}09475\, i.$$

3°. Domnii S.-LT. ION C. SAVIN şi PETRE M. VARLAM, interpretează enunţul punând

$$x = \sin y.$$

4°. Deasemenea Domnul GH. V. GHIUŢĂ, care studiază ecuaţia şi cu ajutorul şirului lui ROLLE.

I. S. A.

PROBLEMA 4263. *Se dau cercurile* (O_1) *şi* (O_2). *Să se calculeze raza unui al treilea cerc, tangent la primele două şi la linia centrelor lor.*

V. THÉBAULT.

Soluţie dată de D-l M. L. A. NEGREA (Brăila).

Fie O_3 şi x centrul şi raza celui de al treilea cerc. In condiţiile problemei x este înălţimea dusă din O_3 în triunghiul $O_1O_2O_3$. Notăm cu $2R_1$, $2R_2$, $2d$ razele cercurilor (O_1), (O_2) şi distanţa O_1O_2. Ţinând seamă de formula

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$$

care dă înălţimea unui triunghiu în funcţie de laturi se găseşte că pentru triunghiul $O_1O_2O_3$ avem

$$x = \frac{1}{d}\sqrt{[(R_1 + R_2 + x)^2 - d^2]\,[d^2 - (R_1 - R_2)^2]}$$

sau punând

$$R_1 + R_2 = A \quad \text{şi} \quad R_1 - R_2 = B$$

şi făcând calculele se găseşte că ecuaţia care dă pe x este

$$B^2x^2 - 2A\,(d^2 - B^2)\,x - (A^2 - d^2)\,(d^2 - B^2) = 0$$

$$\therefore \quad x = \frac{A\,(d^2 - B^2) \pm d\sqrt{(d^2 - B^2)\,(A^2 - B^2)}}{B^2}$$

sau înlocuind pe A şi B prin valorile lor

$$x = \frac{(R_1 + R_2)\,[d^2 - (R_1 - R_2)^2] \pm 2d\sqrt{R_1R_2\,[d^2 - (R_1 - R_2)^2]}}{(R_1 - R_2)^2}$$

Se vede că x este totdeauna real căci

$$d^2 - (R_1 - R_2) \geqslant 0.$$

Când $R_1 - R_2$ tinde la zero, expresiunea lui x devine nedeterminată. In adevăr, când R_1, R_2 sunt egali se pot construi o infinitate de cercuri (O_3) cu centrul O_3 pe perpendiculara ridicată pe O_1O_2 în mijlocul său.

Au rezolvat bine problema, dând formule mai puţin simple pentru x, D-nii: I. N. SAGER şi AL. D. STOICA.

GH. B.

PROBLEMA 4284. *Să zicem pseudo-romb patrulaterului care are diagonalele perpendiculare pe mijlocul uneia dintre ele. Să se dea proprietăţi ale acestei figuri.* (Problemă investigativă).

I. IONESCU.

Soluţie dată de D-l M. MARGULIUS, (Şcoala Politehnică, Bucureşti).

Fie pseudo-rombul ABCD în care BD este perpendicular pe AC în H_2 aşa că BH = DH.

— Figura fiind simetrică în raport cu AC avem AB = AC; BC = BD.

— Aria este dată de formula $S = \frac{1}{2} AC \times BD$.

— Fie P mijlocul lui AC. Punem $AH = m$, $CH = n$, $BH = p$, $DH = p$, $AB = AD = a$ şi $BC = CD = c$. Teorema lui EULER aplicată patrulaterului ABCD ne dă

$$2a^2 + 2c^2 = (n + m)^2 + 4p^2 + 4HP^2, \quad \therefore \quad (m - n)^2 = 4HP^2,$$

$$\therefore \quad m - n = 2HP.$$

Citez din *„Exercices de Géométrie"* par F. G. M. alte două propietăţi (Theorema 351).

In această carte *„pseudo-rombul"* este numit *„romboid"*.

— Dacă deformăm un pseudo-romb, păstrând aceleaşi laturi, diagonalele rămân tot perpendiculare pe mijlocul uneia din ele.

— Dacă două pseudo-romburi asemenea ABCD, CDEF au o latură CD şi un unghiu D comune, dreapta BE este perpendiculară pe AD.

Soluţie dată de D-l SILAŞ GHEORGHE, (Student, Cluj).

Fie O intersecţia diagonalelor AC, BD. Avem:

— Laturile ce pleacă din vârfurile diagonalei AC care trece prin mijlocul lui BD sunt egale.

— Diagonala AC este bisectoara unghiului A şi a unghiului C ale pseudo-rombului.

— Diagonala AC este axă de simetrie a pseudo-rombului.

— Unghiurile din D şi B sunt egale.

— Aria este semiprodusul diagonalelor.

EXERCIŢII

18. Să se afle bi-bipătratul *abcadef*1.

MIHAIL CHIRIŢĂ.

R. Ultima cifră fiind 1, rezultă că rădăcina sa — tripătrat — este de forma:

$$msz1 \text{ sau } msz9.$$

Rădăcina acestui tripătrat, care e un bipătrat este de forma

$$p1 \text{ sau } p9.$$

Rădăcina acestui bipătrat — pătrat — e deci 9 căci 1 la orice putere e tot 1; deci bi-bipătratul este:

$$3^{16} = 9^8 = 81^4 = 6561^2 = 43046721.$$

PROBLEME PROPUSE

4360 [1]). Să se discute ecuaţia:

$$2\operatorname{tg}\theta + \lambda \cos\theta + 4 \sin\theta = 0$$

determinând numărul de rădăcini între $0 - 2\pi$, când λ variază.

N. C.

4361. Să se demonstreze că pentru a obţine direct restul diviziunei unui număr întreg oarecare prin 6, se adună cifra unităţilor cu de 4 ori suma celorlalte cifre, această operaţiune repetându-se asupra tuturor numerelor astfel obţinute, până se ajunge la un număr de o singură cifră.

La fel se poate proceda scăzând din cifra unităţilor dublul sumei celorlalte cifre.

LT. COMANDOR AV. GR. ZAPAN.

4362. Fie $\varphi(N)$ indicatorul lui N. Să cer numerile k mai mic ca 100 astfel ca egalitatea:

$$(1) \qquad \varphi(N) = N - k$$

să fie imposibilă.

T. POPOVICIU.

1) Problema cu acelaş număr din No. 7 a. c. al „Gazetei", nefiind propusă de mine, se anulează. Corespondenţii „Gazetei" trebue să semneze chestiunile trimise, cu numele întreg.

N. CIORĂNESCU.

4363. In unele relaţiuni, sau formule de geometrie elementară, intervin anumite numere întregi. Aşa de exemplu putem găsi numărul 7 în modul următor: pe o dreaptă se descriu de aceiaşi parte a ei trei cercuri oarecare tangente la dreaptă şi cel mijlociu tangent exterior la cele mărginaşe. Intre cercuri rămâne un triunghiu curbiliniu în care înscrim un cerc tangent la primele trei cercuri. Căutând să vedem de câte ori intră raza acestui cerc în distanţa centrului lui la dreapta considerată la început, găsim numărul 7.

Să se găsească alte construcţiuni analoage prin care să obţinem alte numere întregi.

I. IONESCU.

4364. Pe laturile unui triunghiu ABC se construieşte în exterior patratele BCA_1A_2, CAB_1B_2, ABC_1C_2. Să se arate că laturile triunghiului $G_a G_b G_c$ format prin centrele de gravitate ale triunghiurilor AA_1A_2, BB_1B_2, CC_1C_2, sunt perpendiculare pe medianele triunghiului ABC şi că aria triunghiului $G_a G_b G_c$ echivalează cu 4/3 din a triunghiului ABC.

V. THÉBAULT.

4365. Fie ABC triunghiul de referinţă şi $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ trei segmente situate pe laturile corespunzătoare ale triunghiului său ortic şi văzute din ortocentru sub unghiuri drepte.

Dacă α, β, γ sunt colineare, paralelele laturilor triunghiului ABC, trecând prin ortocentru, întâlnesc laturile respective ale triunghiului $\alpha'\beta'\gamma'$ în trei puncte situate pe simetrica dreptei $\alpha\beta\gamma$ în raport cu ortocentrul.

C. IONESCU-BUJOR.

4366. Dacă într'un patrulater ABCD diagonala AC este simediană comună a triunghiurilor ABD, BCD, atunci patrulaterul este inscriptibil, în care caz şi diagonala BD este simediană comună a triunghiurilor ABC, CDA.

MIRON NICOLESCU.

4367. Să se rezolve sistemul:

$$x^4 + 4y^4 = a$$

$$x^2 + 2xy + 2y^2 = b.$$

EM. MEREUȚĂ.

4368. Să se rezolve ecuația:

$$x^3 + \lambda^2 \sin\alpha + x\,\mathrm{tg}\alpha + \sec\alpha = 0$$

determinându-se unghiul α știind că rădăcinele ecuației sunt:

$$\cos\alpha,\ \mathrm{cotg}\alpha,\ \mathrm{cosec}\alpha.$$

GH. VASILIU.

4369. Să se determine cu o eroare mai mică de 1/1000 numărul x, astfel încât ducând în cercul de rază R coardele: $AB = Rx$; $BC = 2Rx$; $CD = 3Rx$, coarda AD care unește punctul inițial cu cel final să aibă lungimea cea mai mare posibilă.

N. C.

4370. Se consideră, în planul variabilei imaginare z, $2n$ puncte $z_1, z_2, \ldots z_n, z'_1, z'_2, \ldots z'_n$, legate între ele prin relațiile:

$$S_k S'_{n-k} = (C_n^k)^2 \lambda \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots n)$$

unde:

$$S_k = \Sigma z_1 z_2 \ldots z_k\ ,\quad S'_k = \Sigma z'_1 z'_2 \ldots z'_k\ ,\quad S_0 = S'_0 = 1,$$

iar C_n^k sunt coeficienții binomiali.

Să se arate că orice domeniu circular, care conține punctele $z_1, z_2, \ldots z_n$, cuprinde cel puțin unul din punctele $z'_1, z'_2, \ldots z'_n$.

N. G. BOTEA.

ERATĂ. La pagina 25 anul XXXIX, se va înlocui la rândul 2 de jos 1986 cu 1876.

Rectificare. La problema 4346 propusă la pagina 240 se înlocuește partea finală a enunțului prin: ... *numărul termenilor progresiei este de 3 ori mai mic decât ultimul termen adunat cu 1.*

BIBLIOTECA CENTRALA „ASOCIAȚIUNII"

Începând cu N-rul 7/XXXIX „*Gazeta Matematică*" va apare în 48 pagini, prețul abonamentului rămânând însă același.

Dela apariția ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Apostol V. (4348); *Arnărică T.* (4345); *Boiangiu I. Gh.* (4291); *Boitan P. N.* (4348); *Budeanu C.* (N); *Cârje I. V.* (4348); *Căşveanu C.* (4348); *Cehan Gh. A.* (4348); *Cocea Th.* (P); *Cornescu M.* (4348); *Crăcea A.* (4348); *Craşuranu C.* (4345); *Cristopol A. C.* (4348); *Dan M.* (4324); *Drăguț Maria* (4345, 48); *Fenechi Alex.* (4324); *Greab I. Valentin* (4324); *Haret I. C.* (4348); *Iliescu B. D.* (4345, 48); *Ionescu D.* (4324); *Ivănescu C.* (E); *Maftei M. C.* (4348); *Mănac M.* (4244); *Mărgărit Gh.* (4348); *Matei I. I.* (4324); *Mavrodin D. D.* (4219, 27, 33, 64, 73, 97, 312, 28, 45, 47); *Mazilu C. P.* (4239, 334); *Mehedinți D.* (4305); *Mereuță Em.* (4334, P); *Metea S. Virgil* (4324); *Mihăilă N.* (4345, 48); *Mihăileanu N. N.* (4256, 314, 24, 53); *Mihalache V. I.* (4324); *Năstase M.* (4284, 93, 334, E); *Negrea A. M. L.* (4338, 45); *Nichifor Mircea* (4293); *Nicoară D. Const.* (4345, 48); *Panait C. M.* (4324, 45); *Petrescu C. Oct.* (4324); *Popescu Gh.* (4348); *Postelnicescu M.* (4244, 84); *Procopiescu M.* (4294, E); *Şova C. I.* (4338); *Stăneşti M.* (E, N); *Stănculescu-Piteşti Gh.* (4237, 345); *Stoian I.* (4324); *Thébault V.* (A, N, P); *Tibul A.* (4348); *Trăsnitu N.* (4345, 48); *Trofimov Petre* (P); *Vasilescu N.* (4345, 48); *Vasiliu A. C.* (4348); *Vasiliu I. M.* (4345, 48); *Vasu A. N.* (4345); *Verenca S.* (4345, 48).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât și cele de propus de **geometrie**, *a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.*

Manuscrisele se vor scrie **pe o singură parte a foii și nu se vor tratà mai multe chestiuni diferite pe aceiași foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipì sau coase în partea stângă*, împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală*, iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică**, ca pe o foaie de caet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exercițiile, recreațiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA", trebue să fie originale, iar nu luate din cărți sau reviste speciale de matematici.

Colecțiunea „GAZETEI MATEMATICE“

«Gazeta Matematică» vinde ani completi broșați cu prețul de 400 lei volumul, afară de volumele: X, XVII, XVIII, XIX, XX și XXI care se vând cu prețul de 500 lei volumul.

Volumele: I, XV și XXV sunt epuizate.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu și V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **N. Abramescu,** *Lecțiunile de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediția IV revăzută și adăogită,* 1924 (Epuizată).

3. **A. G. Ioachimescu și G. Țițeica,** *Culegere de probleme de mecanică și geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme și o planșă) (Epuizată).

4. **Tr. Lalescu și Șt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografie* (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu,** *Tratat de geometrie analitică,* Fascicola I *Ediția II revăzută și adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—
Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).
Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).
Idem, Fascicola IV Aplicațiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150,—

6. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10,—

7. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediția III-a revăzută și îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. Lei 180,—

8. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu și G. Țițeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

9. **G. Țițeica,** *Culegere de probleme de geometrie* Lei 150,—

La aceste prețuri se vor adăogà taxele poștale pentru expediție.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul.* (Ediția II) Lei 150,—

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plătește înainte și începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamațiunile și cererile pentru cărți din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete numai D-lui: Inginer **Al. D. Bunescu,** Directorul General al Monitorului Oficial și Imprimeriilor Statului, B-dul Elisabeta 29, București I.

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii și orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie și expediție, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Călușei 23, București 4.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXXIX

NUMĂRUL 9. — MAI 1934

SIBIIU

SUMARUL

1. Rezultatul concursului „Gazetei Matematice" din anul 1934 . . . . . *G. Ţiţeica*
2. Sur le cercle des neuf points du triangle *V. Thébault*
3. Asupra câtorva teoreme din geometria triunghiului . . . . . *Alexandru Niculescu*
4. Generalizarea unei probleme de concurs *I. Nicolau-Dobridor*
5. Note matematice: 38 — 45.
6. Chestiuni de examen.
7. Bibliografie.
8. Cereri: 237.
9. Diverse.
10. Probleme rezolvate: 3770, 3987, 4179, 4183, 4208, 4220, 4293, 4324, 4327.
11. Exerciţii: 19.
12. Probleme propuse: 4250, 4290, 4371 — 4380.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI

IMPRIMERIA NAŢIONALĂ

1934

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: Colonel **Gh. Buicliu** din Ministerul Apărării Naţionale; **I. Buşilă**, Inginer Inspector General, Ministerul Lucrărilor Publice; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice" se vor trimite D-lui Inginer-Şef GH. ILIESCU, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret, Bucureşti 6.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29 Bucureşti 1) în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 691, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 214, 36, 70, 71, 97, 99, 310, 33, 67, 84, 86, 99, 412, 50, 553, 650, 79, 711, 29, 64, 876, 906, 14, 29, 59, 87, 2003, 04, 17, 70, 74, 111, 70, 338, 405, 30, 39, 66, 77, 502, 03, 56, 77, 87, 607, 09, 23, 38, 55, 65, 84, 92, 709, 13, 17, 35, 69, 80, 814, 65, 86, 89, 909, 12, 26, 36, 47, 3005, 45, 69, 81, 127, 61, 69, 208, 30, 55, 60, 98, 300. 04, 09, 10, 16, 18, 50, 405, 12, 24, 25, 45, 72, 89, 93, 522, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 88, 608, 22, 27, 32, 46, 47, 57, 65, 81, 82, 84, 99, 700, 03, 33, 36, 93, 804, 08, 29, 36, 44, 53, 64, 80, 96, 909, 13, 15, 16, 18, 20, 33, 44, 83, 4010, 13, 30, 34, 45, 53, 59, 62, 68, 70, 73, 85, 102, 03, 11, 12, 18, 19, 23, 32, 48, 50, 51, 63, 67, 69, 91, 92, 203, 06, 09, 10, 13, 25, 26, 30, 36, 40, 43, 48, 49, 52, 75, 77, 80, 81, 83, 87, 88, 89, 90, 300, 01, 03, 15, 19, 20, 22, 32, 33, 37, 40, 41, 42, 44, 51, 52, 54, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procură dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29. Bucureşti 1), cu preţul de 12 lei.

Avem plăcerea a anunţa că dela 21 Fevruarie a. c. mai fac parte din Societatea noastră D-nii: ING. C. ANTONIU şi ING. V. MANAFU; iar dela 2 Mai a. c. D-nii: PROF. GH. D. SIMIONESCU, ING. D. V. STOICA şi PROF. ING. C. TEODORESCU.

REZULTATUL CONCURSULUI „GAZETEI MATEMATICE“ DIN ANUL 1934

Rezultatul concursului de anul trecut, deşi îndoios din unele puncte de vedere, ne-a îndemnat să continuăm şi anul acesta. Anunţarea concursului a produs un rezultat neaşteptat. S'au înscris 102 elevi de liceu şi 6 bacalaureaţi. Mă grăbesc să adaug că dintre elevii de liceu numai 8 au fost dela licee civile, toţi ceilalţi au venit dela licee militare. Aceasta era întru câtva natural, de oarece în liceele militare s'a păstrat tradiţia bună a învăţământului matematic serios. La aceasta s'a mai adăugat un interes deosebit din partea autorităţilor militare superioare pentru acest învăţământ, interes şi înţelegere superioară, care merită o deosebită recunoaştere din partea noastră.

Dintre candidaţii înscrişi au lipsit la prima probă scrisă a Concursului 32 candidaţi. Ţinem să menţionăm, ca un element educativ de mare însemnătate, că numai o mică parte din cei absenţi au socotit ca o datorie faţă de Gazetă să ne anunţe, motivând lipsa dela concurs. Unul dintre aceştia din urmă a mers şi mai departe, trimiţându-ne un certificat medical. Asta dovedeşte din partea sa o înţelegere scrupuloasă a obligaţiilor luate, care merită să fie menţionată.

Concursul anunţat la timp s'a ţinut în zilele de 12, 13 şi 14 Aprilie a. c. Din cauza numărului mare de candidaţi probele scrise au fost eliminatoare. In urma lor au fost primiţi să treacă probele orale 26 de candidaţi.

Comisiunea însărcinată cu pregătirea problemelor pentru lucrările scrise, cu cercetarea acestor lucrări şi cu examinarea orală a fost compusă din D-nii: A. A. Roşu, Gh. Th. Gheorghiu, M. Ghermănescu, O. Ţino, C. Ionescu-Bujor, Lt.-Comandor Gh. Nicolescu, R. Ianculescu, N. Ciorănescu, C. Orăşanu, R. Woinarowsky şi Cristea Mateescu. La probele orale au pus chestiuni sau au cerut deslușiri de demonstraţii şi alţi membri ai Societăţii «Gazeta Matematică».

De altfel, în tot timpul probelor scrise şi orale, în afară de membrii Comisiunii, următorii membri ai Societăţii s'au interesat de mersul concursului, D-nii: I. Ionescu, A. G. Ioachimescu, E.

ABASON, C. ANTONIU, COL. G. BUICLIU, AL. BUNESCU, A. DUMITRESCU, D. V. IONESCU, GH. ILIESCU, COL. G. LITEANU, MIRON NICOLESCU, AL. NICOLESCU, O. ONICESCU, AL. PANTAZI, M. SARIAN, STAMATESCU, DAN VASILIU.

De asemenea, în afară de membrii Societăţii, alte persoane au urmărit cu mult interes desfăşurarea concursului de anul acesta şi anume D-nii: GENERAL MARŢIAN, Inspector General al liceelor Militare, COLONEL C. BUICULESCU, Comand. lic. Militar din Târgul-Mureş, C. TEODORESCU, Rectorul Şcoalei Politehnice din Timişoara, G. D. SIMIONESCU, P. TROFIMOV, A. VICIU, V. GHEORGHIU, POPOVICI-CORODEANU şi EL. PETRESCU.

Clasificarea candidaţilor pe baza probelor trecute n'a fost uşoară. Am avut elemente foarte bune la unele probe, mai puţin bune la altele, în foarte multe cazuri, de aceea atât numărul premianţilor cât şi al menţionaţilor este destul de mare.

1. Prin probele sale foarte bune de Algebră superioară şi Trigonometrie, dintre care lucrarea scrisă de Trigonometrie ireproşabilă şi oralul de Algebră excelent, D-l GRIGORESCU VINTILĂ, elev în clasa VI reală la liceul Militar «Nicolae Filipescu» dela Mănăstirea Dealului, şi-a cucerit primul loc în clasificarea noastră.

2. D-l GODEANU VASILE, elev în clasa VII la liceul Militar din Craiova, s'a distins prin probele sale foarte bune de Algebră superioară, mai ales prin răspunsurile sale orale, precum şi prin probele bune de Astronomie.

3. D-l DOBRESCU D. PAUL, elev în clasa VI la liceul Militar «Nicolae Filipescu» dela Mănăstirea Dealului, a făcut lucrări foarte bune de Trigonometrie şi un oral mai mult decât bun de Algebră şi de Trigonometrie.

4. D-l POPA TRAIAN, elev în clasa VII la liceul «Ion Maiorescu» din Giurgiu a fost clasificat al 4-lea pentru răspunsurile sale orale foarte bune la Trigonometrie şi Algebră şi pentru lucrările sale scrise bune.

5. D-l COZMA VICTOR, elev în clasa VI la liceul Militar din Iaşi, a făcut o foarte bună lucrare scrisă la Trigonometrie, celelalte probe fiind toate bune.

6. D-l CIOC I. DUMITRU, elev în clasa IV la liceul Militar din Craiova, s'a arătat la Algebră, atât la scris cât şi la oral, bine pregătit. A fost mai puţin sigur la Geometrie.

Ţinem acum să menţionăm pe unii dintre candidaţi care, deşi au făcut unele lucrări scrise foarte bune sau au dat răspunsuri excelente, n'au putut intra în clasificaţia din cauza altor probe prea slabe.

Menţionăm pe D-nii: ANANIESCU A. pentru lucrarea scrisă de Geometrie, ŢARAMAN A. pentru Algebră, CRISTOPOL C. pentru excelenta lucrare scrisă de Algebră, GEORGESCU G. ALEX. pentru Trigonometrie, MARTEŞ GR. pentru cele două probe de Algebră, METEA V. pentru Algebră, NEDELESCU N. A. pentru lucrarea scrisă de Geometrie, ŞABAC I. pentru lucrarea scrisă de Cinematică şi ŢARĂLUNGĂ G. D. pentru Trigonometrie.

Faţă cu aceste rezultate care nu pot apărea în adevărata lor valoare în această dare de seamă, dar care reprezintă sforţări reale demne de a fi luate în seamă, speranţele noastre sunt în creştere. Această notă discretă de optimism e departe de a fi exagerată.

DELEGAT PENTRU RAPOARTE
G. ŢIŢEICA.

SUR LE CERCLE DES NEUF POINTS DU TRIANGLE

1. Notations. Soient un triangle ABC, (BC = a, CA = b, AB = c); A_m, B_m, C_m et A′, B′, C′ les milieux des côtés et les pieds des hauteurs; O, H le centre du cercle circonscrit de rayon R, l'orthocentre; (O_9) le cercle des neuf points; (I) le cercle inscrit de rayon r.

On oriente les côtés du triangle respectivement de B vers C, de C vers A, de A vers B, puis, à partir des points A′, B′, C′, on porte des vecteurs $\overline{A'\alpha}$, $\overline{B'\beta}$, $\overline{C'\gamma}$ mesurés par les nombres

$$\frac{\lambda}{\cos A}, \quad \frac{\lambda}{\cos B}, \quad \frac{\lambda}{\cos C},$$

λ désignant un nombre algébrique arbitraire.

2. On a, en considérant, par exemple, HA′ comme positif si H est du même côté que A par rapport à BC, (cas où Â est aigu),

comme négatif dans le cas contraire, (Â obtus) et en faisant une convention analogue pour HB', HC',

$$\overline{HA'} = 2R\cos B\cos C\ ,\ \overline{HB'} = 2R\cos C\cos A\ ,\ \overline{HC'} = 2R\cos A\cos B.$$

On en conchut que

$$\frac{\overline{HA'}}{\overline{A\alpha'}} = \frac{\overline{HB'}}{\overline{B'\beta}} = \frac{\overline{HC'}}{\overline{C'\gamma}} = \frac{2}{\lambda} R\cos A\cos B\cos C.$$

Si les angles A, B, C sont aigus, les vecteurs $\overline{A'\alpha}$, $\overline{B'\beta}$, $\overline{C'\gamma}$ sont parcourus de l'origine à l'extrémité dans le même sens de rotation ABC (ou ACB) et les angles (HA' , Hα) , (HB' , Hβ) , (HC' , Hγ) sont égaux et de même sens. Si l'un des angles A, B, C est obtus, A par exemple, le vecteur $\overline{HA'}$ est négatif et par conséquent de sens opposé au sens qu'il a dans la première hypothèse, mais la valeur $\overline{A'\alpha} = \frac{\lambda}{\cos A}$ est également de sens opposé à celui qu'il avait dans la première figure et le sens de l'angle (HA', A'α) est encore le même.

On a d'ailleurs

$$\frac{\overline{H\alpha}}{\overline{HA'}} = \frac{\overline{H\beta}}{\overline{HB'}} = \frac{\overline{H\gamma}}{\overline{HC'}} = \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{4R^2\cos^2 A\cos^2 B\cos^2 C}} = k, \quad (1)$$

et le triangle αβγ se déduit du triangle A'B'C' par une rotation d'angle (HA', Hα) suivie d'une homothétie de centre H et de rapport k. Il est donc *semblable* au triangle A'B'C' et de même sens, le rapport d'homothétie étant k.

3. Puisque les droites Hα, Hβ, Hγ coupent les côtés BC, CA, AB du triangle fondamental sous un même angle, les points (B, H, α, γ), (C, H, β, α), (A, H, γ, β) sont concycliques et les cercles (ω_a), (ω_b), (ω_c) qu'ils déterminent se coupent à l'orthocentre H puis deux à deux en α, β, γ.

Mais le point H est le centre du cercle inscrit au triangle αβγ et, par suite, *les centres* ω_a , ω_b , ω_c *des cercles circonscrits aux triangles* βHγ , γHα , αHβ *sont situés sur le cercle* (Ω) *circonscrit au triangle* αβγ *lequel contient ainsi les six points* α , β , γ , ω_a , ω_b , ω_c .

De plus, les points H, Ω sont conjugués isogonaux pour le triangle $\omega_a\,\omega_b\,\omega_c$ et H *est aussi l'orthocentre de ce triangle.*

Comme on a l'égalité d'angles

$$\beta H\gamma = \beta A\gamma = A, \text{ (ou } \pi - A), \quad \gamma H\alpha = B,$$

$$\text{(ou } \pi - B), \quad \alpha H\beta = C, \text{ (ou } \pi - C),$$

les triangles ABC, $\omega_a\,\omega_b\,\omega_c$ sont directement semblables.

Les rayons $H\omega_a = \rho_a$, $H\omega_b = \rho_b$, $H\omega_c = \rho_c$ des cercles (ω_a), (ω_b), (ω_c) ont pour expressions,

$$\rho_a = \frac{\beta\gamma}{2\sin A} = \frac{k}{2\sin A} \cdot B'C' = \tfrac{1}{2}\, ka \cot A,$$

$$\rho_b = \tfrac{1}{2}\, kb \cot B, \quad \rho_c = \frac{1}{2}\, kc \cot C ; \qquad (2)$$

d'où l'on tire d'abord

$$\rho_a + \rho_b + \rho_c = k \mid R + r \mid , \qquad (3)$$

puis, ρ désignant le rayon du cercle circonscrit au triangle $\alpha\beta\gamma$,

$$\rho = \tfrac{1}{2}\, kR.$$

4. Lorsque λ varie, le triangle $\alpha\beta\gamma$ reste constamment semblable au triangle A'B'C' ; de plus, le point H reste son propre homologue dans la transformation (composée d'une rotation et d'une homothétie) qui fait correspondre le triangle $\alpha\beta\gamma$ au triangle A'B'C'. On en conclut, par exemple, que le point H, qui est le centre du cercle inscrit au triangle A'B'C', est aussi celui du cercle inscrit au triangle $\alpha\beta\gamma$. Les projections orthogonales de H sur $A\beta$, $A\gamma$ sont B', C' et la droite B'C' est la droite de SIMSON du point H dans le triangle $A\beta\gamma$. La projection orthogonale D de H sur $\beta\gamma$ est donc située sur B'C' et par suite la droite $\beta\gamma$ enveloppe une parabole qui a pour foyer H et pour tangente au sommet B'C'. Cette parabole touche les côtés AB, AC du triangle fondamental.

Quand λ varie de $-\infty$ à $+\infty$, les points β et D décrivent respectivement les droites AC et B'C' tout entières et la parabole précédente est enveloppée tout entière. Les enveloppes des droites $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ sont de même les paraboles de foyer H et de tangentes aux sommets C'A', A'B'.

Dans le cas particulier où l'un des angles, A par exemple, est droit, $\frac{\lambda}{\cos A} = \pm \infty$; le point α est rejeté à l'infini sur l'axe de direction BC et la droite $\beta\gamma$ est parallèle à BC.

5. Un point quelconque P du triangle $\alpha\beta\gamma$ décrit une droite car il se déduit de son homologue P′ dans le triangle A′B′C′ par les mêmes rotation et homothétie que α se déduit de A′. Or, α décrit une droite BC passant par A′, donc P décrit une droite passant par P′.

On peut encore dire que les triangles HPP′ et HαA′ sont semblables et que, par suite, *l'angle* HP′P, égal à l'angle HA′α, *est droit ;* donc quand α décrit BC, P décrit la perpendiculaire en P′ à HP′.

En particulier, le centre Ω du cercle circonscrit au triangle $\alpha\beta\gamma$ décrit la perpendiculaire en O_9 à HO_9.

Puisque le triangle $HO_9\Omega$ est rectangle en O_9, on a d'abord $\overline{H\Omega} = \overline{O\Omega}$, puis $\overline{H\Omega} : \overline{O_9H} = k$; d'où, en vertu de la relation (1)

$$\overline{\Omega O_9^2} = \overline{O_9H^2} \mid k^2 - 1 \mid = \lambda^2 . \overline{O_9H^2},$$

soit

$$\overline{\Omega O_9} = \lambda . \overline{O_9H} = \tfrac{1}{2} \lambda . \overline{OH}.$$

L'axe radical Δ *des cercles* (Ω) , (O_9) *est parallèle à la droite d'*EULER OH *du triangle* ABC. Le pied X de cet axe sur ΩO_9 est tel que

$$\overline{XO_9} = \frac{1}{4} \lambda \left| \frac{R^2 - \overline{OH}^2}{OH} \right| , \quad \overline{X\Omega} = \frac{1}{4} \lambda \left| \frac{R^2 + \overline{OH}^2}{OH} \right| .$$

6. Ces propriétés généralisent la définition du cercle (O_9) des neuf points du triangle ABC, car lorsque, $\lambda = 0$, $\alpha \equiv A'$, $\beta \equiv B'$, $\gamma \equiv C'$, $k = 1$, et

$$\rho_a = \tfrac{1}{2} AH = OA_m , \quad \rho_b = \tfrac{1}{2} BH = OB_m ,$$

$$\rho_c = \tfrac{1}{2} CH = OC_m , \quad \rho = \tfrac{1}{2} R .$$

Enfin, la relation (3) donne une démonstration nouvelle de ce théorème de CARNOT :

Dans un triangle, la somme des distances du centre du cercle circonscrit aux côtés est égale à la somme des rayons des cercles circonscrit et inscrit à ce triangle.

On a, en effet pour $\lambda = 0$,

$$\rho_a + \rho_b + \rho_c = \overline{OA}_m + \overline{OB}_m + \overline{OC}_m = R + r.$$

V. THÉBAULT
Le Mans (France).

ASUPRA CÂTORVA TEOREME DIN GEOMETRIA TRIUNGHIULUI

In majoritatea lor teoremele din geometria triunghiului au un substrat proiectiv. Vom adăuga încă un exemplu care să legitimeze această afirmație.

Fie ABC un triunghiu și AA', BB', CC' un sistem de ceviene concurente. Să ducem paralele prin picioarele cevienelor, în același sens, la laturile Δ-ului :

$$A'B_1 \parallel AB \ ; \ B'C_1 \parallel BC \ ; \ C'A_1 \parallel CA.$$

Rapoartele în cari punctele B_1, C_1, A_1 împart laturile triunghiului fiind egale celor determinate de punctele A', B', C', rezultă că și dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente. (Teorema lui CEVA).

Ori dreptele AA', BB_1 se taie pe mediana CC_m. Putem enunța deci propoziția :

(*Fie* AA', BB', CC'), (AA_m, BB_m, CC_m) *respectiv un sistem de ceviene concurente și medianele unui triunghiu* ABC. *Atunci :*

a) *Dreptele cari unesc punctele* (BB', CC_m), (CC', AA_m), (AA', BB_m) *cu vârfurile* A, B, C *sunt concurente într'un punct* M.

b) *Dreptele cari unesc punctele* (BB_m, CC'), (CC_m, AA'). (AA_m, BB') *cu vârfurile* A, B, C *sunt concurente într'un punct* N.

Să facem acum o proiecție conică a configurației pe un plan, astfel ca dreapta dela infinit să fie dusă la distanță finită. Vom obține teorema mai generală :

Fie (AA', BB', CC'), (AA", BB", CC") *două perechi de ceviene concurente respectiv în* P *şi* Q:

1°. *Dreptele cari unesc punctele* (BB', CC"), (CC', AA"), (AA', BB") *cu vârfurile* A, B, C *sunt concurente într'un punct* M.

2°. *Dreptele cari unesc punctele* (BB", CC'), (CC", AA'), (AA", BB') *cu vârfurile* A, B, C *sunt concurente într'un punct* N.

Este tocmai teorema obţinută de D-l Miron Niculescu [Chestiuni de Geometria Triunghiului „G. M." 5. Ianuarie 1933]. Reciproc, aplicând o proiecţie astfel ca unul din sistemele de ceviene să devină sistemul medianelor (prin aruncarea polarei triliniare la infinit) obţinem o demonstraţie nouă a acestei teoreme.

II. Teorema aceasta poate căpăta şi o altă înfăţişare. Observ că punctele P, Q, M, N formează 4 triunghiuri triomologice cu triunghiul ABC. Rezultă atunci:

Un triunghiu biomologic cu un triunghiu ABC *este şi triomologic cu acesta.*

Sub această formă teorema pare cunoscută; avem în ori ce caz o demonstraţie simplă a ei.

Mai rezultă de aci şi din faptul că, atunci când P sau Q este centrul de greutate al triunghiului, M şi N sunt permutantele lui Q sau P [Art citat G. M. 5. Ian. 1933], o construcţie geometrică a permutantelor unui punct din planul unui triunghiu:

Fie P un punct şi A'B'C' picioarele cevienelor reciprocului lui P (ceviene isotomice).

Paralelele într'un sens şi apoi în sens invers duse prin aceste puncte la laturile Δ-ului ABC, determină pe acestea punctele (A_1, A_2), (B_1, B_2), (C_1, C_2); sistemele de ceviene (AA_1, BB_1, CC_1), (AA_2, BB_2, CC_2) concură în punctele P_1, P_2 cari sunt permutantele punctului P.

Construcţia aceasta nu ştiu dacă este cunoscută, punctele permutante fiind definite obişnuit prin coordonate baricentrice.

Aşa dar:

Permutantele unui punct determină împreună cu reciprocul acestuia un triunghiu triomologic triunghiului de referinţă.

E interesant de observat că punctele (M, N) dela teorema generală, pot fi privite ca puncte *permutante generalizate* ale bipunctului (P', Q'), punctele P', Q' fiind reciproce punctelor P, Q.

Dacă (α, β, γ), $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ sunt coordonatele baricentrice ale punctelor (P, Q), atunci coordonatele permutantelor generalizate ale bipunctului (P', Q') vor fi :

$$\left(\frac{1}{\beta\gamma_1}, \frac{1}{\gamma\alpha_1}, \frac{1}{\alpha\beta_1}\right), \left(\frac{1}{\beta_1\gamma}, \frac{1}{\gamma_1\alpha}, \frac{1}{\alpha_1\beta}\right).$$

De sigur că se pot pune acum probleme analoage celor din geometria triunghiului referitoare la punctele permutante.

ALEXANDRU NICULESCU.

GENERALIZAREA UNEI PROBLEME DE CONCURS

La concursul din Aprilie 1928 al revistei *Gazeta Matematică*, s'a dat pentru Geometria Analitică următoarea problemă :

Se dă elipsa

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Fie B *şi* B' *extremităţile axei mici. Se consideră cercul* (B') *cu centrul în* B' *şi tangent directoarelor elipsei. Prin focarele* F_1 *şi* F_2 *trec două drepte variabile perpendiculare între ele, care intersectează tangenta în cealaltă extremitate* B, *în punctele* T_1 *şi* T_2. *Fie* T_1P *şi* T_2P *celelalte tangente ale elipsei care mai trec prin* T_1 *şi* T_2. *Să se demonstreze că intersecţia lor* P *se găseşte pe cercul* (B').

D-l D. BARBILIAN, a dat acestei probleme o foarte elegantă soluţie geometrică şi a dedus o serie de proprietăţi geometrice interesante în articolul întitulat *Cercuri extern-bitangente,* publicat la pagina 46, Vol. XXXIV, *Gazeta Matematică.*

In cele ce urmează, voiu da o generalizare analitică, aşa cum s'a cerut în problema iniţială, enunţată la pagina 337, Vol. XXXIII, *Gazeta Matematică.*

Fie $P(x_0, y_0)$, un punct în planul elipsei. Fascicolul tangentelor duse din P la elipsă este

$$\left[\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right]\left[\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-1\right]-\left[\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}-1\right]^2=0. \qquad (1)$$

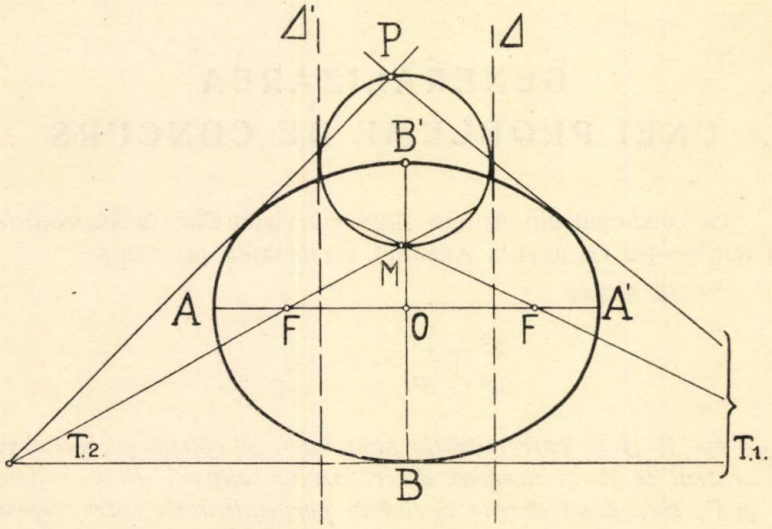
Tangenta în B la elipsă este

$$y+b=0. \qquad (2)$$

Rezolvând sistemul (1) , (2) în raport cu y se găseşte ecuaţia

$$(y_0-b)\,x^2+2bx_0x-a^2\,(y_0+b)=0 \qquad (3)$$

care dă abscisele x_1 , x_2 ale punctelor T_1 , T_2.



Luăm deci punctele

$$T_1\,(x_1\,,\,-b)\quad;\quad T_2\,(x_2\,,\,-b)$$

$$F\;\;(c\;\;,\;0)\qquad;\quad F'\;(-c\;,\;0)$$

şi însemnăm cu m_1 , m_2 coeficienţii unghiulari ai dreptelor T_1F , T_2F iar cu φ unghiul acestor drepte. Avem

$$m_1=\frac{-b}{x_1-c}\quad;\quad m_2=\frac{-b}{x_1+c} \qquad (4)$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$$

sau ţinând seama de (4):

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-2bc + b(x_1 - x_2)}{x_1x_2 + c(x_1 - x_2) + b^2 - c^2}$$

$$\therefore \quad x_1 - x_2 = \frac{-2bc - (b^2 - c^2)\operatorname{tg}\varphi - x_1x_2\operatorname{tg}\varphi}{c.\operatorname{tg}\varphi - b}. \qquad (5)$$

Dar între rădăcinele x_1, x_2 ale ecuaţiunei (3) avem

$$x_1x_2 = \frac{-a^2(y_0 + b)}{y_0 - b}$$

$$(x_1 - x_2)^2 = \frac{4b^2x_0^2 + 4a^2(y_0^2 - b^2)}{(y_0 - b)^2}.$$

Eliminând acum pe x_1 , x_2 între aceste 2 din urmă relaţiuni şi (5) şi înlocuind pe x_0 , y_0 prin coordonatele curente se găseşte că dacă φ este constant, atunci P descrie curba

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = \frac{[c(c\operatorname{tg}\varphi - b)y + b^2(c + b\operatorname{tg}\varphi)]^2}{(c\operatorname{tg}\varphi - b)^2}$$

sau punând

$$m = c\operatorname{tg}\varphi - b \quad ; \quad n = c + b\operatorname{tg}\varphi$$

şi ţinând seamă că

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$b^2m^2x^2 + b^2m^2y^2 - 2b^2cmny - a^2b^2m^2 - b^4n^2 = 0$$

$$\therefore \quad x^2 + \left(y - \frac{cn}{m}\right)^2 - \frac{a^4\sec^2\varphi}{m^2} = 0 \qquad (6)$$

care se vede că este un cerc cu centrul în un punct

$$C\left(0\ ,\ \frac{c(c + b\operatorname{tg}\varphi)}{c\operatorname{tg}\varphi - b}\right)$$

pe BB' şi cu raza

$$R = \frac{a^2\sec\varphi}{\operatorname{ctg}\varphi - b}.$$

In cazul particular al problemei de concurs, avem

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad \operatorname{tg}\varphi = \infty ,$$

iar ecuaţia (6) se găseşte uşor că devine

$$x^2 + (y - b)^2 - \frac{a^4}{c^2} = 0 ,$$

care e un cerc cu centrul în B′ (0 , b) şi tangent directoarelor elipsei.

Cercul (6) pentru cazul lui φ oarecare, având raza constantă se poate considera şi el tangent la două drepte Δ , Δ' paralele cu directoarele elipsei.

Când T_1F , T_2F' sunt paralele

$$\operatorname{tg}\varphi = 0 ,$$

iar cercul (6) devine

$$x^2 + \left(y + \frac{c^2}{b}\right)^2 - \frac{a^4}{b^2} = 0.$$

Un caz general al problemei este când F , F′ sunt 2 puncte oarecare din planul elipsei, iar T_1T_2 o tangentă fixă oarecare. Pentru acest caz, calea urmată până aici este foarte greoaie. Pe cale geometrică prin involuţie se poate demonstra că locul în acest caz este o conică.

I. Nicolau-Dobridor.

NOTE MATEMATICE

38. *Asupra problemei 4284.*

S'au primit câteva proprietăţi ale acestei probleme, rezolvată la pag. 333, de la D-nii: M. Postelnicescu şi M. Năstase.

I. I.

39. *Asupra unor exerciţii.*

1. Relaţiile din *exerciţiul 73 G. M. XXVIII No. 10* şi din *exerciţiul 13 G. M. XXXVII pag 197* se găsesc în *„Rélations entre les éléments d'un triangle" Librairie Vuibert.*

S.-lt. Th. Panaite, Mih. I. Popescu-Stăneşti.

2. Relația din *exercițiul 28 pag. 198 G. M. XXXV* nu e adevărată deoarece face uz de $p^2 = 2r(6R - r)$, relație ce nu e exactă după cum s'a dovedit în G. M. XXXVI, Nota No. 6. Relația exactă este $\Sigma (b + c) \sin A = \frac{1}{R} (p^2 + r^2 + 4Rr)$.

AL. A. ROȘU; S.-LT. A. STAN; N. N. VELICESCU.

COL. G. I. L.

40. *Asupra problemei 4133.*

Acestei probleme i se mai poate da o altă soluție elementară, deosebită de aceia a colegului CĂPITAN GH. N. prin aceia că face apel mai mult la considerațiuni algebrice decât aritmetice.

Fie A și B cele două numere căutate; din enunț rezultă ecuația

$$(1) \qquad B^2 - AB + mA = 0$$

care, având rădăcini întregi, trebuie ca realizantul să fie patrat perfect

$$(2) \qquad A^2 - 4mA = u^2,$$

care la rându-i, este o ecuație de gradul doi în A; punând condițiunea să aibă rădăcini întregi, vom avea ca mai sus

$$(3) \qquad 4m^2 + u^2 = v^2,$$

care este o ecuație pitagoriană, cu soluțiunile

$$(4) \quad v = \lambda(\alpha^2 + \beta^2) \quad , \quad u = \lambda(\alpha^2 - \beta^2) \quad , \quad m = \lambda\alpha\beta.$$

Revenind la A și B, vom avea grupele de soluții

$$A = \lambda(\alpha + \beta)^2 \ , \ B = \begin{cases} \lambda\alpha(\alpha + \beta) \\ \lambda\beta(\alpha + \beta), \end{cases}$$

$$A = -\lambda(\alpha - \beta)^2 \quad B = \begin{cases} \lambda\beta(\alpha - \beta) \\ \lambda\alpha(\beta - \alpha). \end{cases}$$

In cazul particular $m = 9$, vom avea $\lambda\alpha\beta = 9$ și deci, următoarele cazuri

$\lambda = 1$, $\alpha = 9$, $\beta = 1$ cu soluțiile A = 100 , B = 90 , 10

$\lambda = 3$, $\alpha = 3$, $\beta = 1$ cu soluțiile A = 48 , B = 36 , 12

$\lambda = 9$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$ cu soluțiile A = 36 , B = 18 , 18

adică cele cinci soluțiuni distincte, găsite cu ocazia rezolvirei acestei probleme.

Dacă considerăm al doilea grup de formule, găsim aceleași soluțiuni.

De asemeni, puteam lua ca soluțiuni ale ecuației nedeterminate (3), formulele

$$v = \lambda(\alpha^2 + \beta^2) \quad , \quad u = 2\lambda\alpha\beta \quad , \quad 2m = \lambda(\alpha^2 - \beta^2)$$

cari, în cazul $m = 9$ dau $\alpha = 5$, $\beta = 4$ și regăsim soluțiunile de mai sus.

Dacă vrem ca A și B să fie patrate perfecte, se vede imediat că va trebui să avem

$$\lambda = \mu^2 \quad , \quad \alpha(\alpha + \beta) = u^2$$

considerând ultima relație ca o ecuație de gradul doi în α, punem condiția ca rădăcinile să fie întregi, adică

$$\beta^2 + 4u^2 = v^2$$

ecuație pitagoriană, cu soluțiile

$$v = \gamma(s^2 + t^2) \quad , \quad u = \gamma st \quad , \quad \beta = \gamma(s^2 - t^2)$$

de unde

$$\alpha_1 = \gamma t^2 \quad , \quad \alpha_2 = -\gamma s^2$$

deci

$$A = a^2 = \mu^2\gamma^2 s^4 \quad , \quad B = b^2 = \mu^2\gamma^2 s^2 t^2$$

cu

$$m = \mu^2\gamma^2 t^2 (s^2 - t^2).$$

Dacă $m = 3$, se vede ușor că va trebui să luăm $\mu = \gamma = t = 1$ $s = 2$, deci avem soluția, unică în numere întregi

$$a = 4 \quad , \quad b = 2.$$

Dacă vrem ca A și B să fie în general puteri perfecte, fie n, problema este mai complicată. Iată o soluție, care poate nu e singura.

Din expresia lui A se vede că putem lua

$$\lambda = \mu^n (\alpha + \beta)^{n-2}$$

cu care, expresia lui β devine

$$\beta = \mu^n (\alpha + \beta)^{n-1} \alpha = \mu^n (\alpha + \beta)^n \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

trebuie să avem

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}=\frac{p^n}{q^n}$$

p și q fiind prime între ele, iar q^n fiind un divizor al lui $\alpha+\beta$. Dacă α și β sunt prime între ele vom avea $\alpha = p^n$, $\alpha+\beta = q^n$, deci

$$A = \mu^n q^{n^2} = a^n \quad , \quad \beta = \mu^n p^n q^{n(n-1)} = b^n .$$

Dacă α și β au un divizor comun d, $\alpha = d\alpha_1$, $\beta = d\beta_1$, vom avea

$$\alpha_1 = p^n \quad , \quad \alpha_1 + \beta_1 = q^n$$

și deci

$$A = \mu^n d^n q^{n^2} \quad , \quad B = \mu^n d^n p^n q^{n(n-1)}$$

cu condițiile

$$m = \mu^n q^{n(n-2)} p^n (q^n - p^n)$$

$$m = \mu^n d^n q^{n(n-2)} p^n (q^n - p^n)$$

pentru fiecare caz.

Astfel, pentru $m = 56$, $n = 3$ avem $\mu = p = 1$, $q = 2$, deci soluțiile

$$A = 2^9 = 8^3 \ , \ B = 2^6 = 4^3.$$

M. G.

41. *Asupra unei probleme din „Culegere de Probleme de Algebră“.*

Fie p_1 , p_2 , . . . , p_n n numere pozitive. Ecuația

$$(1) \qquad f(x) \equiv \left(\sum_{r=1}^{n} p_r \right) x^n - \sum_{r=1}^{n} p_r x^{n-r} = 0$$

are o singură rădăcină pozitivă egală cu 1. Divizând cu $x-1$ polinomul $f(x)$ și ținând seamă de o teoremă a D-lui KAKEYA [1]) vedem că celelalte rădăcini ale ecuației (1) sunt, în modul, toate < 1.

---

1) A se vedea S. KAKEYA „On the Limits of the Roots of an Algebraic Equation with Positive Coefficients“ The Tohoku Math. Journ. t. II p. 140.

$\lambda_1 , \lambda_2 , \ldots , \lambda_{n-1}$ fiind aceste rădăcini ele sunt date de ecuația

$$(2) \qquad \sum_{r=1}^{n} \left(\sum_{s=0}^{n-r} p_{r+s} \right) x^{n-r} = 0,$$

și avem

$$(3) \qquad \sum_{s=1}^{n-1} A_s \lambda_s^m \to 0, \text{ pentru } m \to \infty$$

oricare ar fi numerele $A_1 , A_2 , \ldots , A_{n-1}$.

Acestea fiind spuse să considerăm un șir de numere

$$(4) \qquad a_1 , a_2 , \ldots , a_m , \ldots$$

astfel ca

$$(5) \qquad a_m = \frac{\sum_{r=1}^{n} p_r \, a_{r+m-n-1}}{\sum_{r=1}^{n} p_r}$$

pentru $m > n$.

Să determinăm numerele $A_1 , A_2 , \ldots , A_{n-1}$, B astfel ca să avem

$$(6) \qquad \sum_{s=1}^{n-1} A_s \lambda_s^k + B = a_k \quad , \quad k = 1, 2, \ldots , n.$$

Ținând seamă de (1) avem

$$a_m = \sum_{s=1}^{n-1} A_s \lambda_s^m + B$$

oricare ar fi m. Din (3) deducem atunci că

$$a_m \to B \text{ pentru } m \to \infty.$$

Inmulțind în mod convenabil ecuațiile (6) cu coeficienții ecuației (2) și adunând găsim

$$a_m \to \frac{\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{r=1}^{k} p_{n-k+r} \right) a_k}{\sum_{k=1}^{n} k p_k} \text{ pentru } m \to \infty.$$

In particular pentru $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 1$ avem

$$a_m \to \frac{2\sum_{k=1}^{n} k a_k}{n(n+1)}, \text{ pentru } m \to 8.$$

Dacă facem aci $n = 2$ avem problema 22 Cap. XX din «Culegerea de Algebră».

Observaţia I. E foarte important de observat că rezultatul precedent s'a obţinut în ipoteza că determinantul sistemului (6) este diferit de zero deci că rădăcinile λ_l sunt distincte. In cazul contrar pentru fiecare grup de rădăcini egale, de exemplu $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots$, expresiunea $\sum_{s=1}^{r} A_s \lambda_s^k$ din (6) se va înlocui prin $\sum_{s=1}^{r} k(k-1)\ldots(k-s+2) A_s \lambda_1^{k-s+1}$. Prin această schimbare se va vedea uşor formula (6) va avea încă loc pentru k oarecare, şi că determinantul sistemului (6) va fi diferit de zero. Se vede deasemenea că relaţia (3) va subsista. Se găseşte în definitiv că *proprietatea demonstrată este adevărată oricum ar fi rădăcinile ecuaţiei (2).*

Observaţia II. Aceeaş problemă se poate trata pentru şirul de numere (4) (presupunem că numerele sunt pozitive) când în loc de relaţia (5) se consideră

$$a_m = \prod_{r-1}^{n} a_{r+m-n-1}^{\frac{p_r}{p_1+p_2+\ldots+p_n}} \quad \text{sau} \quad a_m = \frac{\sum_{r=1}^{n} p_r}{\sum_{r=1}^{n} \frac{p_r}{a_{r+m-n-1}}}.$$

Aceste probleme se reduc la precedenta luând logaritmul termenelor sau inversele termenelor şirului.

TIBERIU POPOVICIU.

42. *Asupra notei 17* (G. M. vol. XXXVI, pag. 134).

Demonstraţia conţinută în această notă este vicioasă deoarece se bazează pe relaţia:

$$\frac{T_1 - T_3 + T_5 - T_7 \ldots}{1 - T_2 + T_4 - T_6 \ldots} = \frac{S_1 - S_3 + S_5 - S_7 + \ldots}{1 - S_2 + S_4 - S_6 + \ldots}$$

unde T_k înseamnă suma produselor tangentelor luate câte k, iar

S_k suma produselor arcelor respective luate tot câte k. Ori această relaţie este evident inexactă în cazul general, de exemplu

$$\frac{\operatorname{tg} x_1 + \operatorname{tg} x_2}{1 - \operatorname{tg} x_1 \operatorname{tg} x_2} = \frac{x_1 + x_2}{1 - x_1 x_2}$$

nu este adevărată decât pentru valori particulare ale arcelor x_1 şi x_2.

I. B. FLORESCU.

43. *Câteva relaţiuni între elementele triunghiului.*

Cu ajutorul mai multor relaţiuni stabilite în *Gazeta Matematică* între elementele unui triunghiu, se ajunge la următoarele relaţiuni:

$$(1) \quad S = \frac{a^2 r_b r_c + b^2 r_b r_a + c^2 r_a r_b}{4p(R + r)}.$$

$$(2) \quad S = \frac{a^2(p - a) + b^2(p - b) + c^2(p - c)}{4(R + r)}.$$

$$(3) \quad S = \frac{a r_b r_c + b r_c r_a + c r_a r_b}{2(r_a + r_b + r_c)}.$$

$$(4) \quad S = \frac{2(2R - r)}{\sec^2 \frac{1}{2}A + \sec^2 \frac{1}{2}B + \sec^2 \frac{1}{2}C}.$$

$$(5) \quad S = \frac{bcr_a + car_b + abr_c}{p(\sec^2 \frac{1}{2}A + \sec^2 \frac{1}{2}B + \sec^2 \frac{1}{2}C)}.$$

$$(6) \quad S = \frac{2R^2}{(\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B)(\operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C)(\operatorname{cotg} C + \operatorname{cotg} A)}.$$

$$(7) \quad S = \frac{r_a(p - 2a) + r_b(p - 2b) + r_c(p - 2c)}{\operatorname{cotg} \frac{1}{2}A \operatorname{cotg} \frac{1}{2}B + \operatorname{cotg} \frac{1}{2}B \operatorname{cotg} \frac{1}{2}C + \operatorname{cotg} \frac{1}{2}C \operatorname{cotg} \frac{1}{2}A}.$$

$$(8) \quad S = \frac{2R^2 r}{R + r}(\sin A \cos^2 \tfrac{1}{2}A + \sin B \cos^2 \tfrac{1}{2}B + \sin C \cos^2 \tfrac{1}{2}C).$$

$$(9) \qquad S = \frac{R(r_b r_c \sin A + r_c r_a \sin B + r_a r_b \sin C)}{r_a + r_b + r_c}.$$

$$(10) \qquad S = \frac{a \operatorname{tg} \frac{1}{2}A + b \operatorname{tg} \frac{1}{2}B + c \operatorname{tg} \frac{1}{2}A}{\sec^2 \frac{1}{2}A + \sec^2 \frac{1}{2}B + \sec^2 \frac{1}{2}C}.$$

Verificarea acestor relaţiuni este uşor de făcut cu ajutorul relaţiunilor cunoscute.

IOAN GH. POPA.

44. *Deformaţia traectoriei unui proectil, sub acţiunea unui vânt lateral.*

In toate tratatele de «Balistică Exterioară» se arată că, un vânt lateral deformează traectoria tot lateral. In cele ce urmează voiu arăta că dacă proectilul, care are o mişcare de rotaţie, aşa cum se obicinueşte, atunci traectoria va fi deformată şi în planul vertical iniţial, înfluenţând cotele şi abscisele.

In adevăr, se demonstrează în «Aerdinamică» *efectul magnus,* care deviază un cilindru, sau o sferă, care se roteşte, perpendicular direcţiei curentului de aer.

Fie dar F_M *efectul magnus* asupra proectilului, acţionând centrul de greutate al proectilului în planul vertical de tragere.

Atunci, pe cale mecanică, se ajunge uşor la variaţiunile:

$$dz = \frac{F_M}{m} \cdot t \rightarrow \text{pentru cote};$$

$$dx = \frac{dz}{\operatorname{tg} \Theta} \rightarrow \text{« abscise};$$

unde m este massa proectilului, t durata traectului până în punctul de abscisă x şi cotă z, şi Θ înclinarea tangentei la traectorie.

MAIOR I. LINTEŞ.

45. *Determinarea încărcăturei minime la o gură de foc.*

In general asemenea determinări se fac numai experimental, ceeace conduce la mari cheltueli. In cele ce urmează, voiu rezuma o cale teoretică, care mi se pare originală.

Fie o țeavă de tun sau obuzier, calculată pentru o viteză inițială maximă V_0 dată, având un randament mecanic p cunoscut.

Dacă voim să realizăm în acelaș tun o viteză V_0 mai mică, utilizând o încărcătură mai mică, din aceeași pulbere, atunci nu prea se ajunge comod la soluția problemei.

Dacă menținem însă $p = const.$, atunci o serie de transformări balistice, ne conduce la relația:

$$1) \qquad \frac{V_0}{\omega} = \text{constant}$$

unde ω este încărcătura de pulbere.

Apoi detenta, pe care o presupunem *adiabatică,* ne dă:

$$2) \qquad P_0 \cdot \left(\frac{c}{\omega}\right)^n = \text{const.}$$

unde P_0 este presiunea gazelor la gura țevei și c volumul interiorului țevei.

Criteriile 1) și 2) ne dau pentru cazul minim:

$$3) \qquad \begin{cases} \omega' = \omega \cdot \left(\dfrac{R_p}{P_0}\right)^{\frac{1}{n}} \\ V'_0 = V_0 \cdot \left(\dfrac{R_p}{P_0}\right)^{\frac{1}{n}} \end{cases}$$

unde R_p reprezintă valoarea rezistențelor pasive ale proectilului (în general se ia 400 kg./cm²), iar $n = 1{,}25$ este raportul căldurilor specifice.

Ecartul de viteză va fi deci:

$$4) \qquad \varepsilon_v = V_0 \left[1 - \left(\frac{R_p}{P_0}\right)^{\frac{1}{n}}\right].$$

MAIOR I. LINTEȘ.

CHESTIUNI DE EXAMEN

UNIVERSITATEA DIN BUCUREŞTI, FACULTATEA DE ŞTIINŢE

Secţia Matematici

Sesiunea Iunie 1933

MATEMATICI ELEMENTARE

I.

Se dă sistemul linear şi omogen în x, y, z :

$$\begin{aligned}(1+2h)\,x+(-1+2h)\,y+(1+h)\,z&=0\\(3+h)\,x+(3-h)\,y+(1-h)\,z&=0\\3x-y+kz&=0\end{aligned}$$

unde h şi k sunt doi parametrii.

1°. Să se găsească maximum şi minimum lui k pentru care sistemul admite soluţii nu toate nule.

2°. Să se găsească forma generală a soluţiei sistemului, pentru k maxim.

II.

Se dă expresia trigonometrică :

$$\sin^3 x+\sin^3\left(x+\frac{2\pi}{5}\right)+\sin^3\left(x+\frac{4\pi}{5}\right)+\sin^3\left(x+\frac{6\pi}{5}\right)+\sin^3\left(x+\frac{8\pi}{5}\right)$$

în care x e un arc variabil.

1°. Să se demonstreze că expresia e constantă.

2°. Să se verifice că valoarea constantei e nulă.

III.

Fie un tetraedru unghiu, adică figura formată de patru plane P_1, P_2, P_3, P_4, care au un punct comun O (la distanţa finită). Se înseamnă cu S_1, S_2, S_3, S_4 simetriile faţă de aceste plane.

1°. Să se arate că rotaţiile provenite din compunerea simetriilor (S) în următoarele două ordine :

$$R = S_1 . S_2 . S_3 . S_4 \quad , \quad R' = S_2 . S_3 . S_4 . S_1 ,$$

se bucură de proprietatea exprimată de relaţia simbolică :

$$R' = S_1 . R . S_1 .$$

Să se deducă de aici că R şi R′ au aceiaş amplitudine.

2°. Se înseamnă cu OA, OB, OC, OD intersecţiile feţelor vecine

$$(P_1 , P_2) , (P_2 , P_3) , (P_3 , P_4) , (P_4 , P_1)$$

şi cu *a, b, c, d* unghiurile-diedre ale aceloraş perechi de feţe.

Pe feţele diagonale AOC şi BOD ca baze, respectiv cu unghiurile-diedre adiacente *a, c* şi *b, d* se construesc două triedre O (EAC) şi O (FBD).

Să se arate că unghiurile-diedre *e* şi *f* opuse feţelor AOC şi BOD în triedrele astfel construite, sunt egale.

Se va folosi rezultatul dela punctul 1°).

IV.

Se dau două cercuri concentrice Γ şi γ (Γ exterior lui γ). Se duce tangenta într'un punct curent C la γ. Această tangentă mobilă taie în A şi B cercul Γ.

1°. Să se arate că avem proiectivitate între divisiunile (A) şi (B) de pe cercul Γ şi între diviziunile (A) şi (C) de pe cercurile Γ şi γ.

2°. Printr'un punct I din plan nesituat pe cercul Γ se duce o dreaptă mobilă care taie cercul Γ în A, A′. Fie B, B′ omoloagele acestor puncte în proiectivitatea (A) $\sim$ (B).

Să se arate că intersecţia P a tangentelor AB şi A′B′ la cercul γ descrie o dreaptă, când C parcurge cercul γ.

GEOMETRIA SUPERIOARĂ

1°. Se dă suprafaţa de element linear :

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{(U + V)^2}$$

unde U şi V sunt funcţii respectiv de *u* şi *v*.

Să se arate că pe această suprafaţă curbele $u = ct$ şi $v = ct$ au curbura geodezică constantă şi variind numai dela curbă la curbă.

2°. Se dă transformarea :

$$Z = \frac{z - e^{i\alpha}}{(1 - e^{i\beta})\, z - e^{-i(\beta-\alpha)}}$$

şi să se arate că ea transformă cercul din *z* cu centrul în origină şi rază 1 într'un cerc în Z, ce trece prin origină, şi cu centrul în punctul Z = — 1.

BIBLIOGRAFIE

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. XL. No. 2. Februarie 1934. New-York. Notă asupra problemei lui FRÉCHET, de R. STEPHENS. Sumarea seriilor lui FOURIER, de R. E. A. C. PALEY, W. C. RANDELS şi M. F. ROSSKOPF. Curbura în spaţiu riemannian, de H. LEVY. O notă asupra unei anumite proprietăţi a familiilor de curbe, de A. WERTHEIMER. Notă asupra funcţionalelor omogene, de L. S. KENNISON. Notă asupra ortogonalităţii polinomialelor lui TCHEBYCHEFF, ale elipselor confocale, de J. L. WALSH. Derivative, cături diferenţiale şi formula lui TAYLOR, de H. WHITNEY. Algebre linear asociative de ordin infinit ale căror elemente satisfac ecuaţii algebrice finite, de H. H. CONWELL. Conturul aparent în V_3^n în S_4^* general, de A. R. WILLIAMS. Asupra caracterelor de putere în câmpurile ciclotomice, de H. S. VANDIVER. Ultima teoremă a lui FERMAT şi al doilea factor în clasa numerelor ciclotomice, de H. S. VANDIVER. Postulate independente pentru partea „informală" din „Principia Matematica", de E. V. HUNTINGTON. Postulate independente pentru un „sistem informal de principii de egalităţi" de E. V. HUNTINGTON, O involuţie ciclică de ordinul şapte, de W. R. HUTCHERSON. Notă asupra relaţiunilor corespunzătoare unor clase de convergenţă în mijlociu, de D. JACKSON. Privitor la şirurile maximale, de G. T. WHYBURN. Domenii integrale ale algebrelor de cuartenioni raţionali generalizaţi, de A. A. ALBERT.

Mathesis. Tomul XLVIII. No. 3. Martie 1934. Gembloux. Asupra cercurilor lui TUCKER, de V. THÉBAULT. Construcţia centrului de curbură în un punct al bicornului, de R. GOORMAGHTICH. Diferenţiarea unei funcţiuni $F(x, y, z)$ pe suprafaţa $Sf(x, y, z)$, de AD. M. Curbura cuadricelor cu centru, de R. DEAUX. Asupra unei transformări biraţionale plane de perioada trei, de J. DEMELENNE. Transformarea cuadratică posedând o conică de puncte unite, de P. LIBOIS. Asupra unei extensiuni a teoremelor lui LINDELOF şi POINCARÉ la unele ecuaţii cu derivate parţiale, de R. J. H. GERMAY.

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Tomul CXVII. Fascicola I. Ianuarie 1934. Buenos Aires.

Journal de Mathematiques Elementaires. publié par H. VUIBERT Anul 58. No. 13. Aprilie 1934.

Idem. Anul 58. No. 14. Aprilie 1934. Paris.

Boletin Matematico. Supliment informativ Anul II. No. 1. Ianuarie 1934. Buenos Aires.

Sphinx. Anul IV. No. 5. Mai 1934. Bruxelles. Problema delică, de A. DECERF. Matematicianul şi calculul numeric, de W. LOREI.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XIV No. 2. Aprilie 1934. Timişoara. Sur le quadrilatère inscriptible, par V. THÉBAULT. Şiruri convergente reale, de VIRGIL CLAUDIAN.

Ştiinţă şi Progres. Revista ştiintifică a Liceelor Militare. Anul I. No. 1. Aprilie 1934. Redacţia şi administraţia : Liceul militar Târgu-Mureş. Abonamentul 120 lei pe an. Cuvânt inainte de Maiorul PANU PETRE. Doi savanţi români, de P. SERGESCU. Model de Probleme rezolvate. Probleme propuse.

Natura. Anul XXIII. No. 4. Aprilie 1934. Unităţi de măsură şi transformarea măsurilor, de N. N. BOTEZ.

C. C. TEODORESCU. Relation entre la résistance et l'allongement, (Extrait du *Bulletin scientifique de l'Ecole polytechnique de Timişoara*). Timişoara 1934.

Şcoala Politehnică din Timişoara. Anuarul. Anii XI, XII, XIII. Timişoara 1934.

CERERI

237. Care sunt cuadratorii Români ?

I. I.

DIVERSE

Societatea Română de Ştiinţe, Secţiunea Matematică, a ţinut şedinţă în seara zile de 16 Aprilie 1934. D-l V. VÂLCOVICI a făcut o comunicare asupra suprafeţelor de discontinuitate în cazul conturului circular şi D-l M. GHERMĂNESCU asupra ecuaţii $\Delta(u) = \lambda(u)$.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 3770. *Se dă forţa* F *aplicată în* A *şi momentul său* OG *faţă de un punct* O. *Fie* IG' *momentul lui* F *faţă de un punct* I *de pe* OG. *Să se demonstreze că unghiul* AGG' *este drept.*

COL. GH. BUICLIU.

Prin construcție OG și IG′ sunt respectiv perpendiculare respectiv pe planurile AOF, AIF. Rezultă că planul dreptelor OG, IG′ este perpendicular în un punct H pe AF, intersecția planurilor AOF, AIF și invers AF este perpendiculară pe planul OIGG′ deci și pe GG′.

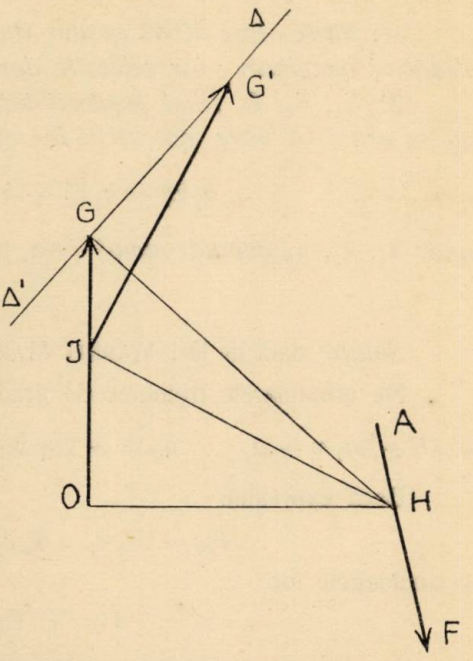
$\overline{OG}$, $\overline{IG'}$ fiind momentele lui F față de O și I avem

$$\overline{OG} = \overline{OH} \cdot F$$

și

$$\overline{IG'} = \overline{IH} \cdot F$$

$$\therefore \frac{\overline{OG}}{\overline{OH}} = \frac{\overline{IG'}}{\overline{IH}} = F = C^t$$



ceeace arată că triunghiul dreptunghic HIG′ rămâne asemeni cu el când I se mișcă pe OG. Locul lui G′ este deci dreapta GG′ perpendiculară în G pe GH și cum s'a demonstrat că GG′ este perpendiculară și pe AF, urmează că ea e perpendiculară pe planul AGF deci și pe dreapta AG care trece prin piciorul ei. Unghiul AGG′ este prin urmare drept.

Din demonstrația de până aici se vede că GG′ este momentul lui F față de G.

Notă. 1°. Soluția de mai sus a fost redijată după soluția trimisă de D-l GH. TH. GHEORGHIU, când era student.

2°. Au rezolvat problema, utilizând relațiunile metrice între elementele unui triunghiu dreptunghic, D-șoara MARIA ELEFTERESCU și D-nii: N. N. ALDEA, E. N. BURLACU, ADR. C. GHEORGHIU, P. M. IGNAT, C. D. IONESCU-ȚIU, I. MURĂROIU și TH. N. PANAITE.

3°. D-l I. N. CRAIU, a dat o foarte bună soluție analitică.

4°. Din soluția dată se vede că unghiul AGG′ este drept oricare ar fi punctul A pe vectorul F.

5°. S'a mai primit o foarte bună soluție vectorială dela D-l N. N. MIHĂILEANU (student, București).

GH. B.

PROBLEMA 3987. *Se dau ecuaţiile*

$$(b+c-a-b)\,x^2+2\,(ad-bc)\,x+bc\,(a+d)-ad\,(b+c)=0$$

$$(c+a-b-d)\,x^2+2\,(bd-ca)\,x+ca\,(b+d)-bd\,(c+a)=0$$

$$(a+b-c-d)\,x^2+2\,(cd-ab)\,x+ab\,(c+d)-cd\,(a+b)=0.$$

1°. *Să se arate direct că una din aceste ecuaţii are neapărat rădăcini imaginare; iar celelalte două, rădăcini reale.*

2°. E_1, E_2, E_3 *fiind membrii întâiu ai ecuaţiilor precedente, să se arate că între pătratele lor există o identitate de forma*

$$k_1 E_1^2 + k_2 E_2^2 + k_3 E_3^2 \equiv 0,$$

unde k_1, k_2, k_3 *depind numai de* a, b, c, d.

D. BARBILIAN.

Soluţie dată de D-l MARIUS MARGULIUS (student, Bucureşti).

Fie următoarele trinoame de gradul al 2-lea:

$$a_0 x^2 + 2a_1 x + a_2 \quad , \quad b_0 x^2 + 2b_1 x + b_2 \quad , \quad c_0 x^2 + 2c_1 x + c_2.$$

Dacă expresiile

$$F_{bc} = 2b_1 c_1 - b_0 c_2 - b_2 c_0$$

şi analoagele lor

$$F_{ca} \quad , \quad F_{ab}$$

sunt nule, cele trei trinoame se zic că formează un sistem conjugat. Se ştie că, în aceste condiţii, unul din trinoame are rădăcini imaginare; celelalte două, rădăcini reale.

In cazul de faţă avem:

$$1)\ F_{bc} \equiv 2\,(bd-ca)(cd-ab)-(c+a-b-d)\,[ab(c+d)-cd(a+b)] - (a+b-c-d)\,[ca(b+d)-bd(c+a)].$$

Pentru a evita să facem calcule prea lungi, observăm că F_{bc}, desvoltat şi ordonat după una din litere, de exemplu d, e un trinom de gradul al 2-lea în d. Pe de altă parte ne putem asigura direct, pe expresia 1), că F_{bc} se anulează pentru următoarele trei substituţii distincte:

$$d = a \quad , \quad d = b \quad , \quad d = c.$$

Aşa dar F_{bc}, considerat ca trinom de gr. al 2-lea în d, este identic nul. Prin permutări circulare ajungem la următoarele trei identităţi:

$$2) \qquad F_{bc} \equiv 0 \ , \ F_{ca} \equiv 0 \ , \ F_{ab} \equiv 0$$

care arată într'adevăr că trinoamele E_1, E_2, E_3 din enunţ, sunt conjugate şi ca atare două au rădăcini reale, iar cel de-al treilea imaginare.

Iată justificarea care se dă de obiceiu acestei propoziţii [1]):

Se consideră un trinom general de gr. 2:

$$d_0 x^2 + 2d_1 x + d_2 = 0.$$

Discriminantul acestui trinom egalat cu zero

$$3) \qquad d_1^2 - d_0 d_2 = 0,$$

se interpretează ca ecuaţia în coordonate omogene d_0, d_1, d_2 a unei *conice reale*. In această reprezentare, un trinom dat

$$a_0 x^2 + 2a_1 x + a_2 = 0$$

are ca imagină punctul A de coordonate omogene

$$d_0 = \rho a_0 \ , \ d_1 = \rho a_1 \ , \ d_2 = \rho a_2 \qquad \rho \neq 0.$$

Incât relaţia

$$F_{ab} = 0$$

exprimă, în această reprezentare, condiţia ca punctele A şi B să fie conjugate faţă de conica reală 3). Totalitatea relaţiilor 2) exprimă deci că triunghiul ABC format din imaginele trinoamelor date E_1, E_2, E_3 e conjugat lui 3).

Insă un triunghiu propriu zis conjugat unei conice reale are totdeauna un vârf în interiorul conicei (adică în regiunea de unde nu se pot duce tangente reale conicei) şi celelalte două vârfuri în afară.

Cu privire la conica particulară 3) observăm că vârful

$$d_0 = 0 \qquad d_1 = 1 \qquad d_2 = 0$$

al triunghiului de referinţă, se găseşte în regiunea exterioară.

---

1) Vezi, de exemplu, cursul de Matematice Elementare, anul I, Facultatea de Ştiinţe.

Deci punctele acestei regiuni corespund substituțiilor pozitive în membrul întâiu al ecuației 3).

Ținând seamă de această observație și de așezarea menționată a vârfurilor triunghiului conjugat ABC, va trebui să avem (într'o oarecare ordine) pentru discriminanții ecuațiilor E_1, E_2, E_3:

$$a_1^2 - a_0 a_2 < 0 \quad , \quad b_1^2 - b_0 b_2 > 0 \quad , \quad c_1^2 - c_0 c_2 > 0$$

ceeace demonstrează prima parte a problemei.

2^0. Se știe că 3 trinoame conjugate, nesingulare, pot fi aduse totdeauna la formele canonice

$$1 + x^2 \quad , \quad 2x \quad , \quad 1 - x^2$$

printr'o anume transformare omografică $x = \frac{Ay + B}{Cy + D}$, $AD - BC \neq 0$, de coeficienți reali. Pentru aceasta n'avem decât să determinăm omografia așa încât la rădăcinile reale ale lui E_2 să corespundă valorile 0 și ∞, iar la una din rădăcinile reale ale lui E_3 să corespundă valoarea 1. Omografia astfel obținută e proprie, adică $AD - BC \neq 0$, căci rădăcinile utilizate sunt diferite între ele. Într'adevăr, se știe că un sistem conjugat de trinoame nesingulare nu au rădăcini comune [1]). Pe de altă parte relațiile 2) se păstrează, prin omografie căci ele exprimă proprietatea rădăcinilor de a fi armonic conjugate.

Scrise explicit pentru trinoamele transformate

$$\alpha_0 y^2 + 2\alpha_1 y + \alpha_2 = 0 \qquad 2y = 0 \qquad y^2 - (1 + \gamma) y + \gamma = 0$$

aceste relații iau forma

$$-1 - \gamma = 0 \quad , \quad (1 + \gamma)\alpha_1 - \gamma \alpha_0 - \alpha_2 = 0 \quad , \quad 2\alpha_1 = 0.$$

De unde rezultă, prin rezolvare

$$\gamma = -1 \quad , \quad \alpha_2 = \alpha_0 \quad , \quad \alpha_1 = 0.$$

Prin urmare, l_1, l_2, l_3 fiind trei constante reale de normare, convenabil alese, avem identitățile

$$4) \quad l_1 E_1(x) \equiv 1 + y^2 \quad , \quad l_2 E_2(x) = 2y \quad , \quad l_3 E_3(x) \equiv 1 - y^2,$$

1) Loc. citat.

unde x şi y sunt legaţi de substituţia omografică reală

$$x = \frac{Ay + B}{Cy + D} \quad , \quad AD - BC \neq 0.$$

Insă din 4) avem numaidecât, în baza identităţii cunoscute care leagă trinoamele canonice din membrul al 2-lea:

$$5) \qquad l_1^2 E_1^2(x) - l_2^2 E_2^2(x) - l_3^2 E_3^2(x) \equiv 0.$$

Aceasta e identitatea cerută în enunţ. Pe această cale am găsit şi semnele constantelor k_1, k_2, k_3 din relaţia căutată. E clar că l_1, l_2, l_3 nu depind decât de coeficienţii ecuaţiilor E , E_2, E_3 şi de coeficienţii omografici, care, la rândul lor, depind tot de coeficienţii lui E_1, E_2, E_3, prin chiar modul cum a fost determinată omografia.

Verificăm pe identitatea (5) proprietatea, din prima parte a problemei, cu privire la realitatea rădăcinilor. Această verificare nu constitue în niciun caz o altă demonstraţie a acestei proprietăţi, căci în stabilirea identităţii (5) de mai sus, am folosit tocmai această proprietate.

Notă. I. Demonstraţia de mai sus a Domnului MARGULIUS e *demonstraţia naturală* a propoziţiilor din enunţ. Problema a fost propusă însă, în revistă, în vederea unei demonstraţii elementare, bazată pe calcul. Iată cum trebuia condus acel calcul.

Să facem în primul trinom E_1:

$$d = b$$

obţinem

$$(E_1)_{d=b} \equiv (c - a)\, x^2 + 2\,(a - c)\, bx + (c - a)\, b^2.$$

Discriminantul noului trinom e vizibil nul. Pe de altă parte în compoziţia coeficienţilor lui E_1 literele d, a deoparte şi b, c, de alta, joacă roluri simetrice. Conchidem dar că discriminantul

$$6) \qquad \Delta_1 \equiv (ad - bc)^2 - (b + c - a - d)\,[\,bc\,(a + d) - ad\,(b + c)\,]$$

se anulează pentru următoarele patru înlocuiri

$$b = d \quad , \quad d = c \quad , \quad a = b \quad , \quad a = c.$$

Insă Δ_1 e polinom omogen şi de gr. 4 în ansamblul literelor a, b, c, d. Observaţia precedentă arată că Δ_1 se divide cu factorii lineari, primi între ei:

$$d - b \quad , \quad d - c \quad , \quad a - b \quad , \quad a - c,$$

prin urmare, după o teoremă cunoscută de algebră, cu produsul lor. Aşa dar

$$7) \qquad \Delta_1 = C.\,(d - b)\,(d - c)\,(a - b)\,(a - c)$$

unde C nu poate fi decât o constantă numerică, pentru ca gradele celor 2 membrii, în $a, b, c, d,$ să corespundă. Comparând coeficienţii termenilor în a^2d^2 din 6) şi 7) găsim

$$C = 1.$$

Aşa dar avem, din 7), prin permutări circulare ale literelor $a, b, c,$ următoarele expresii definitive, relative la discriminanţii ecuaţiilor date:

$$8) \quad \begin{aligned} \Delta_1 &\equiv (d-b)\,(d-c)\,(a-b)\,(a-c) \\ \Delta_2 &\equiv (d-c)\,(d-a)\,(b-c)\,(c-a) \\ \Delta_3 &\equiv (d-a)\,(d-b)\,(c-a)\,(a-b). \end{aligned}$$

Să facem produsul acestor trei expresii

$$9) \quad \Delta_1\Delta_2\Delta_3 \equiv -(d-a)^2(d-b)^2(d-c)^2(b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2.$$

Pe de altă parte tot din 8) rezultă:

$$10) \quad \begin{aligned} (d-a)\,(b-c)\,\Delta_1 &\equiv (d-b)\,(c-a)\,\Delta_2 \equiv (d-c)\,(a-b)\,\Delta_3 \\ &\equiv -(d-a)\,(d-b)\,(d-c)\,(b-c)\,(c-a)\,(a-b). \end{aligned}$$

Însă în virtutea identităţii lui EULER

$$(d-a)\,(b-c) + (d-b)\,(c-a) + (d-c)\,(a-b) \equiv 0$$

urmează că cele 3 părţi ale sumei, în general diferite de zero, nu pot avea toate acelaş semn.

Identităţile 10) ne arată că această situaţie a semnelor e valabilă şi pentru discriminanţii $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, căci înmulţiţi cu aceste produse ei trebue să conducă la acelaş număr, deci la acelaş semn. Aşa dar dintre discriminanţii $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ doi sunt de acelaş semn şi unul de semn contrar.

Pe de altă parte, identitatea 9) arată că produsul tuturor acestor semne e negativ. Conchidem deci în mod necesar că discriminanţii de acelaş semn sunt pozitivi, iar discriminantul al treilea negativ.

Cu acesta, prima parte a problemei e rezolvată pe o cale mai elementară.

II. S'ar putea încerca şi pentru a doua parte a problemei o rezolvare prin calcul, înlocuind în identitatea căutată

$$k_1 E_1^2 + k_2 E_2^2 + k_3 E_3^2 \equiv 0$$

pe E_1, E_2, E_3 în funcţie de x şi arătând că sistemul linear de 5 ecuaţii omogene cu 3 necunoscute k_1, k_2, k_3, la care conduce identificarea, este compatibil, şi rezolvându-l.

E adevărat că această cale pare foarte complicată.

Iată însă o metodă simplă care are avantagiul că ne duce la determinarea efectivă a constantelor k_1, k_2, k_3.

Observăm, pentru aceasta că trinoamele E_1, E_2, E_3 se pot pune sub formă de determinanţi:

$$E_1 \equiv \begin{vmatrix} x^2 & 2x & 1 \\ bc & b+c & 1 \\ ad & a+d & 1 \end{vmatrix}, \quad E_2 \equiv \begin{vmatrix} x^2 & 2x & 1 \\ ca & c+a & 1 \\ bd & b+d & 1 \end{vmatrix}, \quad E_3 \equiv \begin{vmatrix} x^2 & 2x & 1 \\ ab & a+b & 1 \\ cd & c+d & 1 \end{vmatrix}.$$

Sub această formă se vede numai decât că E_1, E_2, E_3 sunt invariante pentru cele trei transformări omografice generatoare:

1° pentru translaţia $x = y + h$

2° pentru dilatarea $x = ky \qquad k \neq 0$

3° pentru inversiunea $x = \frac{1}{y}$,

aplicate deopotrivă celor cinci litere a, b, c, d, x.

Mai precis, vrem să demonstrăm că aceste transformări *au proprietatea comună de a înmulţi pe* E_1, E_2, E_3 *cu determinantul omografiei la puterea treia, divizat cu un anumit produs de numitori, introduşi de transformările fracţionare.*

1°. Pentru translaţie avem

$$E_1(x) \equiv \begin{vmatrix} y^2 + 2hy + h^2 & 2y + 2h & 1 \\ \bar{b}\bar{c} + h(\bar{b} + \bar{c}) + h^2 & \bar{b} + \bar{c} + 2h & 1 \\ \bar{a}\bar{d} + h(\bar{a} + \bar{d}) + h_2 & \bar{a} + \bar{d} + 2h & 1 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} y^2 & 2y & 1 \\ \bar{b}\bar{c} & \bar{b} + \bar{c} & 1 \\ \bar{a}\bar{d} & \bar{a} + \bar{d} & 1 \end{vmatrix}$$

(am scăzut ultima coloană înmulţită cu $2h$ din a doua şi, înmulţită cu h^2, din a treia; apoi, a doua coloană înmulţită cu h, din prima).

Ţinând seamă că determinantul translaţiei e egal cu 1 şi că translaţia e o transformare întreagă (fără numitor) vedem că proprietatea enunţată se verifică în cazul translaţiei.

2°. Pentru dilatare avem, evident

$$E_1(x) \equiv k^3 \begin{vmatrix} y^2 & 2y & 1 \\ \bar{b}\bar{c} & \bar{b} + \bar{c} & 1 \\ \bar{a}\bar{d} & \bar{a} + \bar{d} & 1 \end{vmatrix}$$

ceeace verifică proprietatea.

3°. Pentru inversiune avem

$$E_1 \equiv \frac{1}{y^2\,\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}} \begin{vmatrix} 1 & 2y & y^2 \\ 1 & \bar{b} + \bar{c} & \bar{b}\bar{c} \\ 1 & \bar{a} + \bar{d} & \bar{a}\bar{d} \end{vmatrix} \equiv \frac{(-1)^3}{y^2\,\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}} \begin{vmatrix} y^2 & 2y & 1 \\ \bar{b}\bar{c} & \bar{b} + \bar{c} & 1 \\ \bar{a}\bar{d} & \bar{a} + \bar{d} & 1 \end{vmatrix}.$$

Ţinând seamă că inversiunea e o transformare omografică de determinant egal cu — 1 şi anume o transformare fracţionară, avem verificarea propoziţiei enunţate pentru cazul acestei transformări generatoare.

Dar o transformare omografică generală se reduce totdeauna la o anume compunere de transformări generatoare 1), 2) şi 3). Pe de altă parte se ştie că determinanţii omografiilor se înmulţesc, prin compunere. Aşa dar suntem autorizaţi să scrim, pentru transformarea generală omografică

$$x = \frac{Ay + B}{Cy + D} \qquad \Delta = AD - BC \neq 0$$

următoarea identitate:

11) $$E_i(x) \equiv \frac{\Delta^3}{(Cy+D)^2 (C\bar{a}+D)(Cb+D)(C\bar{c}+D)\ C\bar{d}+D)} E_i(y)$$ [1]

$(i = 1, 2, 3).$

E clar, în virtutea acestor formule, că dacă $E_1(x)$, $E_2(x)$, $E_3(x)$ verifică o identitate de forma

$$k_1 E_1(x) + k_2 E_2(x) + k_3 E_3(x) \equiv 0,$$

transformatele $E_1(y)$, $E_2(y)$, $E_3(y)$ verifică aceeaş identitate, şi reciproc.

Aşa fiind să considerăm omografia care face să corespundă cantităţilor a, b, c, d respectiv

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ \infty & 0 & 1 & \bar{d} \end{pmatrix}.$$

Determinarea lui $\bar{d}$ se face uşor, scriind că rapoartele anarmonice ale celor două grupe de patru numere, luate în aceeaş ordine, sunt egale. Găsim

$$\bar{d} = \frac{(d-b)(c-a)}{(d-a)(c-b)}.$$

De aici, prin aplicarea identităţii lui EULER, scoatem proprietăţile:

12) $$\frac{1}{(d-a)(b-c)} = \frac{-\bar{d}}{(d-b)(c-a)} = \frac{-1+\bar{d}}{(d-c)(a-b)}.$$

Trinoamele transformate $E(y)$ se obţin aşa dar trinoamele date $E(x)$ prin înlocuirile

$$\begin{pmatrix} x & a & b & c & d \\ y & \infty & 0 & 1 & \bar{d} \end{pmatrix},$$

bine înţeles, după ce am împărţit în prealabil cu a. Obţinem astfel

$$E_1(y) \equiv -y^2 + 2\bar{d}y - \bar{d}\ ,\ E_2(y) \equiv y^2 - 2y + \bar{d}\ ,\ E_3(y) \equiv y^2 - \bar{d}.$$

Se poate acum demonstra uşor existenţa unei identităţi de forma

13) $$k_1 E_1^2(y) + k_2 E_2^2(y) + k_3 E_3^2(y) \equiv 0$$

---

1) Această identitate, mai puţin forma factorului din membrul al 2-lea, era evident *à priori* căci $E_1(x) = 0$ exprimă proprietatea omografic invariantă, că x e punct unit al involuţiei $(ad)(bc)$.

unde k_1, k_2, k_3 sunt coeficienţi constanţi. Cele cinci ecuaţii la care conduce identificarea

$$k_1 + k_2 + k_3 = 0$$

$$\bar{d}\,k_1 + k_2 = 0$$

$$\bar{d}_2(2\bar{d} + 1)\,k_1 - (2 + \bar{d})\,k_2 - \bar{d}\,k_3 = 0$$

$$\bar{d}^2 k_1 + \bar{d}k_2 = 0$$

$$\bar{d}^2(k_1 + k_2 + k_3) = 0$$

sunt evident compatibile, căci se reduc la primele două. Valorile lui k_1, k_2, k_3 care satisfac sistemului sunt proporţionale cu

14) $$\frac{k_1}{1} = \frac{k_2}{-\bar{d}} = \frac{k_3}{-1+\bar{d}}\,.$$

Am demonstrat însă că dacă trinoamele $E_i\,(y)$ satisfac unei identităţi de forma 13), trinoamele primitive $E_i\,(x)$ satisfac unei identităţi analoage. Aşa dar ţinând seamă de 14) şi 12) avem identitatea calculată până la un factor comun al coeficienţilor (k):

15) $$(d-a)(b-c)\,E_1^2(x)+(d-b)(c-a)\,E_2^2(x)+(d-c)(a-b)\,E_3^2(x) \equiv 0.$$

Să observăm că în stabilirea acestei identităţi n'am folosit natura rădăcinilor trinoamelor $E_i\,(x)$.

Aşa dar ne putem foarte bine sprijini pe această identitate ca să demonstrăm prima parte a problemei.

Intr'adevăr, cum în virtutea identităţii lui EULER avem

$$(d-a)(b-c) + (d-b)(c-a) + (d-c)(a-b) = 0,$$

înseamnă că din aceste trei produse unul e de semn contrar cu celelalte. Prin urmare putem pune, într'o anumită ordine:

$$\frac{(d-a)(b-c)}{l_1^2} = \frac{(d-b)(c-a)}{-l_2^2} = \frac{(d-c)(a-b)}{-l_3^2}$$

unde l_1, l_2, l_3 sunt trei numere reale. Identitatea 15) devine atunci

16) $$l_1^2 E_1^2 - l_2^2 E_2^2 - l_3^2 E_3^2 \equiv 0.$$

Ea conduce evident la o reprezentare parametrică a următoarei conice

$$l_1^2 X_1^2 - l_2^2 X_2^2 - l_3^2 X_3^2 = 0,$$

potrivit formulelor

$$\frac{X_1}{E_1(x)} = \frac{X_2}{E_2(x)} = \frac{X_3}{E_3(x)}\,.$$

Dar conica nu taie dreapta $X_1 = 0$ a triunghiului de referinţă, dar taie laturile $X_2 = 0$, $X_3 = 0$. De aci rezultă că E_1 are rădăcini imaginare, iar E_2 şi E_3, rădăcini reale.

D. B.

PROBLEMA 4179. *Dacă* Δ *şi* Δ_1 *reprezintă determinanţii.*

$$\begin{vmatrix} \sin a & \sin 2a & \sin 3a \\ \sin b & \sin 2b & \sin 3b \\ \sin c & \sin 2c & \sin 3c \end{vmatrix} \text{ şi } \begin{vmatrix} \cos a & \sin 2a & \cos 3a \\ \cos b & \sin 2b & \cos 3b \\ \cos c & \sin 2c & \cos 3c \end{vmatrix}$$

avem relaţiunea:

$$\frac{\Delta}{\Delta_1} = \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{tg} c \cdot \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{b+c}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{a+c}{2}.$$

NICOLAE DONCIU.

Ţinând seamă că:

$$\sin 2a = 2 \sin a \cdot \cos a$$

$\sin 3a = 3\cos^2 a \sin a - \sin^3 a = \sin a (3\cos^2 a - \sin^2 a) = \sin a (4\cos^2 a - 1)$

primul determinant se poate scrie:

$$\Delta = 2 \sin a \sin b \sin c \begin{vmatrix} 1 & \cos a & 4\cos^2 a - 1 \\ 1 & \cos b & 4\cos^2 b - 1 \\ 1 & \cos c & 4\cos^2 c - 1 \end{vmatrix}.$$

Descompunând determinantul din membrul al doilea, într'o diferenţă de doi determinanţi, unul este nul ca având două coloane identice; şi Δ devine egal cu:

$$\Delta = 8 \sin a \sin b \sin c \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos^2 a \\ 1 & \cos b & \cos^2 b \\ 1 & \cos c & \cos^2 c \end{vmatrix}.$$

Determinantul din membrul al doilea fiind un determinant VANDERMONDE:

$\Delta = 8 \sin a \cdot \sin b \cdot \sin c \cdot (\cos a - \cos b) \cdot (\cos b - \cos c) \cdot (\cos c - \cos a)$.

Şi în fine ţinând seamă că:

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$$

rezultă:

$$\Delta = -64 \sin a \sin b \sin c \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2} \sin \frac{b+c}{2} \sin \frac{b-c}{2} \sin \frac{c+a}{2} \sin \frac{c-a}{2}.$$

Analog:

$$\Delta_1 = 2\cos a \cdot \cos b \cdot \cos c \begin{vmatrix} 1 & \sin a & 1-4\sin^2 a \\ 1 & \sin b & 1-4\sin^2 b \\ 1 & \sin c & 1-4\sin^2 c \end{vmatrix} =$$

$$= -8\cos a \cdot \cos b \cdot \cos c \begin{vmatrix} 1 & \sin a & \sin^2 a \\ 1 & \sin b & \sin^2 b \\ 1 & \sin c & \sin^2 c \end{vmatrix} =$$

$$= -8\cos a \cos b \cos c (\sin a - \sin b)(\sin b - \sin c)(\sin c - \sin a)$$

$$\Delta_1 = -64\cos a \cos b \cos c \sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{b-c}{2}\cos\frac{b+c}{2}\sin\frac{c-a}{2}\cos\frac{c+a}{2}.$$

Din expresiile căpătate pentru Δ şi Δ_1, se vede imediat că:

$$\frac{\Delta}{\Delta_1} = \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c \operatorname{tg}\frac{a+b}{2}\operatorname{tg}\frac{b+c}{2}\operatorname{tg}\frac{c+a}{2}.$$

PREDUŢA D. BUNGEŢEANU.

Soluţii analoage s'au primit dela: D-şoara DORINA FABIUS, Domnii: N. N. ALDEA, C. CHIRIAC, P. DOBRESCU, VINTILĂ GEORGESCU, HARALAMB P. IONESCU-BISS, IOAN LENCÓ, M. MĂNESCU, EM. I. MAREŞ, M. MARGULIUS, S.-LT. MARIN P. TICA-GALL, D. D. MAVRODIN, EM. MEREUŢĂ, P. MAZILU, M. LEONTE, A. NEGREA, NUBĂR ARTAKI-ACIK, S.-LT. I. C. PAREPEANU, C. PÂRVULESCU, M. PREDOESCU, I. N. SAGER, S.-LT. I. C. SAVIN, MIHAIL-STĂNEŞTI, MARTIN ZIFF şi un ANONIM.

Notă. D-l S.-LT. I. C. SAVIN a enunţat şi tratat problema şi sub forma generală:

Dacă Δ *şi* Δ_1 *reprezintă determinanţii*

$$\begin{vmatrix} \sin a_1 & \sin 2a_1 \ldots \sin n a_1 \\ \sin a_2 & \sin 2a_2 \ldots \sin n a_2 \\ \sin a_3 & \sin 2a_3 \ldots \sin n a_3 \\ \vdots & \vdots \\ \sin a_n & \sin 2a_n \ldots \sin n a_n \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \cos a_1 & \sin 2a_1 & \cos 3a_1 \ldots \\ \cos a_2 & \sin 2a_2 & \cos 3a_2 \ldots \\ \cos a_3 & \sin 2a_3 & \cos 3a_3 \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos a_n & \sin 2a_n & \cos 3a_n \ldots \end{vmatrix}$$

avem relaţiunea:

$$\frac{\Delta}{\Delta_1} = \operatorname{tg} a_1 \cdot \operatorname{tg} a_2 \ldots \operatorname{tg} a_n \cdot \operatorname{tg} \frac{a_2+a_1}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{a_3+a_1}{2} \ldots \operatorname{tg} \frac{a_n+a_1}{2} \ldots \operatorname{tg} \frac{a_n+a_{n-1}}{2}.$$

(Când $n = 2p$, ultima coloană din Δ_1, fiind formată din sinusuri, iar când $n = 2p+i$ din cosinusuri).

COLONEL LITEANU.

PROBLEMA 4183. *In triunghiul* ABC, *fie* H *ortocentrul* A', B', C' *picioarele înălţimelor iar* M_a, M_b, M_c *mijloacele segmentelor* AH, BH, CH. *Dreptele* $M_a B'$, $M_a C'$ *întâlnesc a doua oară cercurile* CA'B', BA'C' *respectiv în* A_c, A_b. *La fel obţinem punctele* B_a, B_c; C_b, C_a. *Să se arate că dreptele* $A_b A_c$, $B_c B_a$, $C_a C_b$ *trec prin acelaş punct.*

C. COŞNIŢĂ.

Soluţie dată de D-l I. CURCHI (Student, Bucureşti).

Unghiurile B', C' fiind drepte, patrulaterul AB'HC' este înscris într'un cerc cu centrul în M_a. Deci triunghiul $M_a B'C'$ este isoscel şi din cercul AB'HC' se scoate

$$(1) \qquad \sphericalangle M_a B'C' = \sphericalangle M_a C'B' = \frac{\pi - 2A}{2} = \frac{\pi}{2} - A.$$

Apoi din cercul HBA_bC' se deduce

$$(2) \qquad \sphericalangle HBC' = \sphericalangle HA_b C' = \sphericalangle HA_b M_a,$$

In fine din triunghiul dreptunghic AB'B se scoate

$$(3) \qquad \sphericalangle HBC' = \frac{\pi}{2} - A.$$

Comparând (1), (2) şi (3), rezultă

$$\sphericalangle M_a C'B' = \sphericalangle M_a A_b H$$

ceeace arată că $HA_b \parallel C'B'$. Observăm la fel că

$$\sphericalangle M_a B'C' = \sphericalangle B'CH = \sphericalangle B'A_c H = \frac{\pi}{2} - A$$

rezultă că şi $HA_c \parallel B'C'$, ceeace arată că A_b, H, A_c sunt colineare.

La fel se arată că $B_c B_a$, $C_a C_b$ trec prin H.

Notă. 1°. Au rezolvat foarte bine problema arătând că A_cH, HA_b sunt în prelungire ca făcând unghiurile A_cHA', A_bHA' suplimentare, sau unghiurile A_cHA', A_bHA egale, D-şoara MARGARETA LEBER (Studentă Cluj) şi D-nii: A. E. BĂDESCU (S.-Lt. Reg. 2 Art. grea); N. N. MIHĂILEANU, I. I. PETRESCU (Student, Bucureşti); C. IVĂNESCU (Bacalaureat, Bârlad); C. N. TRUFINESCU (Lic. Bălţi); V. CEAUŞESCU (Lic. militar, Iaşi).

2°. D-l M. MARGULIUS (Bucureşti) a dat o soluţie bună bazându-se pe o problemă din *Culegere de Probleme, de geometrie.*

3°. D-şoara PREDUŢA BUNGEŢIANU a dovedit paralelismul dreptelor $C'B'$, A_bA_c utilizând relaţiunile

$$M_aH \times M_aA' = M_aA_c \times M_aC' = M_aM_b \times M_aB'.$$

Trebue menţionat în mod special figurile admirabile cu care d-şoara PREDUŢA BUNGEŢIANU îşi însoţeşte soluţiile problemelor de geometrie.

4°. Reciproca problemei este adevărată. *Dacă prin* H *se duce o paralelă la* $B'C'$ *până taie în* A_b, A_c *cercurile* $BA'HC'$ *şi* $CA'HB'$, *atunci* A_bC' *şi* A_cB' *trec prin mijlocul* M_a *al lui* AH.

Din cercurile $BA'HC'$, $CA'HB'$ şi $BC'B'C$ se scoate

$$\sphericalangle C'A_bH = \sphericalangle C'BH = \sphericalangle C'CB' = \sphericalangle HA_cB' = \frac{\pi}{2} - A$$

şi dacă A_bC', A_cB' se întâlnesc în un punct M'_a, atunci

$$\sphericalangle M'_aC'B' = \sphericalangle M'_aB'C' = \frac{\pi}{2} - A.$$

Cum

$$\sphericalangle M_aC'B' = \sphericalangle M_aB'C' = \frac{\pi}{2} - A$$

rezultă că M'_a se confundă cu M_a.

5°. *Fie* A_b, A_c *intersecţiile dreptelor* M_aC', M_aB', *cu paralelă dusă şi din* H *la* $C'B'$. *Să se demonstreze ca* A_b. A_c *se găsesc pe cercurile* $BA'C'$, $CA'B'$.

Proprietatea e imediată, dacă se observă că

$$\sphericalangle C'A_bH = \frac{\pi}{2} - A - \sphericalangle C'BH.$$

6°. Se observă că A_b, A_c sunt proecţiile lui B şi C pe paralela dusă din H la $B'C'$.

Se pot demonstra toate proprietăţile reciproce plecând de la această construcţie a lui A_b, A_c.

7°. *Lungimile* M_aA_b, M_aA', M_aA_c *sunt egale.*

In patrulaterele înscrise $HA'A_bC'$, HBA_bC' se vede că

$$\sphericalangle HA'A_b = \sphericalangle HC'M_a = \sphericalangle HBA_b.$$

Dar

$$\sphericalangle HC'M_a = \sphericalangle B'C'M_a + \sphericalangle B'C'H = \sphericalangle B'C'M_a + \sphericalangle HC'A'$$

şi cum

$$\sphericalangle HC'A' = \sphericalangle HA_bA'$$

rezultă

$$\sphericalangle HA'A_b = \sphericalangle M_aA'A_b = \sphericalangle M_aA_bA'$$

deci triunghiul M_aA_bA' este isoscel şi M_aA', M_aA_b sunt egale.

Din această proprietate rezultă imediat că $A'A_b$ *este perpendicular pe* AB, ceea ce dă o nouă construcţie a punctului A_b.

Figura pune în evidenţă şi alte proprietăţi interesante care se pot demonstra numai prin relaţiuni de unghiuri.

GH. B.

---

*PROBLEMA 4208. *Să se arate că ecuaţia:*

$$12x^2 - 8(a+b+c)x + a^2 + b^2 + c^2 + 3ab + 3bc + 3ac = 0$$

are rădăcinile reale şi cuprinse în intervalul (a , c) *presupunând că:* $a \leqslant b \leqslant c$.

N. C.

Soluţie: Fie

$$f(x) \equiv 12x^2 - 8(a+b+c)x + a^2 + b^2 + c^2 + 3ab + 3bc + 3ac.$$

Realizantul ecuaţiei este:

$$R = 16(a+b+c)^2 - 12(a^2+b^2+c^2+3ab+3ac+3bc) =$$

$$4(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = 2[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2] \geqslant 0$$

deci ecuaţia are rădăcini reale dacă a, b, c sunt reali.

Pe de altă parte avem:

$$f(a) = 5a^2+b^2+c^2-5ab-5ac+3bc = (2a-b-c)^2+(b-a)(c-a) > 0$$

$$f(c) = 5c^2+a^2+b^2+3ab-5bc-5ac = (2c-a-b)^2+(c-a)(c-b) > 0.$$

Prin urmare a şi c sunt în afara intervalului (x_1 , x_2) determinat de cele două rădăcini. E uşor de văzut că acest interval (x_1 , x_2) se găseşte cuprins în intervalul (a, c).

Să calculăm pentru asta $f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$,

$$f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) = -\frac{(a+b+c)^2}{3} + ab + bc + ca$$
$$= -\tfrac{1}{3}\left[a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca)\right]$$
$$= -\tfrac{1}{6}\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right] < 0.$$

Prin urmare, $\frac{a+b+c}{3}$ care este în interiorul intervalului (a, c) căci

$$a < \frac{a+b+c}{3} < c,$$

este la rândul lui în interiorul intervalului (x_1, x_2). Q. E. D.

Soluție analoagă, cu erori de calcul, D-l Mircea L. Negrea.

Aplică teorema lui Rolle, D-l Em. Mereuță.

D-l N. N. Aldea demonstrează partea a doua calculând:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = (c-a)(c-b) \geqslant 0\,;\, f\left(\frac{a+c}{2}\right) = (b-a)(b-c) \leqslant 0$$

și

$$f\left(\frac{b+c}{2}\right) = (a-b)(a-c) \geqslant 0$$

și restrânge astfel intervalul în care se găsesc cele două rădăcini la

$$\left[\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}\right].$$

D-l Panait C. Mazilu aplică ecuației transformarea:

$$y = \frac{x-a}{x-c}$$

și reduce problema la a arăta că rădăcinile ecuației transformate sunt ambele negative.

Soluții bune dar mult mai lungi dela D-nii: Avram L. Cohn, Mircea Mănescu și D. Mavrodin (elevii lic. M. Eminescu); Sub-Locotenenții Avram N. Constantin și Aurel Bădescu; Cezar Ivănescu (stud. Iași); V. Ceaușescu și C. Chiriac (elevi lic. Militar Iași); Martin S. Ziff (stud. Buc.).

Observaţie: Ecuaţia aceasta este un caz particular din o clasă întreagă de ecuaţii cu rădăcini reale:

Dacă $Q(x) = 0$ este un polinom de gradul k având toate rădăcinile reale, atunci polinomul de gradul n,

$$P_n(x) = \frac{d^{(k-1)n}}{dx^{(k-1)n}} [Q^n(x)]$$

are toate rădăcinile reale şi situate între rădăcinile ecuaţiei

$$Q(x) = 0.$$

Asupra acestor polinoame am insistat mai de aproape în un memoriu din «Arta Matematică» tom 61, p. 135.

N. C.

PROBLEMA 4220. I. *Să se calculeze prima diferenţială totală a funcţiunii*

$$u = \log \operatorname{tg} \frac{x-y}{x+y},$$

baza logaritmului fiind e.

II. *Presupunând că* x *şi* y *sunt rădăcinile ecuaţiei*

$$(p^2 - q^2) z^2 - (p^2 - 2pq - q^2) z - pq = 0$$

şi presupunând că p *şi* q *sunt la rândul lor variabile independente, să se calculeze expresiunea diferenţialei totale a lui* u.

ION S. ANTONIU.

Soluţie dată de Domnişoara MARGARETA LÉBER şi de Domnii: N. N. ALDEA, SUB.-LT. C. N. AVRAM, CEZAR IVĂNESCU, EM. I. MAREŞ, MIRCEA-LEONTE A. NEGREA şi MARTIN S. ZIFF.

I. Notând cu *du* prima diferenţială totală a funcţiunii date, avem

$$du = u'_x\, dx + u'_y\, dy$$

u'_x şi u'_y fiind derivatele parţiale ale funcţiunii u în raport cu x şi y. Aplicând regulile cunoscute de derivare se găseşte:

$$u'_x = \frac{4y}{(x+y)^2 \sin 2\frac{x-y}{x+y}} \qquad u'_y = \frac{-4x}{(x+y)^2 \sin 2\frac{x-y}{x+y}}$$

$$\therefore \quad du = \frac{4(ydx - xdy)}{(x+y)^2 \sin 2\frac{x-y}{x+y}} . \tag{1}$$

II. Din ecuaţia dată se deduce uşor

$$x+y = \frac{p^2 - 2pq - q^2}{p^2 - q^2} \qquad x-y = \frac{p^2+q^2}{p^2-q^2} .$$

Aşa că, în acest caz avem

$$u = \log \operatorname{tg} \frac{p^2+q^2}{p^2 - 2p\ q - q^2}$$

şi trebue să calculăm

$$du = u'_p\, dp + u'_q\, dq.$$

Calculând derivatele parţiale după regulile cunoscute şi înlocuind în expresiunea de mai sus găsim

$$du = 4\frac{p^2+2pq-q^2}{(p^2-2pq-q^2)^2} \cdot \frac{qdp - pdq}{\sin 2\frac{p^2+q^2}{p^2-2pq-q^2}} .$$

Observaţiuni: 1°. Se putea ajunge la expresiunea (2 şi astfel: Se rezolvă ecuaţiunea dată şi se obţin valorile lui x şi y

$$x = \frac{p}{p+q} \qquad y = \frac{q}{p-q}$$

care se introduc în expresiunea (1). Calculându-se diferenţialele totale dx şi dy în funcţiune de noile variabile, şi făcând toate calculele şi reducerile posibile, se regăseşte expresiunea (2).

2°. Dacă luăm

$$x = -\frac{q}{p-q} \quad \text{şi} \quad y = \frac{p}{p+q}$$

se obţine o expresiune analoagă cu (2) însă de semn schimbat. Aceasta se petrece şi în cazul primei soluţiuni dacă schimbăm pe x şi y între ei.

3°. Au rezolvat bine prima parte a problemei Domnişoara PREDUŢA D. BUNGEŢEANU, Domnii SUB.-LT. AUREL BĂDESCU, IOAN CURCHI şi CONST. ŢIU. La partea 2-a, D-lor au greşit la calcule, obţinând rezultate cu totul diferite.

I. S. A.

PROBLEMA 4293. *Se consideră în acelaşi plan un triunghiu* ABC *şi o dreaptă* Δ. *Dreapta* Δ *întâlneşte latura* AB *în* B′ *şi latura* AC *în* C′. *Fie* B″ *şi* C″ *picioarele perpendicularelor coborîte din* B *şi* C *pe* Δ, B_1 *şi* C_1 *mijloacele segmentelor* BB′, CC′ *şi* A′ *punctul de întâlnire al dreptelor* B″B_1 *şi* C″C_1.

1°. *Să se arate că* $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B''A'C''$.

2°. *Să se găsească locul geometric al punctului* A′, *când dreapta* Δ *şi punctele* B *şi* C *sunt fixe, iar vârful* A *descrie un cerc trecând prin* B *şi* C.

3°. *Să se găsească locul geometric al punctului* A′, *când dreapta* Δ *şi punctele* B *şi* C *sunt fixe, iar* B *descrie o dreaptă, ce trece prin* B.

4°. *Să se găsească locul geometric al punctului* A′, *când triunghiul* ABC *este fix, iar dreapta* Δ *se deplasează paralel cu o direcţie fixă în plan.*

N. G. BOTEA.

Soluţie dată de D-nii: M. ANASTASESCU (Bacalaureat, Târgovişte), SUB.-LT. A. EM. BĂDESCU (Fontainebleau), C. BUDEANU (Şc. Politehnică, Bucureşti), C. BURSAN şi V. CEAUŞESCU (Lic. Militar, Iaşi), TH. COCEA, WILHELM CSEKE (Student, Cluj), P. DOBRESCU (Lic. Militar N. Filipescu), C. GAVRILESCU (Lic. Militar Iaşi), ALFRED GEIER (Student Cluj), SUB.-LT. G. GHIUŢĂ (din geniu), V. GRIGORESCU (Lic. Militar N. Filipescu), CEZAR IVĂNESCU (Iaşi), ALEXANDRU MATEI (Absolvent Şc. sup. de meserii Bucureşti), D. MEHEDINŢI (Lic. Militar Tg.-Mureş), OCTAV MIHALCEA (Buzău), MIH. MUSCELEANU (Lic. M. Eminescu Bucureşti), MIRCEA L. NEGREA (Brăila), PANAIT MAZILU (Şc. Politehnică Bucureşti), SUB.-LT. I. C. PAREPEANU (din geniu), TRAIAN PREDOESCU (Lic. Militar Craiova), MIHAI PROCOPIESCU (Elev), GEORGE SILAŞ (Student Cluj), MIKHAÏL STĂNEŞTI, AL. STOICA (Lic. «Marele Voevod Mihai» Bucureşti), MARIN NĂSTASE şi MIRCEA NICHIFOR.

1°. In triunghiurile dreptunghice BB′B″ , CC′C″ dreptele BB_1 şi CC_1 sunt mediane. Rezultă:

$$\sphericalangle B_1B''B' = \sphericalangle B_1B'B'' = \sphericalangle AB'C'$$

$$\sphericalangle C_1C''C' = \sphericalangle C_1C'C'' = \sphericalangle AC'B'.$$

Triunghiurile A'B"C", AB'C' sunt asemenea, căci au câte două unghiuri egale. Deci şi celelalte unghiuri ale lor vor fi egale:

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle B''A'C''.$$

2°. Dreapta Δ este fixă, unghiul A constant, punctele B şi C fixe. Deci punctele B" şi C" sunt fixe, iar unghiul B"A'C" constant. Locul lui A' este un cerc trecând prin B" şi C".

3°. Δ este fixă, punctele B şi C sunt fixe, iar A se mişcă pe o dreaptă trecând prin B. Deci punctele B" şi B_1 sunt fixe, iar A' se mişcă pe dreapta fixă $B''B_1$.

4°. Triunghiul ABC e fix. Δ este paralelă cu o direcţie fixă în plan. Triunghiul B"C"A' este asemenea cu triunghiul fix ABC, iar B"C" este constantă ca direcţie şi mărime. Locul lui A este o dreaptă Δ' perpendiculară pe Δ.

Observaţiuni interesante făcute de D-l TH. COCEA vor apare sub formă de notă.

PROBLEMA 4324. *Bisectoarele interioare ale unui triunghiu* ABC, *taie cercul circumscris triunghiului în* A_1, B_1, C_1 *şi fie:*

$$C_2 \equiv (CC_1 , A_1B_1) , B_2 \equiv (BB_1 , A_1C_1) , A_2 \equiv (AA_1 , B_1C_1).$$

Să se demonstreze că triunghiul $A_2B_2C_2$ *este egal cu complementarul triunghiului* ABC.

GH. VASILIU.

Generalizare şi *soluţie* dată de D-nul N. N. MIHĂILEANU (Student Bucureşti):

P fiind un punct arbitrar în planul triunghiului, există o conică (C), circumscrisă — transformată prin puncte reciproce a polarei triliniare a reciprocului punctului, — care formează cu laturile triunghiului, arii egale cu patratele ariilor formate de P în mod analog— astfel ca, în notaţiile problemei, triunghiul $A_2B_2C_2$ să fie egal cu complementarul triunghiului de referinţă.

(α, β, γ) fiind coordonatele baricentrice ale lui P ecuaţia conicei va fi:

$$(C) \quad \frac{\alpha^2}{x} + \frac{\beta^2}{y} + \frac{\gamma^2}{z} = 0$$

iar coordonatele punctului A_1 unde AP întâlneşte conica (C) vor fi:

$$-\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma} , \beta , \gamma ;$$

prin permutări circulare găsim şi coordonatele punctelor B_1 şi C_1. Raportul k în care B_1C_1 de ecuaţie

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ \alpha & -\frac{\beta^2}{\gamma+\alpha} & \gamma \\ \alpha & \beta & -\frac{\gamma^2}{\beta+\alpha} \end{vmatrix} = 0$$

împarte segmentul AP, este — cu diferenţa factorului $(\alpha+\beta+\gamma)$ — dat de câtul:

$$\frac{\Delta_{CA}}{\Delta_{CP}}$$

unde Δ_{CM} este expresia ce se obţine înlocuind în Δ pe x, y, z prin coordonatele lui M, sau:

$$\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\begin{vmatrix} -\frac{\beta}{\gamma+\alpha} & 1 \\ 1 & -\frac{\gamma}{\alpha+\beta} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{\beta}{\gamma+\alpha} & 1 \\ 1 & 1 & -\frac{\gamma}{\alpha+\beta} \end{vmatrix}} = -\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma} \cdot$$

Deci $k = 1$, adică punctele A_2, B_2, C_2 sunt mijloacele segmentelor AP, BP. CP. Aşa dar triunghiul $A_2B_2C_2$ este egal cu complementarul lui ABC. c. c. t. d.

In cazul enunţului P (a, b, c), conica devine cercul circumscris.

De altfel în acest caz, propietatea se demonstrează direct. Se urmăreşte pe o figură egalităţile de unghiuri

$$\sphericalangle(AA_1, B_1C_1) = \tfrac{1}{2}(\text{măs. arc. } AB_1 + \text{măs. arc } BC_1 + \text{măs. arc. } BA_1) = \tfrac{1}{2}(\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C) = 90^0$$

deci dreptele AA_1 şi B_1C_1 sunt $\perp$. Pe de altă parte:

$$\sphericalangle(AI, AB_1) = \sphericalangle B_1BC + \sphericalangle CAA_1 = \sphericalangle ABB_1 + \sphericalangle BAA_1 = 180^0 - \sphericalangle AIB = \sphericalangle AIB_1$$

deci triunghiul AB_1 este isoscel; dar B_1A_2 este înălţimea din B_1;

deci axă de simetrie: $AA_2 = A_2I$ etc... ABC este omotetic cu ABC în raportul $\frac{1}{2}$.

Au rezolvat problema Dnii: Prof. I. N. SAGER, P. D. BUNGEŢIANU, CEAUŞESCU VASILE, PANAIT C. MAZILU, NEGREA A. MIRCEA-LEONTE, DAN M., MIHALACHE V. IOAN, OCT. C. PETRESCU, IONESCU D-TRU, VINTILĂ GRIGORESCU, PROCOPIESCU MIHAIL, PREDOESCU I. MARIN, ŞABAC ION, ARNO HILF, METEA S. VIRGIL, FENECHI ALEXANDRU, MATEI I. IOAN, VASU A. NIC., GREAB I. VALENTIN, STOIAN I. şi MEHEDINŢI D. D-TRU. S'a primit o soluţie îngrijită ca formă însă necompletă şi plină cu observaţiuni literare (!?) – dela D-nul C. IVĂNESCU.

PROBLEMA 4327. *Notaţiunile fiind cele obişnuite, să se demonstreze identitatea*

$$\frac{(r_a - r_b)^3 + (r_b - r_c)^3 + (r_c - r_a)^3}{(h_b - h_a)^3 + (h_c - h_b)^3 + (h_a - h_c)^3} = 2\frac{R^2}{r^2}.$$

SUB.-LT. I. C. SAVIN.

1. *Soluţie* dată de Domnii: CEZAR IVĂNESCU, GR. V. MARTEŞ, MIRCEA-LEONTE A. NEGREA, OCTAVIAN C. PETRESCU şi MARIN I. PREDOESCU.

Se ştie că, dacă $x + y + z = 0$, atunci

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$$

dacă facem pe rând

$$x = r_a - r_b \quad y = r_b - r_c \quad z = r_c - r_a$$

$$x = h_b - h_a \quad y = h_c - h_b \quad z = h_a - h_c$$

şi ţinând seama de relaţiile

$$r_a = \frac{S}{p-a}, \ldots; h_a = \frac{2S}{a}, \ldots; S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{abc}{4R} = pr$$

vom avea succesiv:

$$\frac{\Sigma (r_a - r_b)^3}{\Sigma (h_b - h_a)^3} = \frac{(r_a - r_b)(r_b - r_c)(r_c - r_a)}{(h_b - h_a)(h_c - h_b)(h_a - h_c)}$$

$$= \frac{S^3 (a-c)(b-a)(c-b)}{\dfrac{(p-a)^2 (p-b)^2 (p-c)^2}{8S^3 (a-c)(b-a)(c-b)}} = \frac{a^2 b^2 c^2}{8(p-a)^2 (p-b)^2 (p-c)^2}$$

$$= \frac{p^2 a^2 b^2 c^2}{8S^4} = \frac{16 p^2 R^2 S^2}{8S^4} = 2\frac{p^2 R^2}{S^2} = 2\frac{p^2 R^2}{p^2 r^2} = 2\frac{R^2}{r^2}$$

c. c. t. d.

2. *Soluţie* dată de Domnii: VASILE CEAUŞESCU, IOAN S. MERCUREANU, IOAN V. MIHALACHE şi GHEORGHE RUSU (toţi elevi ai Liceului Militar dela Iaşi).

In *Revista Matematică* din Timişoara Nr. 11, (Ianuarie 1934), Problema 1176, se stabileşte relaţia

$$\Sigma\,(r_a - r_b)^3 = 3\,\frac{p}{r}\,(b-a)\,(c-b)\,(a-c). \qquad (1)$$

Să calculăm acum $\Sigma\,(h_b - h_a)^3$.

Ţinând seama de relaţiunile din prima soluţie, avem succesiv

$$\Sigma(h_b-h_a)^3 = 3(h_b-h_a)(h_c-h_b)(h_a-h_c) = 3\,\frac{8S^3\,(a-c)(b-a)(c-b)}{a^2b^2c^2}$$

$$= 3\,\frac{8S^3(a-c)\,(b-a)\,(c-b)}{16R^2S^2} = 3\,\frac{pr\,(a-c)\,(b-a)\,(c-b)}{2R^2}. \qquad (2)$$

Impărţind (1) cu (2) obţinem tocmai relaţiunea căutată.

3. Alte soluţiuni, mai lungi, date de Domnii: WILHELM CSEKE şi H. GEIER (Studenţi Cluj), CONST. CHIRIAC şi VIRGIL I. COANDĂ (Şcoala Pregătitoare de Ofiţeri), DIMITRIE D. MAVRODIN (Liceul M. Eminescu), HAR. GH. FLORESCU şi ANTON I. MITACHE (Elevi Liceul Militar Chişinău), VASILE IG. GODEANU (Elev Liceul Militar Craiova) şi APOSTOL I. VALERIAN, BOTEZATU P. GH., CĂŞNEANU CAROL, HARET I. CONST., ILIESCU B. DUMITRU, NICOARĂ D. CONST., PETRE O. TUDOR, POPESCU VLAD, SILVICI VERONCA, TIBUL I. ARMĂRICĂ, TRĂSNITU N., VASILESCU C. NICOLAE, VASILIU A. CONST. şi VASILIU I. MIRCEA toţi elevi în clasa 7-a a Liceului Militar dela Cernăuţi.

Observaţiune. Constatăm o „strânsă" colaborare între elevii clasei a 7-a a Liceului Militar dela Cernăuţi, colaborare atât de strânsă încât şi redijarea soluţiilor este făcută pe acelaşi tipic! Este de dorit mai multă individualitate şi cât mai puţină standardizare pentru ca foloasele să fie maxime.

I. S. A.

EXERCIŢII

19. Să se găsească un cub de cinci cifre *abcde*, în care

$$cde = n^3 \quad \text{şi} \quad a = b + c + d + e.$$

TR. M. PREDOESCU.

R. *cde* fiind cub perfect poate fi unul din numerele 125, 216, 343, 512, 729; din acestea alegând pe acelea care au suma cifrelor mai mică sau egală cu 9, şi ţinând seamă că $a = b + c + d + e$, cubul căutat este unul din numerele:

80125, *91125*, 90216, 80512, 91512.

Extrăgându-le rădăcina cubică găsim unica soluţie: $91125 = 45^3$.

PROBLEME PROPUSE

4250 [1]). In ce caz o placă de metal îndoită astfel ca marginea ei să fie o spirală logaritmică poate să se rostogolească pe un plan orizontal fără a luneca.

A. PÂRVU.

4290 [2]). Să se determine mişcarea plană pentru care avem în fiece moment distanţa între extremităţile vectorilor viteză şi acceleraţie dată de expresia $(m^2 \pm n^2)$, iar suprafaţa triunghiului determinat de vectorii viteză şi acceleraţie este egală cu jumătatea produsului mn.

Cantităţile m şi n sunt două numere pozitive date.

A. PÂRVU.

4371. Să se arate că nu există niciun patrat perfect care să fie scris numai cu cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6, luate câte o singură dată. Se mai pot găsi alte grupe consecutive de şase cifre care să conducă la aceeaşi imposibilitate?

I. IONESCU.

4372. Să se găsească numărul de două cifre al cărui patrat şi cub cuprind, la un loc, toate cifrele, luate o singură dată.

MAIOR I. LINTEŞ.

4373. Dacă se împarte 10^5 printr'un număr N de trei cifre, partea întreagă a câtului este răsturnatul lui N.

Care e acel număr?

ULPIU M. FLORESCU.

4374. Considerăm triunghiul ABC şi fie A'B'C' triunghiul său ortic şi P un punct arbitrar pe cercul AB'C'. Se proiectează punctul P în α, β, γ pe laturile triunghiului de referinţă şi în α', β', γ' pe laturile triunghiului ortic. Centrul cercului $(\alpha'\beta'\gamma')$, aparţine cercului $(\alpha\beta'\gamma')$.

N. N. MIHĂILEANU.

4375. Intr'un triunghiu, există relaţia

$$\sum \frac{bc}{\alpha^2} = 2 + \frac{R}{r}$$

1) Problema propusă sub acest număr la pag. 320 în volumul XXXVIII, se anulează şi se înlocueşte cu prezenta.

2) Problema propusă cu acest număr la pag. 480 a volumului XXXVIII, se anulează şi se înlocueşte cu prezenta.

notațiile fiind cele obișnuite, iar α, β, γ semnificând segmentele de bisectoare interioare, corespunzând vârfurilor A, B, C, cuprinse între vârfuri și laturile opuse.

C. IONESCU-BUJOR.

4376. Fie l_a, l_b, l_c lungimile bisectoarelor exterioare, limitate la laturile $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ ale unui triunghiu; O, I, H centrele cercurilor circumscris, înscris și ortocentru acestui triunghiu. Să se demonstreze relația dintre arii.

$$\frac{OIH}{ABC} = \frac{a\,b\,c}{l_a\,l_b\,l_c}.$$

V. THÉBAULT.

4377. Să se discute ecuațiunea

$$3\,(3a - b)\,x^2 + 6\,(a + b)\,x + a + b^3 = 3b\,(ab + 1)$$

după valorile relative ale lui a și b.

COL. GH. BUICLIU.

4378. Să se stabilească identitățile

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\sin(2k+1)\,a}{\cos^2 ka\,\cos^2(k+1)\,a} = \frac{\operatorname{tg}^2(m+1)\,a - \operatorname{tg}^2 a}{\sin a}$$

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\sin(2k+1)\,a}{\sin^2 ka\,\sin^2(k+1)\,a} = \frac{\operatorname{cotg}^2 a - \operatorname{cotg}^2(m+1)\,a}{\sin a}.$$

CEZAR IVĂNESCU.

4379. Să se rezolve ecuația

$$(\sin x + \cos x + \operatorname{tg} x)^3 = \sin^3 x + \cos^3 x + \operatorname{tg}^3 x.$$

BOIAN IOAN.

4380. O minge de Foot-Ball de volum și masă date, isbește cu viteza v un perete vertical și lasă o pată circulară de rază r.

Presiunea la care este umflată mingea fiind cunoscută, se cere să se găsească raza r.

AL. A. ROȘU.

Începând cu N-rul 7/XXXIX „*Gazeta Matematică*" va apare în 48 pagini, prețul abonamentului rămânând însă același.

Dela apariția ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Anca I. (4318); *Avram N. P. C. Subloc.* (4330); *Bădescu Em. A. Subloc.* (4318); *Bardas G.* (4318); *Blum I. S.* (4318); *Boiangiu I. G.* (4125); *Bucurescu I. V.* (4318); *Budeanu C.* (4346); *Buhăescu M. I.* (4317, 18); *Bursan C.* (4317, 18); *Caracudovici M.* (4349); *Cardara Gh.* (4328); *Ceaușescu V.* (4318); *Chiriac I. C.* (4318, 46, 48, 67); *Coandă I. V.* (4318); *Coltofeanu A.* (4187); *Cateanu I. V.* (4317, 18); *Cozma V.* (4318); *Cseke W.* (4294, 99); *Dan Marin* (4328, 46); *Diaconescu G. D.* (4317); *Eftimiu V. T.* (4318); *Fenichi A.* (4318); *Finkelstein Jean* (4346); *Florescu G. H.* (4318); *Gaiu A.* (4318); *Gheorghiu V.* (4317, 18, 48); *Ghiban N.* (4317); *Ghișoiu P.* (3900); *Godeanu I. V.* (4318); *Greab I. V.* (4318); *Grigorescu V.* (4244, 305, 17, 46); *Haimer C.* (4318); *Hornstein S.* (4346); *Ionescu C. Emil* (4276, 313, 18); *Ivanciu Al.* (4317); *Klingher D. O.* (4318, 46); *Lebădă I. D.* (4317, 18, 34, 55, E, P); *Mănac M.* (4312, 46); *Margulius M.* (3948); *Martes V. Gr.* (4318); *Mavrodin D. D.* (4084, 88, 89, 196, 232, 46, 58, 307, 18, 29, 46, 67); *Mazilu C. P.* (4199, 219, 38, 346, 67); *Mercureanu S. I.* (4317, 18); *Mereuță Em.* (4318, 35); *Mihăileanu N. N.* (3509, 74, 760, 70, 900); *Mihalache I.* (4317), *Milu I. N.* (4318, 46, 67); *Moldovan L.* (4318); *Moscovici G.* (4318); *Metea V.* (4318); *Năstase M.* (4125, 234, 51, 329); *Negoiță C.* (4317, 18); *Negrea A. M.-L.* (2346, 3900, 4247, 318, 30, 46, 49, 67); *Neumann Maria* (N); *Panait C. M.* (4307); *Panaite N. T.* (4318); *Parancea I. G.* (4318); *Petrescu I. I.* (4318); *Pomponiu L. L.* (4318); *Popescu M. I.* (4318); *Postelnicescu M.* (4334, P); *Predoescu I. M.* (4318); *Presadă P.* (4187); *Procopiescu M.* (4302, 13, 18, 29); *Roșca S. G.* (3948); *Rucu V. G.* (4318); *Rum V. G.* (4317); *Sabac Ion* (4305); *Sager N. I.* (4330, 48, 53, N); *Sârbu S. Vl.* (4318, 30, 53); *Săvulescu A. C.* (4317, 18); *Seimeanu T.* (4329); *Silaș Gh.* (4334, 46, 48); *Stănculescu G.* (4318); *Stoicescu T.* (4318, 67, P); *Stupkanu E.* (4317, 18); *Tanga V. C.* (4317); *Untea R. P.* (4276, 313); *Vasilescu M.* (4317, 18, 48); *Vasu N.* (4318); *Vonica I. I.* (4318); *Stoian I.* (4318); *Thébault V.* (N, P).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât și cele de propus de **geometrie**, *a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.*

Manuscrisele se vor scrie **pe o singură parte a foii și nu se vor tratà mai multe chestiuni diferite pe aceiași foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă*, împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală*, iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică**, ca pe o foaie de caet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exercițiile, recreațiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărți sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

«Gazeta Matematică» vinde ani completi broşaţi cu preţul de 400 lei volumul, afară de volumele: X, XVII, XVIII, XIX, XX şi XXI care se vând cu preţul de 500 lei volumul.

Volumele: I, XV şi XXV sunt epuizate.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **N. Abramescu,** *Lecţiunile de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediţia IV revăzută şi adăogită,* 1924 (Epuizată).

3. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de mecanică şi geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

4. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă şi cosmografie* (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu,** *Tratat de geometrie analitică,* Fascicola I *Ediţia II revăzută şi adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—
Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).
Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).
Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150,—

6. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10,—

7. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. Lei 180,—

8. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

9. **G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de geometrie* Lei 150,—

La aceste preţuri se vor adăogà taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II) Lei 150,—

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamaţiunile şi cererile pentru cărţi din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete numai D-lui: Inginer **Al. D. Bunescu,** Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, B-dul Elisabeta 29, Bucureşti I.

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii şi orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie şi expediţie, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Călugei 23, Bucureşti 4.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXXIX

NUMĂRUL 10. — IUNIE 1934

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASTRA" SIBIIU

SUMARUL

1. Congresul interbalcanic al matematicianilor *I. Ionescu*
2. Cărţi vechi de matematică . . . . . *I. Ionescu*
3. Soluţia geometrică a problemei 2699 din Mathesis . . . . . *Col. Gh. Buicliu*
4. Note matematice: 46 — 52.
5. Bibliografie.
6. Cereri: 238.
7. Diverse.
8. Probleme rezolvate: 3031, 3908, 4089, 4195, 4197, 4219, 4237, 4264, 4291, 4348.
9. Exerciţii: 20 — 21.
10. Probleme propuse: 4381 — 4390.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1934

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: Colonel **Gh. Buicliu** din Ministerul Apărării Naţionale; **I. Buşilă**, Inginer Inspector General, Ministerul Lucrărilor Publice; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice" se vor trimite D-lui Inginer-Şef GH. ILIESCU, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret, Bucureşti 6.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29 Bucureşti 1) în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 691, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 270, 71, 97, 99, 310, 33, 67, 84, 86, 99, 412, 50, 553, 650, 79, 711, 29, 64, 876, 906, 14, 29, 59, 87, 2003, 04, 17, 70, 74, 111, 70, 338, 405, 30, 39, 66, 77, 502, 03, 56, 77, 87, 607, 38, 55, 65, 84, 709, 13, 17, 35, 69, 80, 814, 65, 86, 909, 12, 26, 36, 47, 3045, 69, 81, 127, 61, 69, 208, 30, 55, 60, 98, 300, 04, 10, 16, 18, 50, 405, 12, 24, 25, 72, 89, 93, 522, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 27, 73, 88, 608, 27, 32, 47, 57, 65, 81, 82, 84, 99, 700, 03, 33, 36, 93, 804, 08, 29, 36, 44, 53, 64, 80, 96, 909, 13, 15, 16, 18, 20, 33, 44, 83, 4010, 13, 30, 34, 45, 53, 59, 62, 68, 70, 73, 85, 102, 03, 11, 12, 18, 19, 23, 32, 48, 50, 51, 63, 67, 69, 92, 203, 06, 09, 10, 13, 26, 30, 36, 40, 49, 52, 75, 77, 80, 81, 83, 87, 88, 89, 90, 300, 01, 03, 15, 19, 20, 22, 32, 33, 37, 40, 41, 42, 44, 52, 56, 57, 58, 59, 60, 62, 63, 64, 65, 66, 68, 70, 73, 74, 76, 77, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procură dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29. Bucureşti 1), cu preţul de 12 lei.

GAZETA MATEMATICĂ

ANUL XXXIX *SUPLIMENT* No. 10

DARE DE SEAMĂ

asupra mesei comune a Concursului Societăţii „Gazeta Matematică“ din anul 1934

Masa comună a anului acesta cred că a fost cea mai populată dintre toate pe cari le-a avut *Gazeta Matematică* în urma concursurilor sale anuale.

Intr'adevăr la ea a luat parte pe lângă membri şi invitaţi şi un număr neobicinuit de candidaţi — aproape 70 — ce s'au prezentat, fie numai la probele scrise, fie şi la cele orale.

Inregistrăm deci — în acest al doilea an dela reluarea concursurilor — un salt cu adevărat energic şi vrednic de scos în evidenţă.

Dacă mai aducem acum la cunoştinţa cetitorului şi noutatea că în sală erau peste 70 de persoane ce purtau uniforme militare, el va înţelege cu uşurinţă că masa noastră comună nu putea să fie într'un loc mai potrivit decât în sala de mese a Căminului ofiţerilor din strada Cobălcescu.

Această alegere — prin bunele ei rezultate — a fost din cele mai fericite — ţinând seamă atât de numărul participanţilor, cât şi de criza mereu persistentă şi de care se resimt mai ales cei mai cumpătaţi. Aşi putea afirma că numai datorită acestei măsuri cât şi a unor ajutoare, ce se vor cunoaşte din cele ce vor urma, s'a putut face faţă împrejurărilor.

Deşi ştiu că nu fac plăcere, deşi ştiu că nu voi respecta o modestie vădită, sunt silit — în faţa realităţilor — de a nu mai sta la gânduri şi de a arăta că întreaga organizare a mesei comune cât şi toate intervenţiile ce-au fost necesare se datoresc entuziasmului şi bunăvoinţii Domnului COLONEL GH. BUICLIU. Domnia sa ne-a îndreptat la Căminul ofiţerilor în seara de 14 Aprilie la orele 21 şi tot D-sa — dând toată atenţia cuvenită tradiţiei — după G-ul de acum un an, a indicat aranjarea mesei în forma unui M, în jurul căreia s'au strâns cei strâns legaţi de aceiaşi disciplină, aşezându-se, ca de obicei:

— La baza şi spre baza lui M membrii fondatori, precum şi membrii mai cu greutate;

— La picioare şi spre picioarele lui M concurenţii;

— Pe părţile laterale membrii mai tineri făcând legătură strânsă între primii şi ultimii.

Şi din cauza dimensiunilor mesei, picioarelc lui M păreau ca *trei stâlpi* lăsaţi în grija Domnilor A. G. IOACHIMESCU, I. IONESCU şi G. ŢIŢEICA, cari în mod *matematic* sunt primii cari dau exemple la orice manifestare a *«Gazetei»* sosind şi la această reuniune printre cei dintâi.

Au mai fost prezenţi la masa comună:

Domnul GENERAL D. MARŢIAN, Inspectorul Invăţământului militar; Domnul COLONEL I. DEMETRESCU, Directorul Liceelor militare; Domnul COLONEL C. BUICULESCU, Comandantul Lic. militar Tg.-Mureş; Domnul inginer N. VRACA dela C. F. R. şi D-nii: BORISLAVSCHI; SUB.-LT. CIUREA, LOCOT. GHEORGHIU, G. SIMIONESCU, TEODORESCU, TROFIMOV şi VICIU, profesori şi ofiţeri ai liceelor militare — invitaţi, apoi Domnii:

L. BĂDESCU, COLONEL GH. BUICLIU, AL. BUNESCU, I. BUŞILĂ, D. V. CAMBUREANU, GH. EM. FILIPESCU, Ş. GHEORGHIU, M. GHERMĂNESCU, R. IANCULESCU, GH. ILIESCU, GH. A. IOACHIMESCU, C. IONESCU-BUJOR, MAIOR I. LINTEŞ, COLONEL GH. LITEANU, CR. MATEIESCU, LT-.COMANDOR GH. NICULESCU, MIRON NICULESCU, CEZAR ORĂŞEANU, AL. PANTAZI, AL. A. ROŞU, GH. I. STAMATESCU, O. ŢINO, I. VASILACHE, R. VOINAROVSCHI şi LT-.COMANDOR GR. ZAPAN, membrii ai Societăţii şi elevii cari au luat parte la concurs:

ANTOHI I. CONST., ANANIAN AUREL, ANCA I. IULIU, BĂDESCU NIC., BOIAN D. E., BLĂNARU I., BOGDAN G. I., BUCUR V., BUZINCU I., CARAMAN A., CIOC I. D-TRU, COJOCARU I. PETRE, COZMA V., CREANGĂ V., DUMITRESCU-DOBROTEŞTI V., DĂSCĂLESCU V. C., DECEANU G. G., DOBRESCU D. P., DUMITRIU P., ENACHE D. I., FENICHI AL., FLORESCU G. A., GACIU AL., GÂSCĂ C. V., GAVRILESCU N. C., GEORGESCU G. A., GRIGORESCU V., GRIGORIU I. V., IONESCU V., LEBĂDĂ I. D., MATEI I. I., METEA V., MOLDOVAN L. MUNTEANU S., MĂRMUREANU GH., MERCUREANU S. I., MIHALACHE V. I., MITU I. N., NEDELESCU N. A., POPESCU M. GH., STREDER I., STOIAN I., STRATULAT I. G., SUCEVEANU F., ŞUŞALĂ I. G., VALENTIN I. G., VASU N., VONICA I. I., VALERIU G. M., VASILESCU C. N., ZAHARESCU I.

Se serveşte masa. Un menu bine chibzuit se desfăşoară în gălăgia unui radio. Vine ţuica, urmează supa cu *pateuri,* dar mă opresc, numai interesează ce mai vine, totul curat şi gustos. Interesează cu adevărat seria toasturilor, care nici de data asta nu întârzie să înceapă.

Ca şi în alţi ani, Domnul Profesor A. Gh. IOACHIMESCU, ca cel mai în vârstă dintre *stâlpii* Societăţii, ia cel dintâi cuvântul.

Ca şi în alţi ani, Domnia sa închină pentru M. S. REGELE. Ii urează viaţă lungă şi domnie liniştită, în timp de pace şi de va fi nevoie şi în timp de război.

Intreaga asistenţă se ridică în picioare la urările oratorului şi ovaţionează.

Nu trece mult şi Domnul Profesor I. IONESCU se ridică. Este un semn bun. Nu's puţini în sală care să nu-l tălmăciască. Nu's puţini în sală cari să nu fi dat toată atenţia — acum un an cuvintelor Domnului Profesor: *«Se lucrează puţin, să se vorbească puţin».* Ridicarea Domniei Sale înseamnă aprobarea că a început să se lucreze mai mult. Un semn bun! Şi luăm parte cu întreg sufletul la bucuria ce-i luminează faţa. De-aceia, cuvântarea Domnului Profesor I. IONESCU este şi aşteptată şi ascultată cu deosebit interes. Şi Domnia Sa începe:

„Ca întemeietor al **Gazetei Matematice** *am luat parte la toate „concursurile dela început şi până azi. Cel de-acum are un caracter cu*

„*totul special, un caracter militar. Totdeauna am avut elevi militari la „concurs. Colegul nostru Domnul Profesor* TEODOREANU, *dela Liceul mi- „litar Iaşi trimitea mai totdeauna candidaţi. Intr'un an, mi-amintesc am „intervenit la Şcoala de Infanterie pentru găzduirea elevilor şi mi s'a „spus că elevii Şcoalelor militare să cetească războaiele". Acel director „a fost* **dezertor** *în timpul* **Războiului pentru întregirea firească a „neamului nostru.** *Războiul nu se poate duce fără ştiinţă.* MAURICE „d'OCAGNE, *profesorul vestit, a fost mobilizat în* **Franţa** *pentru lucrări „de nomografie. Cei dela* **Gazeta Matematică,** *alături de Domnul* GENERAL „SC. PANAITESCU, *în timpul războiului am fost cu folos întrebuinţaţi. „Ştiinţa nu se poate face fără matematici. Se vede aci că 90% din „candidaţi sunt dela Scolile militare. Aceasta se datoreşte în parte şi „Domnului* GENERAL MARŢIAN, *prieten cu repauzatul* V. CRISTESCU".

Un fior general a amuţit şi pe orator şi a pătruns şi întreaga adunare la auzul acestui nume. O înţelegere perfectă a condus spontan la o tăcere prelungită, tăcere în care cred că fiecare din cei ce l'au cunoscut pe V. CRISTESCU, au readus figura blândă a neobositului stâlp dispărut — la masa noastră comună.

Dar Domnul Profesor IONESCU ne trezeşte:

„*Domnul* GENERAL MARŢIAN *venea la* V. CRISTESCU *pentru a-l ajuta „la corecturi şi a-i pune la dispoziţie serviciile sale. Cu elevii — vedem „azi — au venit şi profesorii şi directorii, lucru foarte rar. In 1928 pro- „fesorii de liceu de istorie şi filozofie au dat atac contra matematicilor. „Şcoalele militare au rămas pe poziţie şi rezultatul se vede. Restul de „candidaţi sunt puţinii elevi civili graţie colegului profesor* AL. NICULESCU „*dela Giurgiu şi a câtorva din Bucureşti*".

„*Să trăiască* **Armata Română,** *să trăiască Domnul* GENERAL MARŢIAN".

Imi este peste puteri să descriu entuziasmul ce l-a deslănţuit sala la sfârşitul cuvântării Domnului Profesor IONESCU, atât de plină de inimă, de vigoare, de patriotism, de iubire de matematice. Imi este greu. O mărturisesc. Cronicar al anului viitor — să fii mai înarmat! Ai de ce. Nu-i uşor să conturezi în cuvinte asemenea sentimente.

Se face iar tăcere. Domnul GENERAL MARŢIAN este în picioare şi cu paharul în mână:

„*Datorez multe zile fericitc* **Gazetei Matematice** *încă de când eram „tânăr, dar datorez şi mai mult de când sunt bătrân (!?)*". (Semnele mirării şi întrebării se aplică numai ultimului cuvânt şi cu acestea cer scuze că am întrerupt oratorul). „*Când am venit la Direcţia Invăţământului militar am „luat programele şi m'a uimit lipsa părţii ştiinţifice fără de care nu poate „să existe un ofiţer. Mi-am adus aminte de* **Gazeta Matematică.** *Desfac „revista şi am găsit printre corespondenţi doi elevi dela Liceul militar „Târgu-Mureş şi unul dela cel din Iaşi. A plecat un ordin circular către „licee şi am urmărit progresele cu cea mai mare mulţumire.* Deatunci „există *un progres. Fără ştiinţă nu putem exista. Mulţumesc conducerii* **„Gazetei Matematice,** *mulţumesc tuturor dar mai ales celor bătrâni* (!?), (La *Gazeta Matematică* nu există aşa ceva şi iar cer, respectos, scuze...) „*ce menţin Revista la un nivel atât de ridicat. Să trăiţi!*".

Vii aplauze, prelungite aplauze acoper ultimele cuvinte din inimoasa cuvântare a Domnului GENERAL MARȚIAN. Și nu puține din acestea sunt adresate faptelor Domnului General și roadelor culese.

Toate bune până aci, chiar foarte bune, dar lipsește ceva. Și cu cât întârzie cu atât e mai dorită. Și tradiția, care plutește și de-asupra meselor noastre comune o strigă, o cheamă, o vrea. Și ea tradiția își cere toate felurile. E încă flămândă. Vrea acum friptura. Vrea cuvântarea morală. Dar de ce întârzie? He! nu-i așa ușor! O mare dificultate pentru aiurea — din multă fericire și din și mai multă și continuă abnegație — la *Gazeta Matematică* se găsește înlăturată: cuvântarea morală se poate ține.

Aci, la *Gazeta Matematică*, nu poate prinde (și să ferească *Dumnezeu* să prindă vre'odată) zicătoarea: „Să faci ce zice papa . . . ". Ce fac *stâlpii*, da, oricând, numai să fim în stare!

Dar mai e o dificultate. Să-l lăsăm pe Domnul Profesor G. ȚIȚEICA să ne lămurească:

«Domnule General, Domnilor colegi. Domnilor Candidați:

„La **Gazeta Matematică**, *de multă vreme, la toate concursurile noastre „avem obiceiul să ținem o cuvântare morală. A rămas în tradiție. Foarte „grea pentru mine. Se ascultă greu și se urmează și mai greu. Totuși mă „conform tradiției și o țin.*

„Mi-amintesc de o vorbă pe care o spunea un copil. In cartea lui de „cetire mai toate poveștile se terminau cu bine, cu succesul celui mai bun. „Aceste concluzii bune mă fac să fiu rău.

„Mi-e frică că și cuvântarea mea: băieți să fiți cuminți, să fiți ascul- „tători, respectoși, să învățați bine, să ascultați pe cei mai bătrâni, nu vor „fi bine primite. Ori le cunoașteți și nu mai e nevoie să vi le spun, ori nu „le cunoașteți și-atunci tot de prisos este. Astfel de sfaturi nu se dau, „pentrucă omul vrea să facă tocmai ce nu este permis. Omul vrea libertatea „lui. Omul nu e logic în faptele lui. El nu se gândește, când face fapte „rele la primejdia ce-amenință viața lui, viața familiei lui și nici nu se „gândește că aceste fapte rele pot fi de cele mai multe ori primejdioase și „pentru țara lui. Omul urmează mai repede pornirea imediată. Lumea nu „e logică.

„Iată de ce ne gândim noi, cei dela **„Gazeta Matematică"** *că con- „tactul cu această știință «suprema logică» să aducă ceva logic și în faptele „noastre de toate zilele. Iacă de ce răspândim matematica. Bucuria noastră „este foarte mare că ați venit. Sperăm ca* **Matematica** *să aducă rezultate „asupra faptelor noastre zilnice.*

„Dar matematica nu este numai morală, ea este și frumoasă, ea este „și splendidă. Cine n'a putut constata în sufletul lui o mare mulțumire „sufletească la găsirea unei proprietăți nu cunoaște ce este matematica. „Am băgat de seamă la oral că stăpâniți frumusețile matematicilor. De „aceia masa noastră nu e o masă unde bem și mâncăm, ci o comunicare „sufletească dela cel mai mare la cel mai mic: pentru cultul științelor

„*matematice, pentru binele D-vs. ca să aveţi o regulă de purtare în viaţă*
„*şi pentru binele* **Patriei.** *De aceea să ascultaţi matematicile. Să trăiţi*».

Cetiţi, recetiţi! Toate dificultăţile cuvântării morale au fost învinse. Şi numai cu rara măestrie a Domnului Profesor G. ŢIŢEICA. — Splendide lecţii de înaltă morală! Fericiţi cei ce au prilejul să le asculte, să le cetească, dar cu adevărat fericiţi cei ce pot să le urmeze. — «*Pentru binele D-vs. . . . pentru binele* **Patriei**».

Ropotul de aplauze? Atmosfera Înălţătoare? Chiar de le-aşi uita — nu le uită tradiţia ce le-a adoptat şi pe ele. —

Se rumegă — se reflectează — se comunică — pare că un timp apreciabil se scurge până când tăcerea este din nou adusă de o nouă cuvântare. Vorbeşte Domnul MIRON NICULENCU. Să-l lăsăm să vorbească.

„Vă rog să-mi daţi voie ca în contrast cu aceste vremuri de prefaceri, „de revoluţii, de cutremure, să relev la *Gazeta Matematică* o serie întreagă de „constante:

„Concursurile *Gazetei Matematice*,

„Mesele ei comune,

„Cuvântarea morală,

„Apariţia Revistei la 15 ale fiecărei luni şi altele.

„Stabilirea lor a cerut condiţii grele. Ultima constantă ce-mi amintesc „acum — *construcţia localului* — a cerut asemenea condiţii. S'au cerut sacrificii „de timp, de bani, de sine.

„Intru sănătatea şi rezistenţa celor ce au făcut sacrificiile ridic acest „pahar.

Aplauze, trincări, priviri, îndreptate toate către *stâlpii* Societăţii.

După o scurtă pauză ia cuvântul Domnul O. ŢINO:

„In ordinea vechimii mie îmi vine rândul şi cer scuze colegilor cărora „l'aş fi luat. Masa de-aci nu e obişnuită. Ea are caracterul mesei de sacrificiu „a «*Cinei cea de taină*». Azi puteţi vedea imaginea unei alte trinităţi. Aceşti „«*trei*» au acelaş suflet. Tradiţia unanimă. *Gazeta Matematică* e azi în situaţie „înfloritoare datorită muncii lor. Dânşii pot privi cu mândrie când într'un corp „de redacţie văd atâtea dispoziţii de muncă pe care chiar nu le pot utiliza. „Poate *Gazeta Matematică* va putea utiliza în viitor toată munca. Constat că „majoritatea celor ce colaborează sunt militari şi ingineri. Justificarea o formează „faptul că ei folosesc matematica. Ridic paharul în sănătatea celor «*trei*» şi a „prelungirii vieţii lor dincolo de cugetul nostru pentru a proteja şi dirija „*Gazeta Matematică*. Ridic paharul şi în sănătatea acelor tineri ingineri, cari „fără a fi chiar cunoscuţi depun munca cea mai grea; pentru colegii militari „cari vin şi-acum primii la *Gazeta Matematică*. Felicit pe profesorii noştri „cari acum 40 ani au înfăptuit *Gazeta Matematică*".

Cuvintele bine îndreptate ale Domnului O. ŢINO au fost subliniate cu multe şi vii aplauze, după care domnul R. IANCULESCU răspunde din partea inginerilor astfel:

„Colaborator vechi şi examinator la concursuri mi-amintesc de masa „comună din 1909 când am luat parte la Concursul *Gazetei Matematice* în „clasa V-a. Masa a fost oferită de Domnul Profesor IOACHIMESCU. De-atunci

„s'a perpetuat. Aceleaşi emoţii şi străduinţi le-am trecut şi noi când am fost „elevi. Dacă D-vs. aţi fost emoţionaţi şi noi am fost. La rândul nostru suntem „recunoscători celor ce-au infiltrat dragostea pentru matematici în sufletele „noastre. Situaţiile noastre le datorim muncii şi idealurilor Domnilor Profesori. „Ne gândim şi la V. CRISTESCU şi la TRAIAN LALESCU. Declar că vom fi „împreună — cei mai tineri — alături de dânşii, sperând să-i ajutăm".

După cuvântarea bine simţită şi în unanimitate aprobată de *«cei tineri»* a Domnului R. IANCULESCU, avem o deosebite plăcere să ascultăm iar un *stâlp* al *Gazetei*. Ca toţi *stâlpii*, are grijile Domniei Sale dar dintre ele pe una o detaşează şi o arată mai cu predilécţie. O veţi înţelege:

„*Ne găsim la această masă trei generaţii:*

„ — *noi, cei mai vârstnici,* (merge, aprobăm) *cari reprezentăm trecutul,* „(nu aprobăm)

„ — *generaţia de mijloc,*

„ — *şi tinerii cari reprezintă viitorul.*

„*Din noi, unii au urmat cu aceeaşi tenacitate activitatea lor la* „**Gazeta Matematică**, *alţii au lăsat-o mai domol. In generaţia de mijloc* „*se găsesc însă elemente strălucite, încât noi, ceilalţi vechi (?!) putem fi* „*liniştiţi căci* **Gazeta Matematică** *este pe mâini bune.*

„*Intre cei tineri nu toţi vor face matematici. Nici nu trebue. Dar la* „*toţi trebue să fie spiritul, logica şi între ei se vor găsi totuşi elemente* „*ce vor ajunge la conducere.*

„*In sănătatea celor dela mijloc, începând cu D-l* O. ŢINO *şi în sănă-* „*tatea celor tineri*".

La aceste frumoase sentimente adresate de Domnul Profesor A. GH. IOACHIMESCU celor dela mijloc şi tinerilor se ridică, cu avântul său tineresc, elevul de liceu militar — POPESCU GREACA şi plin de vioiciune începe:

„E rândul nostru să vă mulţumim. S'ar părea exagerat dar bucuria de „a lua parte la sărbătoarea noastră ne face să îndrăznim. Noi, cei mici, din a „treia generaţie, să avem o inimă plină de recunoştiinţă pentru cei ce ne „sădesc dragostea pentru matematici, spre binele nostru şi al *patriei*. Să le „dea *Cel de Sus*, îndrumătorilor şi profesorilor noştrii, ani mulţi, fericire şi „noroc şi tot ce-ar putea *El* să le dea".

Aşa! Bine, foarte bine!

Şi iar ne este dat să simţim o mare bucurie, aceea când vedem un stâlp ridicându-se. Dela „ei" avem mereu, mereu ce asculta şi pentru noi o fac. Iată pe Domnul Profesor ŢIŢEICA din nou în picioare. Domnia Sa desigur că mai are griji şi datorii de împlinit şi nu se dă niciodată la o parte.

Ascultaţi-l!

„*Mă adresez acum nu unei persoane ci unei fiinţe impersonale. Mă* „*adresez* **Gazetei Matematice** *şi că ea este o fiinţă se poate demonstra* „*uşor*":

„ — *Apare de 39 ani,*

„ — *Aduce serviciile sale de tot atâta timp: elevii de liceu formaţi* „*la* **Gazeta Matematică.**

„— *Activitatea ştiinţifică din ţară a pornit tot dela* **Gazeta Ma-**
„**tematică.**

„*Elementele cele mai serioase, elementele cunoscute, cari alcătuiesc*
„*azi* **Şcoala Românească** *s'au format la* **Gazeta Matematică.** *Este sufi-*
„*cient să pomenesc de* TRAIAN LALESCU *ca să nu amintesc decât de cei*
„*dispăruţi. Şi aşa, sunt o mulţime alţii. Noi sperăm că acest curent o să*
„*continue nu din cauza celor „noi trei" şi din cauza „celor mijlocii", dar*
„*mai ales din cauza celor cari se formează acum. De aceea zic: Să trăiască*
„**Gazeta Matematică".**

Să trăiască! Să trăiască, răspunde corul puternic al sălii. Să trăiască! Are de ce! Şi după cuvintele pline de înţeles şi de nădejdi ale Domnului Profesor G. ŢIŢEICA, Domnul GENERAL MARŢIAN face următoarea comunicare:

„*Am luat iniţiativa de a da ca premii în fiecare an, celor mai buni*
„*la matematici din elevii liceelor militare, un abonament la* **Gazeta Ma-**
„**tematică.** *Incurajarea trebue să vină din toate părţile şi „eu" nu mă las!"*

fiind deci primul care se aruncă cu tot curajul în albia „curentului" lucru pentru care este puternic ovaţionat de întreaga asistenţă.

Dar cuvântarea Domnului Profesor IONESCU, confirmată de comunicarea Domnului GENERAL MARŢIAN, hotărăşte pe Domnul Profesor ŢIŢEICA să facă următoarea observaţie:

„*Iacă ce constat. După cum spune colegul* IONESCU *s'a dat un asalt*
„*de militari. Când Românii au cucerit pe Greci, cei dintâi s'au lăsat cuce-*
„*riţi de cultura greacă. Aşa şi cu militarii: au terminat „atacul" cuceriţi*
„*fiind de matematici".*

Şi toţi militarii prezenţi, începând cu Domnul GENERAL MARŢIAN, răspund spontan Domnului Profesor ŢIŢEICA cu viguroase aplauze. Au aprobat imediat o remarcă plină de adevăr.

Şi din nou plăcere. Rară masă comună unde să fi fost mai satisfăcuţi cei dela mijloc şi cei tineri — dornici continuă, ca nişte bureţi — să absoarbă, să tot absoarbă. *Stâlpii* sunt în splendoare. Rar ne-au fost atât de darnici în sânul unei mese comune dela o vreme încoa. Sunt mulţumiţi desigur azi. Numai începe îndoială. Domnul Profesor IONESCU, spre bucuria noastră — se ridică din nou. *Stâlpii* s'au învăţat cu griji şi datorii de împlinit. Ascultaţi-le pe ale Domnului Profesor IONESCU.

„*Iau a doua oară cuvântul fiindcă şi alţii l'au luat.* **Gazeta Matematică**
„*se compune din* **Gazeta** *şi* **Matematică.** *Ei bine,* **Gazeta** *se face şi se*
„*scoate cu sacrificii, cu bani, cu muncă. Pentru fonduri se ocupă o „dele-*
„*gaţie" compusă din Domnii:* COLONEL GH. BUICLIU, AL. BUNESCU *şi*
„I. BUŞILĂ. (Aplauze). *Apoi Domnul* ILIESCU *face corecturi de 12 ani. Este*
„*singurul care ceteşte în fiecare lună* **Gazeta** *de 3—4 ori.* (Aplauze multe,
„multe). *Dau şi alte ajutoare. Domnul* IOANOVICI *a donat 5.000 lei pentru*
„*masa comună de astăseară şi tot D-sa clădeşte localul* **Gazetei Matematice**
„*fără beneficii* (vii şi prelungite aplauze). *Pentru construcţia clădirii nu aveam*
„*decât două milioane şi ne trebuiau patru. Domnul* FILIPESCU *a intervenit*
„*ca să se cumpere patru etaje — pentru casa de pensii a funcţionarilor*
„*S. T. B.* (puternice şi cu adevărat meritate aplauze). *Toţi să trăiască".*

Se bea în sănătatea lor, se ovaţionează, din toate colţurile ajung urările cele mai frumoase în timp ce:

— Domnul GH. EM. FILIPESCU înclină uşor capul în jos — pare că ar vrea să se ascundă dar n'are după ce;

— „*Delegaţia*" se face că se ocupă — ba cu o ţigare, ba cu un pahar, ba aruncând unul pe altul din priviri;

— Domnul GH. ILIESCU este când roşu când alb — de n'o fi schimbat de culori mai mult de 12 ori ?!.

Domnul IOANOVICI a scăpat atunci... dar acum când o ceti?

Şi iar e linişte. D-l M. GHERMĂNESCU se ridică pentru a continua seria toasturilor. Iată cum:

„Domnul MIRON NICOLESCU a vorbit de câteva constante ale *Gazetei „Matematice*. Constatăm că *Gazeta Matematică* este un organism deci ea are „şi variabilele ei":

„ — Anii *Gazetei Matematice,* căci ea a împlinit 39 ani;

„ — Apoi varietatea persoanelor şi rolurilor variate ale membrilor, astfel „inginerii şi militarii sunt examinatori;

„ — Evoluţia pe care o suferă elevii, căci devin membrii şi cu ajutorul „lui *Dumnezeu* vor fi alături de *stâlpi.*

„Dar cum continuarea variaţiei este necesară fără a fi suficientă, pentru „progresul *Gazetei Matematice* cer ca variabilele să tindă către infinit tot aşa „cum variază şi funcţia exponenţială".

O varietate de manifestaţiuni urmează cuvântării D-lui M. GHERMĂNESCU. Unii aplaudă, alţii aprobă prin semne, alţii zic câte ceva din gură, parte din ingineri şi militari nu ştiu ce mai fac, dar un lucru e cert că sgomotul variază mereu, făcându-se tot mai mic, tot mai mic, ajungând la zero când profită de acest lucru Domnul LT. COMANDOR GR. ZAPAN pentru a da o „notă matematică". S'o auzim:

„La *Gazeta Matematică* se obişnueşte să se dea o notă matematică. „De mult nu am dat. Dau acum. Se compune din mai multe puncte:

„1°. Domnul Profesor ŢIŢEICA spune că *Gazeta Matematică* a cuprins „pe militari. Eram elev la Lic. internat din Iaşi când am luat cunoştinţă de „*Gazeta Matematică* şi trecând la «*Mănăstirea Dealu*» eu am fost primul „care am introdus-o. Apoi ca profesor mai târziu la Mănăstirea Dealu tot eu „am reintrodus-o şi când am trecut la *Târgu-Mureş* tot eu am introdus-o.

„Mă laud acum.

„Dece a cuprins *Gazeta Matematică* pe militari? Secretul îl ştie numai „Domnul Profesor IONESCU.

„2°. La Concursul *Gazetei Matematice* a venit numai un singur candidat „la *Aritmetică.* Secretul este tot al Domnului Profesor IONESCU.

„3°. Pe menu stă scris „supă cu *pateuri*" şi s'a adus unul singur. Secretul nu-l mai ştie Domnul Profesor IONESCU.

„4°. La anul va fi banchetul în noul local. (Domnul Profesor IONESCU „intervine: *vom fi şi mai mulţi şi nu o să fie loc*).

„5°. Acum când suflă vânt urît dela Vest este cea mai bună manifestare „contra «*revizionismului*» când au venit atâţi militari". Q. E. D.

D-l MAIOR LINTEŞ se scoală. „Am de adăugat ceva: La Şcolile Aeronautice colegul ZAPAN a făcut 100 de abonamente la *Gazetă*", la care D-l M. GHERMĂNESCU răspunde:

„Asta e secretul lui".

Abia s'au terminat simpaticele completări ale Domnilor MAIOR LINTEŞ şi M. GHERMĂNESCU şi ne-am asociat Domnului LT. C-DOR. ZAPAN, care ne-a dat frumoasa ocaziune, ca aplaudându-l sgomotos să protestăm energic contra revizionismului nedrept.

Dar iar sărbătoare. Din nou un stâlp. Iată că Domnul Profesor ŢIŢEICA este din nou „dator". Domnia-sa are o teamă şi o arată:

„Mi-e teamă că afirmaţia mea «că matematicile au cuprins pe militari» „să nu fie rău înţeleasă. Acest lucru s'a mai întâmplat şi altădată. S'a în-„tâmplat şi în timpul campaniei lui **Napoleon** *în* **Rusia**, *când un ofiţer în „loc ca în închisoare să fi făcut literatură sau studii militare a făcut mate-„matici. Acesta este* PONCELET, *care în închisoarea dela* **Saratow**, *unde era „prizonier, a făcut matematici atât de bine încât a creiat o nouă ramură a „Geometriei,* **Geometria Proiectivă**. *Legătura între militari şi matematici „este veche, este . . . străveche, chiar de pe timpul lui* ARCHIMEDE.

Nu ne este nouă dat să adăugăm ceva după cuvintele stâlpilor. Indrăsneala ar întrece marginile. De astfel nici nu m'aşi ridica cu mintea la mai mult de trei litere. Dar nici atât nu îndrăsnesc. La urma urmei renunţ. Cu, sau fără, tot aşa este. Şi-apoi e grija *stâlpilor*. Iacă ce spunea — acum un an — Domnul Profesor ŢIŢEICA:

„Actualii stâlpi ai **Gazetei Matematice** *fac acum oficiu catalitic: „păstrăm tradiţia. Să nu ne îndepărtăm de ea.*

„Ne facem, astfel, datoria până la capăt. Intervenim numai atunci „când găsim nevoia ca să cercetăm ceva".

Noi ştim cât fac mai mult, peste ceeace anunţă, dar şi ce anunţă e „sfânt".

Cuvântările s'au terminat. Inainte de a vedea ce se mai întâmplă cer permisiunea să deschid o paranteză. E vorba de o scrisoare:

Iubite coleg şi prieten,

— Nu te lauzi. Aşa este. Eu însă n'am ştiut-o. Acum când o aflu — mă grăbesc să-ţi arăt printre primii recunoştinţa, ca unul ce-am fost cu un an în urmă la „Mănăstirea Dealu". Cred însă că te vei bucura auzind că voiu rupe o parte din această recunoştinţă pentru a o îndrepta spre profesorul meu, Domnul V. ALACI. Imi iau permisiunea să-i reamintesc acum (căci poate să folosească) că în clasa V-a, după ce a parcurs cu noi o parte din materie, ne-a arătat *Gazeta Matematică* şi către sfârşitul trimestrului ne-a rezolvat la tablă problema de aritmetică No. 2020 (vol. XIX):

Să se găsească restul diviziunii prin 11 al expresiunii:

$$E = 1913^{821} + 907^{1912}.$$

I. ELIAN.

ca o aplicaţie a materiei parcurse la aritmetică. Am copiat-o şi ne-am grăbit s'o trimitem la *Gazetă*. Domnia Sa n'a ştiut . . . ! Era prima noastră problemă, ce-o trimetea seria de-atunci. Dar alta nu ne-a mai arătat . . . Ne prinsese'n cursă . . .

Secretul Domniei Sale!

— Şi cu „pateurile" ai dreptate. Şi eu am avut tot unul. O întâmplare, se vede, a făcut ca al meu să fie mai mare. De aceea o jumătate am şi lăsat-o pentru comunicarea sufletească dela anu.

O mai găsesc? Ce crezi?

— Cât despre revizionism — aşaaa — mereu, tot mereu, cu toţii contra lui.

Al tău, cu multă simpatie, etc., etc.

Să nu uit să închid paranteza şi să trecem mai departe la tradiţionala parte a II-a a meselor noastre comune.

Un cor. E al celor dela „mijloc". Cântă „Gaudeamus igitur". Dar să fiu drept. Şi *stâlpii* iau parte. Domnul Profesor IOACHIMESCU cântă din ochi; îi plimbă în sus, în jos şi lua astfel toate notele. Domnul Profesor IONESCU cântă cu toată „faţa", iar notele ce nu le poate lua aci le lăsa pe seama umerilor, când pe dreptul, când de stângul, aşa cum merge şi cântecul. — Domnul Profesor ŢIŢEICA nu s'a mulţumit cu atât: dădea chiar bine din buze. — Să piardă stâlpii vre-o manifestare cât de mică a Gazetei?!

Dar acest îndemn nu a fost suficient pentru „tineri". Nici privirile agere şi întrebătoare ale Domnului COLONEL GH. LITEANU. Şi nici rândurile referitoare din „Darea de seamă" de-acum un an. Negăsind explicaţia ne mulţumim să constatăm „ceva" mai puţin ca altădată.

De aceea programul se continuă tot de un „mijlociu". Domnul M. GHERMĂNESCU, ne ceteşte versuri ce au darul să înveselească întreaga asistenţă.

După versuri, ca de obicei, iar muzică. Un „trio" de data asta. Domnii M. GHERMĂNESCU şi COLONEL GH. LITEANU execută cu multă căldură în voce „Rândunelele uşoare".

Ah! Dar uitasem pe-al treilea, pe Domnul CEZAR ORĂŞANU. Domnia sa a făcut partea . . . cea mai grea: a dat tonul!

Programul artistic, redus, cum vedeţi a fost încheiat de Domnul LT. COMANDOR GR. ZAPAN, care la rubrica specială din *Gazetă* anunţă o „cerere":

„In fiecare an există câte un anonim, care se manifestă pentru *Gazeta Matematică*. Cei ce doresc să doneze pot trimite anonim la *Gazeta Matematică*, iar Domnul Profesor IONESCU va da răspunsul".

Dar a trecut de miezul nopţii. Nu mult. Nici cinci minute. E timpul despărţirii. Domnul Profesor IOACHIMESCU se ridică şi urează:

«La anul şi la mulţi ani!»

Frumoasă urare! Ce puţin, dar cât de mult? Să vă audă, să vă audă *Dumnezeu*.

Corul candidaţilor (surpriză) cântă „Mulţi ani trăiască". Incet, încet sala se goleşte. Simt cum fiecare caută să ia cu el cât mai mult din atmosfera înălţătoare a acestei seri.

Afară plouă, dar nu tare. Păcat!

Iau cavântul. Partea cronicarului . . . Şi fără nici-un înconjur anunţ că voi vorbi despre „stâlpi". S'a vorbit mult — veţi zice — aproape toate cuvântările serii au fost pentru „ei".

Nu-i destul. Oricât şi oricâte lucruri bune li s'ar adresa, nu-i destul. Şi cum să fie? La noi vorbe. La „ei" fapte, fapte şi iar fapte, iacă încă câteva luni şi vor ajunge la 40 ani de fapte. Şi asta numai la *Gazeta Matematică*. Dar numai atât? De peste 40 ani Domnii profesori A. GH. IOACHIMESCU, I. IONESCU şi GH. ŢIŢEICA, activează şi în multe alte domenii, croind peste tot drumuri ce nu mai pot fi abătute.

De-ar fi fost numai *Gazeta* şi încă au de mult toate meritele. Dar când „ei" au făcut şi mai mult, cu mult mai mult? Se poate zice atunci că s'a vorbit despre „cei trei" destul?

Continui deci. Dar nu mă adresez *«stâlpilor»*. Nu asta îmi este intenţia De „ei" vreau numai să mă servesc. Iertare, iertare. Ii plimb ca să cunoască câţi mai mulţi faptele lor bune.

Iertare. Puterea exemplului este covârşitoare. Trebue aruncată acum în joc. Se simte o nevoie mai mare ca altădată. Azi când criza morală este de netăgăduit mai mare ca altele, binele trebuie răspândit.

Şi dacă noi suntem plini de admiraţie în faţa operii stâlpilor, cei ce pot să se folosească cu adevărat de exemplele lor sunt tocmai cei ce au acum în faţa lor viaţa. Sunt tinerii. — De ei depinde în primul rând ca să şi-o facă dela început — căci numai aşa e bine — şi frumoasă şi curată. Şi pentru aceasta mai au nevoie să ştie ceva. Să ştie cum au ajuns Domnii A. G. IOACHIMESCU, I. IONESCU şi G. ŢIŢEICA la atâtea înfăptuiri. Simplu. Ca toate lucrurile mari.

Prin muncă continuă. Abia eşiţi de pe băncile şcoalei au şi căutat de lucru pentru orele libere. Tineri între 22 şi 25 ani, şi-au îndreptat munca lor acolo unde s'a simţit nevoia. Mare merit pentru munca ce-au pus'o cu plăcere la dispoziţie peste preocupările serviciului zilnic — dar şi mai mare merit pentru simţul ce l'au avut — pentru modul cum au ales să-şi îndrepte munca.

S'au scurs 39 ani de-atunci, dar au rămas mereu la postul lor.

Sunt ani! Prin muncă continuă . . .

Fără reclamă. Vorbesc numai pentru 21 ani în urmă. De-atâta timp am dreptul să vorbesc, căci deatunci cunosc *Gazeta*. Pentru rest voi fi completat. Ei bine în aceşti 21 ani eu n'am văzut o singură notiţă de ziar anunţând ceva despre *Gazeta Matematică*. Şi-au fost concursuri, au fost mese comune, adunări, etc., etc. Totul s'a petrecut în sânul *Gazetei*, totul fără reclamă, dar cu multă inimă. Ziariştii care aleargă peste tot după ştiri de „Gazetă" nu s'au atins. Şi ei o înţeleg şi o respectă. Şi dacă s'ar fi scris ceva, despre cine trebuia să se scrie în primul rând? Ei bine, să nu audă „stâlpii" de aşa ceva?!

Fără, fără reclamă!

Fără interes. Era natural să se nască reclama. Ea este sufletul comerţului. La *Gazeta Matematică* nu se precupeţeşte nimic. Nici muncă, nici timp, nici bani. Şi toate astea revin *«stâlpilor»*. Dela *«ei cetire»* este aşa. *«Ei»* n'au precupeţit nimic, nici la *Gazeta Matematică*, nici aiurea. Au fost peste tot la fel.

Fără interes!

Prin unire. In toate împrejurările — fie eroice, fie fericite au fost împreună. I-aţi văzut împreună şi împreună vor rămâne, ca să facă tot mai mult. Prin unire.

Şi cu «crezul» binelui comun. Da. Cu acest crez.

— Au lăsat pe planul ultim familiile lor şi s'au devotat unor familii mai mari: *Gazetei Matematice, Învăţământului, Operelor culturale, Operelor morale.*

— Au lăsat pe planul ultim interesele lor şi s'au îngrijit de altele cu mult mai mari în ochii lor — de ale ţării.

— Ca plăceri, ca distracţii, ca odihnă, au cunoscut munca, numai munca, deschiderea de noi drumuri, creiarea de noi curente sănătoase.

Nimic pentru binele lor. Pentru binele comun, pentru binele ţării.

Iată cum au reuşit. Iată conduita lor. Sunt cu adevărat nişte apostoli!

Un îndoit noroc pentru ţară. Întâi că-i are. Al doilea că sunt tineri. In plină putere. Câtă nevoie este de ei acum! Cine ştie ce opere neperitoare le-o mai fi dat *«stâlpilor»* dela *Gazeta Matematică* să înfăptuiască? Dela *Gazeta* unde se cultivă *«suprema logică»*. Să trăiască!

* * *

Cuvântările D-lor R. Ianculescu, Miron Nicolescu şi O. Ţino au fost redate în întregime după notele D-lui C. Ionescu-Bujor. Toate celelalte verificate după aceleaşi note.

Lt. C-dor Gh. Niculescu.

CRONICA RIMATĂ

A DISCURSURILOR ROSTITE LA BANCHETUL „GAZETEI MATEMATICE"

Când, după zile 'ncordate, Gazeta se întruneşte
In banchet de Sărbătoare şi în cor se preamăreşte
Munca aprigă, cinstită şi efortul sistematic
Al tinerelor vlăstare în ogorul matematic,

Maeştrii noştri, gravi sihaştri,
Ai «Gazetei» stâlpi, pilaştri
Şi-apoi calfele voiase,
Cu pahare cuvioase,

Se ridică, rând cu rândul
Şi-şi spun fiecare gândul,
Bun sau aspru, după fire,
După chef, după simţire:

Cu greu din jilț persoana-i, Ionescu I. urnește,
Se'ncruntă și privirea-i pe toți încremenește ;
Ca cel mai vechiu, discursul el n'are a alege,
Căci vorba lui e vorbă, cuvântul lui e lege.

Țițeica, profesorul, din alte lumi grăește,
Prin glasu-i, Arhimede sau altul ne vorbește.
Și prea mărețe lucruri el are a ne spune,
Căci comesenii noștrii plutesc în altă lume.

Mai e un «stâlp», tot sdravăn, e A. G. Ioachimescu,
Coleg el e de Școală cu «stâlpul» I. Ionescu ;
El gândul bun îl are pentru cei tinerei
Și le urează sincer s'ajungă-inginerei !

Bunescu, casierul, director general,
Se scoală și vorbește cu glasul doctoral
— «Nu-s tare în discursuri, nici în improvizații ;
Eu una știu, dar bună : Mai dați din cotizații» ! —

Gh. Iliescu, cel cu copertă,
Ca Comandorul depe covertă,
Tună într'una : «Dați-mi materie
Căci în revistă e loc pusderie» ! —

Vorbește dârz maiorul Linteș,
Cu zâmbet fin pe-obrazu-i chipeș :
— «Ca la militărie, eu vă bag în răcori,
Trântindu-vă'n problemă niscai indicatori» ! —

Zapan, colegu-i, vrea s'atenueze
Impresia produsă și să ne îmbuneze :
— «Ca să vă'nseninez, am posibilitate,
Eu cer deci în problemă ... divizibilitate» ! —

Colonelul Buicliu îi ascultă părintește
Și când, ceștia și-au spus păsul, cu blândețe le vorbește :
— «Ce divizibilitate, ce indicatori măi frate !
Vreți să dați probleme bune ?, faceți-le cu pătrate» ! ! —

Maiorul Niculescu, coleg și el cu primii doi,
Face un mare tărăboi :
— «Am vrut ca premianți, să iasă giurgiuvenii
Și mi s'a spus c'așà, mă țin de drăcovenii» ! —

Acriți de lungă vorbă, cerem cu toți în cor
Lui Ioachimescu-fiul, un toast plin de humor:
— *«Cu mine vreți voi oare, cheful a ratrapà?!:*
N'am nimic a vă spune, doar v'a vorbit **papà***»!!* —

Nădejdea noi ne-o punem în bunul Cezărică,
Dar el, plin de durere, din scaun se ridică:
— *«Eu n'am nimic a spune, căci mi-a pierit* **suveica,**
Vorbind la **jubileul** *lui Pompeiu și Țițeica»!!* —

Mai sunt încă băeți tineri, subalternii lui Bunescu:
Vasiliu, Sălăgeanu, Lazu și Zane-Ionescu,
«Dar sărmanii, de discursuri le-a pierit de mult lor cheful,
Căci cu ochi de șoim de pradă îi privește, pe rând, ... șeful».

Și-ar mai fi cel ce vorbește,
Dar talentu'l părăsește
Și-i rămâne drept scăpare
Să vă facă o cântare!

M. GHERMĂNESCU.

CONGRESUL INTERBALCANIC AL MATEMATICIANILOR

Sub auspiciile Guvernului Grec şi sub Preşedenţia de onoare a şefului Guvernului, va avea loc la Atena în zilele de 2 până la 9 Septemvrie anul acesta, un Congres de matematici organizat de Uniunea profesorilor de matematici din Grecia cu concursul Societăţii filosofice a Greciei, al Uniunii fizicianilor Greci, al Federaţiunii Profesorilor din Grecia şi a altor Organizaţiuni.

Comitetul de organizare are pe D-l P. ZERVOS ca Preşedinte şi pe D-l N. HADZIDAKIS ca Vicepreşedinte. Comitetul executiv are ca Preşedinte pe D-l N. HADZIDAKIS şi ca Vicepreşedinţi pe D-nii P. ZERVOS şi C. GEORGIKOPOULOS, ca Secretar general pe D-l C. PAPAÏOANNOU, Strada Solon 104, şi Casier pe D-l C. PETROPOULOS.

Congresul va avea opt secţiuni şi anume : 1. Teoria numerelor şi algebra. 2. Analiza. 3. Geometria. 4. Mecanica raţională, fizica teoretică, fizica matematică, astronomia, geodezia, geofizica. 5. Mecanica aplicată, arta inginerului, aplicaţiuni industriale (ca mecanică, idraulică, architectura navală, aerodinamica, electrotecnica, telegrafia şi telefonia, cu şi fără fir). 6. Calculul probabilităţilor, asigurări, statistică. 7. Filosofie, istorie, chestiuni didactice. 8. Chestiuni profesionale.

La Congres poate participa oricare se interesează de matematicile pure sau aplicate. Se vor ţine şedinţe plenare şi pe secţiuni la Universitatea din Atena. Titlul conferinţelor şi comunicărilor se vor trimite D-lor N. HADZIDAKIS, Strada Dinocrate 40, sau D-lui P. ZERVOS, strada Mytilene 20 până la 1 Iulie. Conferinţele şi comunicările vor fi publicate în actele Congresului. Congresiştii vor vizita Acropole, Muzeele, Locurile Archeologice şi se vor face excursiuni pentru cunoaşterea Greciei ; lor şi familiilor lor li se vor face înlesniri pe Căile ferate din Grecia şi reduceri la hotele şi restaurante ; ei vor putea vizita cu această ocaziune, şi târgul internaţional din Salonic. Pentru Doamne şi Domnişoare, un Comitet special va organiza vizitarea oraşului şi împrejurimile Atenei. Condiţiunile actuale de schimb sunt favorabile pentru şederea străinilor în Grecia.

I. IONESCU.

CĂRȚI VECHI DE MATEMATICĂ*)

In Biblioteca D-lui Inginer D. LEONIDA se găsesc, legate într'un volum, mai multe cărți de matematică, de literatură și de religie, de același format mic 110×60 pe partea tipărită. Cele care ne pot interesa pe noi sunt următoarele:

III. Prima carte din volum este o aritmetică latinească intitulată:

Rudimen | *ta arithmetices.* | *Autore Ioanne Vuolphio* | *Hersbrugiense.* | *Cum Gratia & Priuilegio* | *Caesareo.* | *Franc. Apud. Haer. Chr. Egent.* | *Anno MDLXI.*

Cartea e dar din 1561. Ea începe cu o dedicație în versuri către SEBALDVS HEYDEN, după care urmează o prefață către cititorul sincer, datată Septemvrie 1527 în Nüremberg, Școala Sebaldina și care se încheie cu cuvintele: *„Rămâi sănătos"*. Cartea dar a fost alcătuită sau tipărită în ediție mai veche, cu mult înainte.

Cursul începe cu *Numerația* care nu ține decât trei pagini. Autorul nu cumoștea cuvântul *milion;* el face însă un mic istoric al numerelor mari. Astfel spune că CICERONE a scris numărul 914567 pe cere-l citea: *noningenta quatordecim millia quingenta sexaginta septem.* La C. VERREN găsește numărul 1545416 pe care-l citește ca 1545 mii 416. *Pliniu II* mergea până la zece sute de mii. EUSEBIUM și OROSIUM dedeau ca minute trecute dela nașterea lui Cristos până la 1600 numărul 3525500160 pe care îl pronunța: *tricies quinquies millies ducemies quinquagies quinquiscentena millia centum & sexaginta minuta.*

Operațiunile aritmetice sunt tratate sumar. Mai găsim acolo ca operațiuni aparte *dublarea* și *înjumătățirea.* Adunarea și scăderea o face ca și azi. Tabla înmulțirii până la 9×9 o numește *Tabula comprobationis.* Pentru înmulțirea numerelor peste 5 procedează astfel. Fie 8×7. Se fac diferențele 10 — 8 = 2 și 10 — 7 = 3 și se scrie tabloul:

$$\begin{array}{r} 8\ 2 \\ \times \\ 7\ 3 \\ \hline 5\ 6. \end{array}$$

*) A se vedea pag. 44, 163, 201.

Se adună 8 cu 7 şi se scrie dedesubt unimile 5 şi apoi se înmulţeşte 2 cu 3 şi se scrie dedesubt produsul. Rezultatul este numărul scris dedesubt 56. Explicaţia stă în identitatea:

$$ab = (a + b - 10) \times 10 + (10 - a)\ (10 - b).$$

Autorul însă nu dă nici o demonstraţie.

La înmulţirea numerelor de mai multe cifre scrie produsele parţiale unele sub altele, fără deplasare, adică cu unimile pe aceeaşi coloană. Adunarea acestor produse însă o face pe linii înclinate de jos dela dreapta în sus spre stânga cum se vede din exemplul următor:

```
    3 8 4
    2 3 4
  -------
  1 5 3 6
  1 1 5 2
    7 6 8
  -------
  8 9 8 5 6
```

Iată cum împarte pe 835047 prin 123;

```
    1 1 2
    2 2 1
  1 9 3 3
  2 1 7 9 2
  8 3 5 0 4 7 (6 7 8 9)
  1 2 3 3 3 3
    1 2 3 3
      1 2
```

Se scrie sub deîmpărţit împărţitorul şi se repetă ultima cifră până se completează atâtea cifre câte are deîmpărţitul. Se apreciază că prima cifră a câtului este 6 care se scrie după o paranteză pusă în urma deîmpărţitului. Se înmulţeşte 6 cu prima cifră 1 a împărţitorului iar produsul 6 se scoate din 8 prima cifră a deîmpărţitului şi se scrie deasupra acesteia (2), iar pe 8 se barează cu o linie /. Apoi $6 \times 2 = 12$ se scade din 23 de deasupra şi restul 11 se scrie pe două rânduri deasupra, ştergând pe 2 şi 3 cu o linie. Se face produsul $6 \times 3 = 18$ şi se scade din 115 de deasupra, ştergând cifrele utilizate 1, 1, 5. Restul 97 se scrie pe deasupra, După aceia se scrie din nou împărţitorul deplasat cu o cifră spre dreapta,

ştergând cu / pe cel vechiu completându-l cu un 3, (o cifră mai puţin ca la început). Cu acest împărţitor se scoate a doua cifră a câtului şi aşa mai departe. Dacă se dă peste o imposibilitate de scădere, se reia operaţia micşorând cifra apreciată pentru cât. Se vede de aci că operaţiunea cerea pe atunci mai multă atenţie, dibăcie şi muncă ca azi! Nu e dar de mirare că împărţirea erea pe atunci o operaţiune de lux!.

După fiecare operaţiune se dă mijlocul de a-i face proba. Pe atunci erea cunoscută proba prin 9, dar se vede că autorul nu erea mulţumit cu ea, deoarece lasă multe erori nedescoperite, sau că a avut vreo dată neplăcere din cauza ei; el face toate probele utilizând divizorul 7, în care scop dă şi o tabelă cu primii 14 multipli ai lui 7. Se ştie că nici această probă nu este infailibilă însă cu probabilitatea mult mai redusă de a indica ca bună o operaţiune falşă, decât se întâmplă cu proba prin 9.

După operaţiunile cu numerele întregi autorul se ocupă cu regulile de trei simple, cărora le zice *Regula mercatorum* şi trece la fracţiile ordinare arătând cum se transformă şi cum se face operaţiunile cu ele. Se ocupă apoi de probleme de schimburi, de monede şi de regula asociaţiei. Cu aceasta se încheie cele 60 pagini ale aritmeticei rudimentare.

Paginile nu sunt numerotate; ele au jos numai unele notaţii pentru a şti ordinea coalelor iar în aceeaşi coală succesiunea paginilor este dată scriind după ultimul rând din fiecare pagină cuvântul, sau silabe din cuvântul, cu care începe pagina următoare.

IV. A doua carte este tot o aritmetică latinească intitulată:

De. Vi. Ari | *thmeticae pra* | *cticae speciebus Hen* | *rici Glareani* | *Epitome* | *Friburgi Brisgoiae.* | *Cum Gratia ac Priuillegio Regio,* | *ad anno sex.*

Cartea are 76 pagini numerotate, tipărită mai îngrijit ca precedenta şi dedicată lui CAROLO la Wehingen. Dedicaţia poartă data Iunie 1538.

După o prefaţă scurtă, autorul se ocupă de numere şi mai mult de gramatica lor, vorbind de numere cardinale, ordinale, multiplicative, distribuitive, etc. Arată cum se scria numerele de către greci, romani şi arabi. După aceea intră în tratarea aritmeticei care este teoretică şi practică. Nici acest autor nu cunoaşte *milionul;* el cunoaşte însă *miriada* greacă de 10000, şi citează cuvintele

miriade de miriade din Apocalipsul SFÂNTULUI ION. Ne spune că eruditul BUDAEUS număra până la *millies centena millies,* adică până la 100.000.000.

La adunare şi scădere nu găsim nimic interesant. La înmulţire găsim şi aci regula de a înmulţi numere de o cifră peste 5. La înmulţire aranjarea operaţienii diferă însă, după cum se vede din alăturatul exemplu:

```
      2
  1 2 2
  1 1 4
  6 2 0 0
  -------
  3 6 5   Deînmulţitorul
  2 4     Inmulţitorul
  -------
  8 7 6 0 Suma produsă.
```

Produsele parţiale sunt scrise pe deasupra, şi anume unimile pe un rând şi zecile pe deasupra de alt rând.

Impărţirea se face ca în aritmetica precedentă, numai că se scrie câtul tot după o paranteză, mai jos, sub toate operaţiunile de calcul.

După operaţiuni urmează progresiunile aritmetice, proporţiile, care lipseau cu totul în aritmetica precedentă, întru cât pe atunci ele se studiau pe larg în geometria lui EUCLIDE.

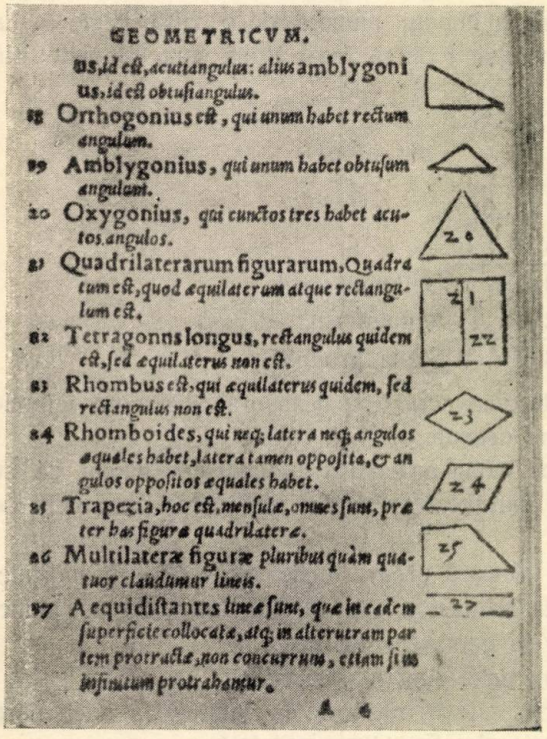
Aplicaţiunile aritmeticiei sunt foarte reduse.

V. O a treia carte este o traducere în latineşte a unei părţi dela începutul Elementelor lui EUCLIDE, intitulată:

Elementale | **Geome** | *tricum, ex Euclidis Geo* | *metris, à Ioanne Voegelin Hayl* | *pronnensi. ad omnium Mathema* | *tices studiosorum utilita* | *tem decerptum.* | *Cum Gratia & Priulegio* | *Caesareo.* | *Franc. Apud. Haer. Chr. Ege.* | *Anno MDLXI.* |

Ea e scrisă de autorul primei aritmetici şi tipărită la Frankfuhrt în acelaşi an. Cartea este dedicată Doctorului şi Matematicului GEORGIO dela Gimnaziul din Viena, la Martie 1528. Ea conţine primele 5 cărţi din Geometria lui EUCLIDE., carte bine cunoscută şi care, după trecerea de 2.000 de ani dela facerea ei, mai servă şi azi în multe şcoli Anglo-Saxone pentru învăţământul Geometriei elementare. După Biblie, ea este cartea care a avut cele mai multe tipărituri, prin ediţii şi traduceri. Un început de traducere în limba

română s'a făcut în Revista *Recreaţii Ştiinţifice* şi e regretabil că România nu are până azi o traducere complectă a acestei remarcabile opere.


GEOMETRICVM.

us, id eſt, acutiangulus: alius amblygoni us, id eſt obtuſiangulus.

18 Orthogonius eſt, qui unum habet rectum angulum.

19 Amblygonius, qui unum habet obtuſum angulum.

20 Oxygonius, qui cunctos tres habet acutos angulos.

21 Quadrilaterarum figurarum, Quadratum eſt, quod æquilaterum atque rectangulum eſt.

22 Tetragonus longus, rectangulus quidem eſt, ſed æquilaterus non eſt.

23 Rhombus eſt, qui æquilaterus quidem, ſed rectangulus non eſt.

24 Rhomboides, qui neq; latera neq; angulos æquales habet, latera tamen oppoſita, & angulos oppoſitos æquales habet.

25 Trapezia, hoc eſt, menſulæ, omnes ſunt, præter has figuræ quadrilateræ.

26 Multilateræ figuræ pluribus quàm quatuor claudumur lineis.

27 Æquidiſtantes lineæ ſunt, quæ in eadem ſuperficie collocatæ, atq; in alterutram partem protractæ, non concurrunt, etiam ſi in infinitum protrahantur.

A 6

Cartea este scrisă în latineasca timpului. Figurile sunt desemnate grosolan pe marginile albe ale paginilor, după cum se poate vedea din reproducerea alăturată prin fotografie a unei pagini. Cartea are 70 de pagini numerotate.

VI. O a patra carte este o Cosmografie însoţită de un Atlas geografic intitulată:

Rudimen | *ta Cosmographica.* | *Tigvri Apud frosco* | *erum. Anno MDXLVIII.* |

In această carte se descrie cerul şi pământul pe cât erau cunoscute pe atunci, în versuri, şi e despărţită în patru cărţi. In prima se vorbeşte de zodiac, de constelaţii, de Calea Laptelui, de cele 7 planete: Saturn, Soarele, Luna, Venus, Marte, Jupiter, Hermes şi de diferite fenomene astronomice. Cartea a doua este destinată Europei, dându-i geografia fizică şi politică. Aci vorbeşte şi de Moldova, Valachia, Transilvania; despre Dunăre şi Carpaţi, de Albam, Varadini, Coroana, Cibini, etc. Cartea treia se ocupă de Asia şi Africa. In Cartea patra se vorbeşte de animalele, plantele şi oamenii de pe globul pământesc, precum şi de ocupaţiunile oamenilor. La fine este o planşă intitulată: *Ciruli sphaerae, cum* V. ZONIS pe care e desemnată o figură care reprezintă un aparat cosmogoafic

cu care se poate arăta meridianele, ecuatorul, zodiacul, etc. format din lamele ce se pot roti în jurul axei lumii. Dedesubtul acestei figuri este scris anul 1530 cu cifrele răsturnate. Pe verso al acestei figuri este o alta care arată pământul înconjurat de apă, apoi totul de aer, de foc şi după aceasta vin cercuri concentrice referitoare la cele 7 planete; cercul extrem, cel mai mare, este împărţit în 12 părţi reprezentând zodiacul.

După aceste două planşe urmează 12 planşe geografice pentru lumea cunoscută pe atunci. Nu este nimic privitor la America, deşi ea erea descoperită la 1530. Se afirmă că aceste 12 hărţi, legate la un loc, constituesc *primul Atlas geografic tipărit.*

Autorul acestei Cosmografii cu atlas este JOHANNES HONTERUS din Braşov. Iată câteva date biografice asupra lui, care mi-au fost date de D-l Inginer D. LEONIDA.

HONTERUS s'a născut la Braşov în 1498 cu numele adevărat de IOHAN GRASS. Nu se ştie cum a ajuns de şi-a luat numele HONTERUS. El a fost poiet şi desemnator, maestru în tipografie şi gravură pe lemn. La etatea de 17 ani erea la Viena iar la 1530 a tipărit la Cracovia prima ediţie de cosmografiei sale, cu două hărţi numai. Tot atunci a tipărit şi o gramatică. Cosmografia a mai avut ediţiuni; astfel a apărut la Bassel în 1532, 1561, 1562 şi 1585, la Braşov în 1541 şi 1543; la Zürich în 1546, 1548, 1549, 1552, 1558, 1564, 1565, 1570, 1573, 1578, 1581, 1583, 1590 şi 1597; La Anvers la 1552, 1560 şi 1564; la Praga 1595; la Colonia în 1600 şi la Hanau în 1611, care e poate cea din urmă ediţie. Hărţile au fost gravate de dânsul şi au fost reproduse şi de alţi autori. Cosmografia lui a servit mult pentru instrucţiunea tineretului de pe acele vremuri. MELANCHTON îl laudă mult în cărţile lui.

HONTERUS a publicat şi o hartă a Transilvaniei care a servit până în secolul XVIII. Harta cu armurile Sibiului şi Braşovului se găseşte numai într'un singur exemplar în Biblioteca Academiei din Budapesta. Criticat aspru pentru această hartă, caută să rescumpere exemplarele răspândite, cu gândul de a o reface, ceea ce nu a putut realiza. Ea a servit ulterior hărţilor lui SAMBUCUS, REICHHERSDORF şi MÜNSTER, care în ediţia Cosmografiei din 1578 a copiat-o direct.

HONTERUS a murit la 1549. Se afirmă că tiparniţa lui cu care a tipărit în diferite oraşe Cosmografia şi Atlasul s'ar fi găsind în un muzeu din Braşov.

Reproduc aci din Atlasul lui HONTERUS harta care cuprinde actualele teritorii ale României Mari. In Valachia sunt date numai

oraşele *Tergouistia* şi *Brayle;* în Moldova *Sossauia* şi *Feltinum* pe Prut; în Basarabia este *Kilia* pusă pe al doilea braţ despre Nord al Dunării din cele cinci braţe arătate acolo ale deltei ei; în Transilvania sunt puse *Corona* (Braşovul), *Bistricia, Varadinum* şi *Debricia.* Mai sunt figurate şi alte oraşe, ca de exemplu Constanţa, dar numele lor nu este scris. Cursul râului Tisa nu este bine figurat dar din hartă se vede bine că Ungaria e toată dincolo de Tisa, şi că partea din dreapta este trecută la Nord ca *Transilvania,* iar partea de jos sub numele de *Dacia.*

Cum HONTERUS erea de sigur un sas din Braşov, şi cum el a cutreerat mult prin Europa cu clişeele şi tiparniţa lui, harta lui este o mărturie preţioasă contra pretenţiunilor Ungurilor de a fi stăpânit teritorile de dincoace de Tisa până în Carpaţi în mod continuu o mie de ani!. Harta aceasta ar trebui reprodusă şi pusă în toate şcolile româneşti. Ea constitue încă o nouă demonstraţiune pentru teza antirevizionistă română scoasă din tratate ştiinţifice, pe lângă aceea pe care am arătat-o la pag. 203 din acest an.

I. IONESCU.

SOLUȚIA GEOMETRICĂ A PROBLEMEI 2699 DIN MATHESIS

In numărul 1 din Ianuarie 1933, revista *Mathesis* publică la pagina 34 soluția problemei 2699, al cărei enunț este:

Fie M *un punct variabil pe o elipsă cu centrul în* O *și cu focarele în* F, F'. *Normala în* M *întâlnește axa mică în* N *și axa mare în* N'. *Se proiectează* N *și* N' *în* P *și* P' *pe* MF', *în* Q *și* Q' *pe* MF. 1°. *Dreapta* PQ *trece prin* O. 2°. *Locul fiecăruia din punctele* P, Q *este o curbă* JERABECK. 3°. *Locul fiecăruia din punctele* P', Q' *este o concoidă a elipsei.* 4°. *Simetricele punctelor* P, Q, P', Q' *în raport cu* M *descriu concoide de ale elipsei.*

Problema a fost rezolvată de D-l G. ROY, prin geometrie elementară pentru punctul 1° și cu ajutorul geometriei analitice, prin coordonate polare, și a geometriei vectoriale pentru celelalte puncte.

In cele ce urmează voi da o soluție geometrică elementară acestei probleme, pentru fiecare conică în parte și voi pune în evidență proprietăți analoage ale unor puncte ale tangentei în M la conică.

Fie, pentru complectarea figurei, T' și T intersecțiile tangentei în M la conică respectiv cu axa FF' și cu axa perpendiculară pe FF'; A, B și A', B' proecțiile lui T, T' pe F'M și FM.

Elipsa. 1°. *Punctele* P, Q, O *și* A, B, O *sunt pe două drepte paralele cu tangenta și cu normala în* M *la elipsă.*

Se știe că normala MN și tangenta MT la elipsă sunt bisectoarele unghiului M a triunghiului FMF'. Pe de altă parte bisectoarele unui unghiu într'un triunghiu întâlnesc mediatoarea laturei opuse în 2 puncte de pe cercul circumscris triunghiului. Deci N și T sunt pe cercul FMF' și fiindcă unghiul NMT este drept, punctele N și T sunt diametral opuse în cercul FMF'.

Cum P, O, Q și A, B, O sunt proecțiile lui N și T pe laturile triunghiului FMF', rezultă că aceste puncte se află pe 2 drepte perpendiculare.

Apoi N fiind pe bisectoarea lui M, urmează că

$$NP = NQ \quad \text{și} \quad MP = MQ$$

deci PQ este perpendiculară pe MN şi prin urmare paralelă cu tangenta TT'.

La fel se arată că AB este paralelă cu MN.

Se poate arăta pe aceeaşi cale că dreptele P'Q' şi A'B' sunt paralele cu tangenta şi normala în M la elipsă.

2°. *Punctele* P *şi* Q *descriu curbe* JERABECK.

Consider că punctul M este în cadranul I. Demonstraţia este aceeaşi şi pentru alte cazuri de figură.

Punctul N fiind pe mediatoarea laturei FF' şi pe bisectoarea unghiului M a triunghiului FMF', avem

$$NP = NQ \quad \text{şi} \quad NF' = NF$$

de unde rezultă că triunghiurile dreptunghice NPF' şi NQF sunt egale, deci

$$F'P = FQ. \tag{1}$$

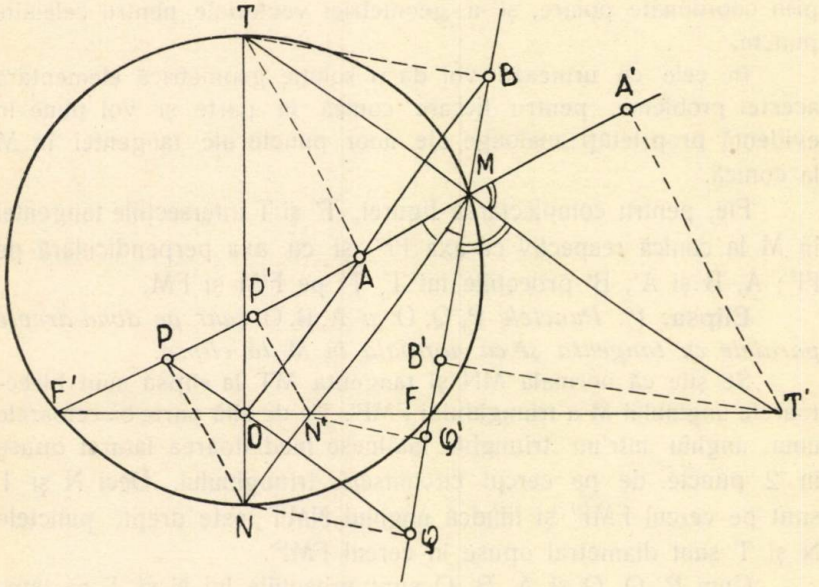


Fig. 1.

Pe figură se vede că

$$\left.\begin{aligned} MP &= MF' - F'P \\ MQ &= MF + FQ \end{aligned}\right\}. \tag{2}$$

Adunând egalitățile (2) membru cu membru și ținând seama de (1) se găsește

$$MP + MQ = MF + MF' = 2a$$

și cum MP și MQ sunt egale, rezultă că

$$MP = MQ = a$$

ceeace arată că punctele P și Q descriu concoide focale de ale elipsei sau, ceeace este tot una, curbe JERABECK.

3⁰. *Punctele* P *și* Q *descriu concoide.*

Din triunghiurile dreptunghice N'P'M și N'Q'M se scoate

$$MQ' = MP' = MN' \cos \frac{M}{2}.$$

Dacă notez ca de obiceiu cu $2c$ lungimea F'F atunci perimetrul triunghiului FMF' este

$$MF + MF' + FF' = 2a + 2c$$

și

$$MF + MF' - FF' = 2a - 2c.$$

Cu aceste observațiuni, aplicând formula obișnuită pentru calculul lungimei bisectoarei interioare a unui triunghiu, se găsește

$$MN' = \frac{1}{a}\sqrt{(a^2 - c^2)\, MF \,.\, MF'}.$$

La fel se găsește

$$\cos \frac{M}{2} = \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{MF \,.\, MF'}}$$

de unde prin înmulțire

$$MQ' = MP' = \frac{a^2 - c^2}{a} = \frac{b^2}{a}$$

ceeace arată că P', Q' descriu concoide focale de ale elipsei.

4⁰. *Simetricele punctelor* P, Q, P', Q' *descriu concoide.*

Proprietatea este evidentă. E destul să ne raportăm la definiția concoidei.

5⁰. *Punctele* A *și* B *descriu niște cercuri.*

Observăm ca la 2⁰ că T fiind pe mediatoarea TO și pe bisectoarea TM :

$$TA = TB \quad \text{și} \quad TF' = TF$$

deci triunghiurile dreptunghice FBT, F'AT sunt egale şi deci

$$BF = AF'.$$

Apoi de pe figură se scoate

$$\left.\begin{aligned} BF &= MF + MB \\ AF' &= MF' - AM \end{aligned}\right\}. \qquad (3)$$

Adunând şi ţinând seamă că AM şi BM sunt egale

$$2BF = 2AF' = MF + MF' = 2a$$
$$BF = AF' = a$$

ceeace demonstrează teorema.

Nu este neapărat nevoie să se treacă prin egalităţile (3) pentru a demonstra această teoremă, ci este destul a observa că

$$MA = MB \quad \text{şi} \quad MF + MF' = 2a.$$

Hiperbola. Ne referim tot la fig. 1 din cazul elipsei, cu observaţiunea că pentru hiperbola MN este tangenta şi TT' normala în punctul M.

1°. *Punctele* P, O, Q *şi* A, B, O *sunt pe două drepte paralele cu normala şi tangenta în* M *la hiperbolă.*

Se face, cuvânt cu cuvânt, demonstraţia dela proprietatea 1° din cazul elipsei.

2°. *Punctele* P *şi* Q *descriu nişte cercuri.*

Scăzând egalităţile (2) una din alta se obţine

$$MF' - MF - F'P - FQ = 0$$

$$\therefore \qquad 2a = FP + FQ = 2F'P = 2F'Q.$$

Deci P şi Q descriu cercuri egale cu centrele în focare.

3°. *Punctele* A *şi* B *descriu concoide.*

Scăzând pe (3) una din alta se obţine

$$MA = MB = a$$

ceeace demonstrează teorema.

4°. *Punctele* A', B' *descriu concoide.*

Din triunghiurile dreptunghice T'A'M şi T'B'M se scoate

$$MA' = MB' = MT' \sin \frac{M}{2}.$$

Ţinând seama că MT′ este bisectoarea exterioară a unghiului M din triunghiul FMF′ se găseşte exact pe aceeaşi cale ca în cazul elipsei

$$MA' = MB' = \frac{c^2 - a^2}{a} = \frac{b^2}{a}$$

deci A′, B′ descriu concoide focale de ale hiperbolei.

5°. *Simetricele punctelor* A, B, A′, B′ *faţă de* M *descriu nişte concoide.*

Proprietate evidentă după cum s'a văzut la 4° la elipsă.

Parabola. Pentru a găsi proprietăţi corespunzătoare la parabolă duc prin M o paralelă la OF şi proectez punctele N, N′, T, T′ în P, P′, A, A′ pe această paralelă; punctele P şi A se confundă şi se mişcă pe tangenta în vârful O al parabolei.

Se ştie că tangenta şi normala în M la parabolă sunt bisectoarele unghiurilor formate de MF şi paralela dusă din M la OF.

Apoi, dacă p este parametrul parabolei, avem:

$$IN' = p \quad ; \quad OI = OT' \quad ; \quad FM = FT' .$$

1°. *Punctul* P′ *descrie o parabolă egală cu cea dată.*

Avem evident

$$MP' = IN' = p .$$

I fiind proecţia lui M pe OF. Deci locul lui P′ este locul lui M translatat.

2°. *Punctul* Q′ *descrie o concoidă focală a parabolei.*

N′M fiind bisectoarea unghiului Q′MP′ avem evident

$$MQ' = MP' = p .$$

Cum F este fix rezultă că Q descrie o concoidă a parabolei.

3°. *Punctul* B *descrie un cerc.*

TM fiind bisectoarea unghiului AMB avem

$$MB = MA$$

dar

$$MA = OI = OT'$$

deci

$$MB = OT'$$

şi cum MFT' este isoscel rezultă că şi OFB este isoscel, de unde

$$FB = FO = \frac{p}{2}$$

şi B descrie un cerc cu centrul în F.

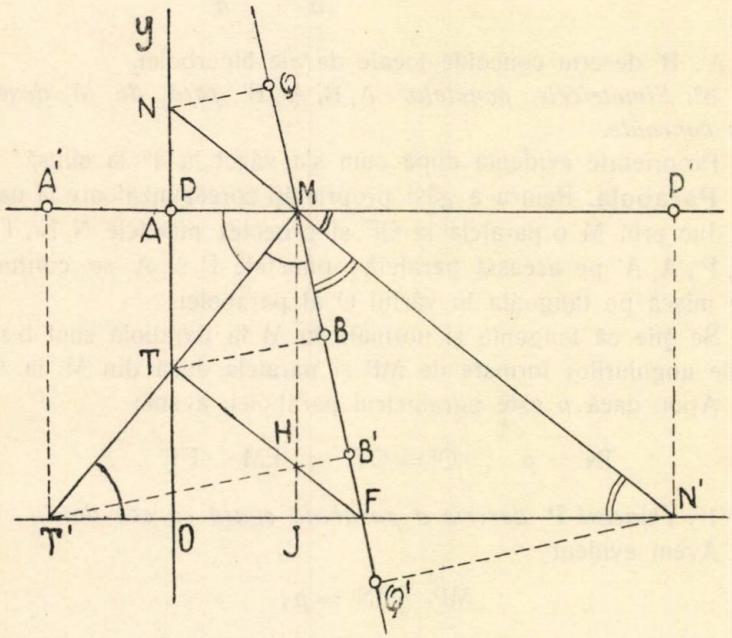


Fig. 2.

4°. A' *descrie o parabolă.*

Avem

$$AM = OT' = AA'$$

deci A' descrie simetrica locului lui M.

5°. *Punctul* B' *descrie o concoidă.*

Triunghiul N'FM este isoscel deci

$$N'F = FM$$

şi cum

$$N'I = Q'M = p$$

rezultă

$$FQ' = FI$$

dar în triunghiul isoscel T'FM.

Observaţiuni. 1°. Nu am găsit pe cale elementară geometrică locurile punctelor A', B' (fig. 1) în cazul elipsei, ale punctelor P', Q' (fig. 1) în cazul hiperbolei şi al punctului Q (fig. 2) în cazul parabolei.

Locurile acestor puncte se pot găsi prin calcule mai lungi prin geometria analitică sau vectorială, ceeace ese din cadrul elementar pe care am vroit să-l dau problemei 2699 din *Mathesis.*

2°. Dacă convenim a numi punctele N, N' şi T, T' picioarele normalei şi ale tangentei în M pe axa nefocală şi pe axa focală, atunci toate proprietăţile demonstrate până aici relativ la elipsă şi la hiperbolă se pot enunţa concentrat în următoarea teoremă:

Proecţiile picioarelor normalelor în un punct M *pe razele vectore ale focarelor descriu concoide focale când* M *se mişcă pe elipsă sau hiperbolă, iar proecţiile pe aceleaşi raze vectore ale piciorului tangentei pe axa nefocală descriu cercuri cu centrele în focare.*

3°. Punctul Q (fig. 2) în cazul parabolei se poate construi uşor geometric dacă se dau punctele F şi O, fără a se construi parabola.

Se duce $Oy \perp OF$ şi se ia un punct T' pe prelungirea lui FO. Cercul de diametru T'F taie pe Oy în T iar cercul cu centrul în F şi raza FT' taie pe TT' în M. Se ia pe FM în sensul FM lungimea MQ egală cu OT' şi se obţine astfel punctul Q.

COL. GH. BUICLIU

NOTE MATEMATICE

46. *Nombres remarquables.* M. IONESCU vient de résoudre une trés intéressante questions d'arithmétique posée dans *The American Mathematical Monthly* par M. W. B. CARVER, (G. M. XXXIX — 210). On peut se proposer la problème plus général suivant:

Déterminer les nombres entiers de $n+1$ *chiffres*

$$N = AB\overline{ab\ldots kl}$$

qui, après transposition du nombre AB *de gauche vers la droite, donnent des multiples de ce nombre.*

Nous faisons abstraction du cas où les chiffres

$$A = B = a = b = \ldots = k = l.$$

Si on pose

$$N_1 = ab \ldots kl\,AB = p \times N \text{ , et } ab \ldots kl = x,$$

il vient

$$p \,.\, | \,\overline{AB} \,.\, 10^n + x \,| = 100x + \overline{AB},$$

d'où

$$x = \overline{AB} \,.\, \left| \frac{p \,.\, 10^n - 1}{100 - p} \right| . \qquad (1)$$

La condition évidente $A \leqslant 49$ entraîne la suivante :

$$2 \leqslant p \leqslant 9.$$

On peut, tout d'abord, observer que le nombre x ne peut être entier lorsque p est *pair*. Il ne faut donc retenir que les valeurs 3, 5, 7, 9 du facteur p.

On obtient alors les valeurs suivantes de x :

$$p = 3. \quad x = \overline{AB} \,.\, \left| \frac{3 \,.\, 10^n - 1}{97} \right|$$

$$p = 5. \quad x = \overline{AB} \,.\, \left| \frac{5 \,.\, 10^n - 1}{95} \right| , \; p = 7. \quad x = \overline{AB} \,.\, \left| \frac{7 \,.\, 10^n - 1}{93} \right|$$

$$p = 9. \quad x = \overline{AB} \,.\, \left| \frac{9 \,.\, 10^n - 1}{91} \right| .$$

La seconde de ces relation a été considérée par M. IONESCU. Nous laissons au lecteur le soin d'envisager les trois autres.

V. THÉBAULT.

47. *Sur le triangle podaire.* Soient un triangle ABC, ($BC = a$, $CA = b$, $AB = c$) ; (0), (I) les cercles circonscrit et inscrit de rayons R, r ; θ l'angle de BROCARD ; P un point de coordonnées normales *absolues* α, β, γ ; A_1, B_1, C_1 les projections orthogonales de P sur BC, CA, AB ; S l'aire du triangle ABC.

1. Marquons sur les axes dirigés A_1P, B_1P, C_1P des points A_2, B_2, C_2, tels que

$$A_1A_2 = ka \text{ , } B_1B_2 = kb \text{ , } C_1C_2 = kc,$$

k étant un coefficient arbitraire positif ou négatif.

L'aire S_2 du triangle $A_2B_2C_2$ s'exprime, en grandeur et en signe,

$$S_2 = \frac{1}{2}\Sigma PB_1 . PC_1 \sin A = \frac{1}{4R}\Sigma \mid kb + \beta \mid . \mid kc + \gamma \mid . a$$

$$= \frac{1}{4R} \mid 3abc\,k^2 + 2(bc\alpha + ca\beta + ab\gamma)\,k + a\beta\gamma + b\gamma\alpha + c\alpha\beta \mid . \quad (1)$$

Le minimum de S_2 a lieu pour

$$k = -\frac{1}{3}\left|\frac{bc\alpha + ca\beta + ab\gamma}{abc}\right|,$$

et S_2 s'annule lorsque

$$3abc\,k^2 + 2(bc\alpha + ca\beta + ab\gamma) + a\beta\gamma + b\gamma\alpha + c\alpha\beta = 0.$$

Dans ce dernier cas, les points A_2, B_2, C_2 sont collinéaires à moins qu'ils ne soient confondus, auquel cas, il faut et il suffit que $A_1P = ka$, $B_1P = kb$, $C_1P = kc$, autrement dit que P coïncide avec le point de LEMOINE du triangle ABC.

2. *Cas particuliers.* Si $k = 0$, le triangle $A_2B_2C_2$ se confond avec le triangle podaire $A_1B_1C_1$ de P dont l'aire S_1 égale

$$S_1 = \frac{1}{4R} \mid a\beta\gamma + b\gamma\alpha + ca\beta \mid ,$$

expression qui apparait de suité sur la figure.

Si $\alpha = \beta = \gamma = r$, on a d'abord $P \equiv I$, et

$$S_2 = \frac{1}{4R} \mid 3abc\,k^2 + 2r(bc + ca + ab)\,k + r^2(a + b + c) \mid ,$$

puis,

$$A_1B_1C_1 = S_1 = \frac{r^2}{4R} \mid a + b + c \mid = \frac{pr^2}{2R}\ ^{1)}.$$

Losque $\alpha = R\cos A$, $\beta = R\cos B$, $\gamma = R\cos C$, $P \equiv 0$ et, il vient, après quelques réduction,

$$S_2 = \frac{1}{4} S \mid 12k^2 + 4\cot\theta\, k + 1 \mid .\ ^{2)}$$

V. THÉBAULT.

---

1) Relation connue.

2) Cette formule paraitra, avec des compliments, dans les *Annales de la Société scientifique de Bruxelles.* (V. T.).

48. *Sărbătorirea D-lui* MATEI M. DRĂGHICEANU. In ziua de 12 Mai, a fost sărbătorit în Localul Societăţii Politecnice din România, Bucureşti Calea Victoriei 158, D-l Inginer de mine MATEI M. DRĂGHICEANU pentru împlinirea a 90 de ani de viaţă. Serbarea a decurs sub Preşedenţia D-lui L. MRAZEC, Preşedintele Academiei Române, care a schiţat activitatea desvoltată de sărbătorit ca inginer de mine, ca profesor de liceu şi al Şcoalei de Poduri, Sosele şi Mine din Bucureşti, ca Director al acelei şcoale şi ca om de ştiinţă. A mai ţinut cuvântări reprezentanţii Societăţii geografice, sărbătoritul fiind singurul ei membru fondator rămas în viaţă; al Societăţii de Geologie, al Institutului geologic, al Ministerului de Industrie, al Regii Monopolurilor Statului, al Institutului naţional pentru utilizarea isvoarelor de energie, al Asociaţii generale a Inginerilor din România şi al Societăţii inginerilor de mine, al Şcoalei Politecnice din Bucureşti şi al Societăţii Politecnice, după care a răspuns şi a mulţumit D-l MATEI M. DRĂGHICEANU.

Las la o parte activitatea inginerească a sărbătoritului, care nu interesează pe cititorii acestei reviste, şi voi spune ceva numai despre activitatea sa ca profesor de Liceu.

D-l DRĂGHICEANU s'a născut în 1844, fiind fiu al lui MIHAI DRĂGHICEANU, inginer eşit din Şcoala lui GHEORGHE LAZĂR, camarad de clasă cu ION HELIADE RĂDULESCU, PETRACHE POIENARU, şi alţi mari patrioţi români; el a fost creator de şcoale româneşti la Caracal şi Târgovişte, acum 100 şi mai bine de ani. Sub impulsiunea lui, fiul său MATEI a prins dragostea pentru învăţătura ştiinţelor, şi a depus o muncă intelectuală serioasă pentru a căpăta cunoştinţe cât mai întinse aşa că, minor fiind, în 1864 este numit profesor de ştiinţele fizice şi naturale la Liceul St. Sava din Bucureşti, unde a avut elevi pe SPIRU HARET, TAKE IONESCU, C. DISESCU, C. ARION, DR. STOICESCU, BAGDAT, fost preşedinte la Curtea de Casaţie, etc.

După doi ani, pe când avea numai 22 ani, în 1866, tipăreşte o Cosmografie foarte bună pentru acele timpuri, pentru uzul Liceelor noastre, întitulată:

„Elemente de Cosmographia prelucrate pentru usulŭ şcólelor secundare. Preciulŭ 3 sfanţĭ. Bucureştĭ. Libraria H. C. Warta, Tipografia St. Rasidescu. 1866».

Din această carte transpiră o mare dragoste a autorului ei pentru ştiinţă şi pentru cultura tineretului dela noi. Iată ce sfaturi frumoase dedea tinerilor, în Prefaţă:

„Să iniţiămŭ dĕrŏ de tempuriŭ junimea la studiile sciinţifice, deprinţênd-o mai întêiŭ de a ceti în marea carte a naturei care se afflă deschisă de miriade de anĭ privirilor homuluĭ care este scrisă in caractere grandióse şi splendide, carte care conţine totŭ ce e admirabilŭ şi utilŭ şi in care junimea va affla fără speculaţiunĭ ostenitóre, mărimea şi perfecţiunea luĭ D-ţeŭ“.

„Imbrăţişaţi dĕrŏ, junĭ elevĭ cu zelŭ şi devotamentŭ studiulŭ natureĭ: ellŭ umple sufletulŭ de sentimente aşa de delicióse, ellŭ va fi urnamentulŭ cellŭ mai solidŭ allŭ spiritului vostru şi plăcerea sea cea mai mare, cea mai sigură a sea consolaţiune!“

Prefaţa o încheie cu cuvintele lui GOETHE:

„Pentru observatorulŭ attentivŭ, natura nu este in neci intr'uă parte mórtă, neci mută“.

Cosmografia conţine 164 pagini şi coprinde următoarele Capitole: I. Aspectul general al cerului. II. Descrierea Cerului. III. Soarele. IV. Pământul. V. Luna. VI. Planete şi Comete.

Cartea se închie cu cuvintele prooroculuĭ ISAIA:

„Ridicaţi ochiĭ voştriĭ în susŭ şi priviţi: Cine a creiat assemenea lucruri?“

Urmează apoi *Addiţiuni*, referitoare la *„calendar“* şi la *„meţiĭ de a mĕssura distanţele, dimensiunile şi massele astrilor“*.

Această carte face cinste autorului ei, mai ales dacă ne gândim în ce epocă a fost scrisă şi la ce etate a fost alcătuită, după autorii cei mai reputaţi de pe vremuri: ARAGO, BRIOT, GARCET, CORTAMBERT, LAPLACE, QUETELET, (pe care l'a tradus mai în urmă SPIRU HARET) şi alţii.

O viaţă atât de lungă şi atât de bine împlinită ca a D-lui MATEIU M. DRĂGHICEANU este un exemplu rar şi bun de adus la cunoştinţa corespondenţilor acestei Reviste, care au dragoste pentru ştiinţă şi putere de muncă pentru a şi-o căpăta şi asimila.

ION IONESCU.

49. *Geometria descriptivă aplicată.* Cu ocaziunea publicării vacanţei catedrei de Geometria descriptivă şi aplicaţiunile ei de la Şcoala Politehnică «Regele Carol II» din Bucureşti, am afirmat unor matematiciani că această catedră intră în domeniul ingineresc iar nu matematic. Mi s'a cerut dovezi legale. Iată o asemenea dovadă:

In Regulamentul pentru organizarea Corpului de ingineri civili ai Statului Român, decretat cu No. 629 la 4 August 1862 de Domnitorul ALEXANDRU IOAN I., Ministru al Lucrărilor publice fiind D. CORNEA, s'a pus ca anexă Programa de cunoştinţe cerute la admiterea la Gradul de inginer. Sub No. 1, ca prima ştiinţă tecnică, se cerea *Geometria descriptivă aplicată,* şi anume:

1. *Umbrele.* Metoda generală a umbrelor. Linia de separaţia umbrei de lumină. Umbra unui corp pe altul, umbra unei nişe. Umbra unui tor pe un cilindru. Umbra unui vas. Punctul briliant.

2. *Perspectiva.* Metoda generală a perspectivei, metoda punctelor de concurs.

3. *Dulgherie.* Construcţiunea principalelor îmbinări de lemne. Construcţia învelişelor. Scări.

4. *Tăierea pietrei.* Numirea feţelor şi a muchelor unei pietre ce face parte din un zid sau o boltă. Ziduri. Numirea părţilor. Construirea unui zid plan (drept, oblic şi înclinat) întrunirea a două ziduri înclinate prin o suprafaţă cilindrică, conică sau strâmbă. Boltele. Boltele în linie dreaptă, făcute în ziduri drepte cilindrice, conice şi şi strâmbe. Bolţi drepte în arc de cerc, făcute în zidurile sus menţionate. Bolte oblice. Bolte drepte de gârliciu. Bolte de revoluţie. Scări de piatră.

Are cunoştinţe tecnice şi practice un matematician ca să predea un asemenea curs?

I. I.

50. *Asupra problemei 4217.* Nota asupra acestei probleme publicată în Anul acesta sub No. 4 de D-ra MARIA NEUMAN, a fost tradusă şi publicată în *Boletino Matematico.* Anul VII. No. 1, pag. 3. După dânsa, D-l B. I. B. publică asupra ei o altă notă intitulată *„O problemă cu istorie“.* Se arată că problema a fost propusă în *Gazeta Matematică,* Anul XXXVIII. No. 5, că a fost reprodusă şi de *Boletin Matematico* în Anul V No. 5, că în acea revistă Anul VI No. 3 i s'a dat soluţia, că a fost rezolvată în *Gazeta Matematică* Anul XXXVIII, pag. 396, că în Anul XXXIX al acestei reviste s'a publicat asupra ei Nota 9 de subsemnatul şi că în No. 4 din acelaşi an s'a publicat nota D-rei MARIA NEUMAN, care, spune D-l B. I. B. *„ne-a surprins cu strălucita D-sale soluţiune pentru care o felicităm foarte călduros“.* D-sa şi-a propus să găsească

sugestiunea care a condus pe D-ra NEUMAN la soluția sa. In Iulie 1933 la pag. 78 din *Boletino Matématico*, D-l B. I. B. a dat la o problemă a D-lui N. N. MIHĂILEANU, peste ecuația:

$$a(b+c)z^2+2(a^2-bc)z-a(b+c)=0,$$

în care înlocuind pe *a, b, c* cu 1, *a, b* se dă peste ecuația D-rei M. NEUMAN!. De aci o mare surprindere!.

D-l B. I. B. dorește să știe numele complect ale autorului problemei 4217, de unde i-a venit ideia; în ce timp, la ce studiu, și în ce circumstanțe D-ra M. NEUMAN a dat peste nota ce a trimis asupra ei. Aceasta ca o curiositate stiințifică de psicologie, pedagogie și metodologie. Și asta pentru că și *„dacă producțiunile științifice în general au valoarea lor, nu trebue pierdut din vedere, pentru studiul matematicilor autoanaliza creatorilor ei, căci fără ei nu e matematică"*.

Chestiunea autorului problemei 4217 pare rezolvată prin notița pusă în josul paginei 334 din *Gazeta Matematică* unde D-l N. CIORĂNESCU caută să se rezerve pentru D-sa inițialele N. C. Rămâne ca D-sa și D-ra M. NEUMAN să răspundă la celelalte cereri ale D-lui B. I. B.

I. I.

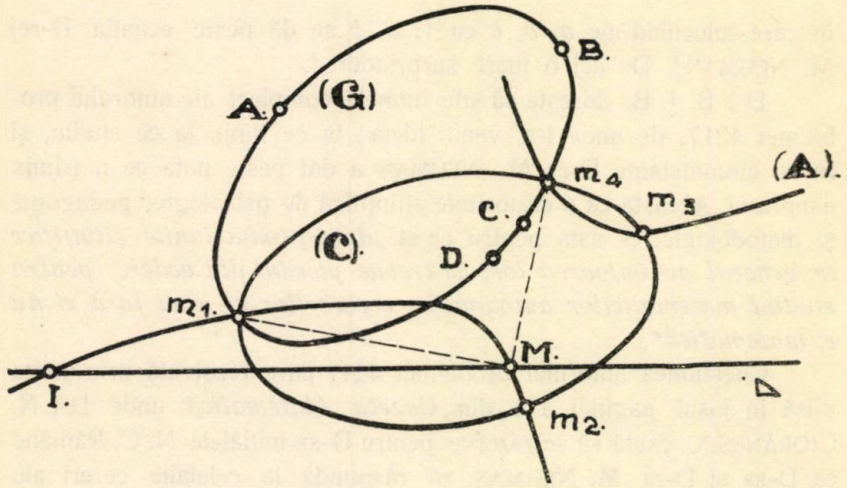
51. *Asupra problemei 4260.* Această problemă este cunoscută; ea este dată sub No. 323, la pag. 34 a culegerii de Probleme de Mecanică: *„Aufgaben aus der technischen Mechanik* de *Wittenbauer* ediția V revăzută de Dr. Ing. T. POESCHL.

I. N. SAGER.
(Profesor la Liceul din Silistra).

52. *Un loc geometric. Cele 6 vârfuri ale patrulaterului format de normalele la o conică fixă în punctele în care e tăiată de o conică ce descrie un fascicol punctual, descriu o curbă de ordinul 9.*

Fie (C) conica fixă, M un punct al locului și m_1, m_2, m_3, m_4 picioarele normalelor din M la (C); două cel puțin din aceste puncte se găsesc pe o conică (g) a fascicolului punctual din enunț.

Voiu număra punctele locului pe o dreaptă Δ. Lui M îi asociez hiperbola lui APOLONIUS față de (C). Când M descrie pe Δ, hiperbola corespunzătoare a lui APOLONIUS (A) descrie un fascicol punctual, căci aceste hiperbole trec prin punctele dela infinit ale



axelor lui (C), prin centrul lui (C) și încă printr'un punct I de pe Δ. Pentru acest ultim punct a se vedea problema 4039, propusă în *Gazeta Matematică,* Vol. XXXVI, la pag. 440.

Obțin pe Δ atâtea puncte ale locului de câte ori o conică (A) și o conică (G) se taie cel puțin în 2 puncte pe (C).

O conică (A) taie pe (C) în 4 puncte care determină 6 coarde. Când (A) descrie fascicolul asociat lui Δ, se știe că cele 6 coarde înfășoară o curbă de clasa 3 pe care să o numim (α).

La fel o conică (G) taie pe (C) în 4 puncte care determină 6 coarde ce înfășoară o curbă (γ), de clasa 3, când (G) descrie fascicolul punctual dat.

Tangentele comune la (α) și (γ), în număr de 9, dau prin urmare 9 cuple de câte 2 puncte (în general) pe (C) în care se taie (A) și (G).

Normalele la (C) în aceste 9 cuple de câte 2 puncte dau pe Δ 9 puncte de ale locului, care este deci de ordinul 9.

AD. GHEORGHIU.

BIBLIOGRAFIE

HENRI GALBUN. *Théorie mathématique de l'assurance maladie.* Paris. 1934. Gauthier-Vilars, Editeur.

Acest volum este fascicola IV din Tomul III al colecţiunii: *«Les applications de la théorie des probabilités aux sciences économiques et aux sciences biologiques»*, care apare sub direcţiunea D-lui E. BOREL.

In introducere autorul dă metodele practicate pentru asigurările în caz de boală a unei persoane şi anume pentru patru evenimente: îmbolnăvirea, vindecare, moartea în timp de sănătate şi în timp de boală. După aceasta urmează studiul matematic al chestiunii. Cap. I se ocupă cu probabilităţile elementare ale teorii asigurărilor pentru caz de boală; Cap. II cu probabilitatea de îmbolnăvire şi de vindecare; Cap. III cu probabilitatea de supravieţuire şi de moarte a unei persoane sănătoase la etatea actuală; Cap. IV cu probabilităţile de supravieţuire şi de moarte a unei persoane la etatea actuală din clasa bolnavilor; Cap. V cu unele proprietăţi ale probabilităţilor definite în capitolele precedente; Cap. VI cu unele valori probabile relative la durata bolilor şi a perioadelor de sănătate; Cap. VII cu valorile probabile de angajamente a căror executare depinde de îmbolnăvire şi de vindecare. La cele mai multe capitole se găsesc la finele lor un rezumat al definiţiunilor şi formulelor date în ele.

După cum spune autorul în Prefaţă, aplicarea formulelor teoretice deduse la cazurile practice cere statistici din care să se deducă valorile numerice de care au nevoie formulele stabilite.

I. I.

Ştiinţă şi Progres. Anul I. 2 Mai 1934. Târgul-Mureş. Geologia şi armata, de Dr. I. P. VOITEŞTI. Lampa cu lumina rece, de A. DUPONT. Unda electromagnetică din radiofonie, de T. J. CODREANU. Celula Fotoelectrică, de elev I. C. SCĂRLĂTESCU. Probleme.

Boletin Matematico. Anul VII. No. 1. Martie 1934. Buenos-Aires. Compliment asupra numerelor raţionale generalizate, de M. O. GONZALES.

Boletin Matematico. Suplemento informativo. Anul II. No. 3. Martie 1934. Buenos-Aires. In acest supliment se vorbeşte şi de Consursul *Gazetei Matematice.*

Journal de Mathematiques Elementaires publié par H. VUIBERT. Anul 58. No. 15. Mai 1934. Paris.

Idem. No. 16. Mai 1934.

Ad. Mineur. *Géométrie analytique plane.* III. Les coniques: Théories particulières, Théorie des foyers et Théories diverses. Bruxelles.

Acest volum este continuarea celui despre care am vorbit la pagina 319. El coprinde studiul parabolei, elipsei şi al iperbolei; proprietăţile focale ale conicelor, polarelor reciproce, teoremele lui NEWTON, MACLAURIN şi CARNOT homotetie şi similitudine, construcţiunea conicelor, noţiuni de geometrie

proiectivă, aria conicelor, rezolvarea grafică a ecuațiilor și diverse alte chestiuni. Deci un material bogat în o broșură de 123 pagini, bine și clar expuse.

I. I.

Boletin Matematico Elemental. Anul V. No. 1. Martie 1934. Buenos-Aires. O teoremă de geometrie în spațiu, de B. I. B.

The Mathematical Gazette. Vol. XVIII. No. 228. Mai 1934. Londra. Funcțiuni de sumă și produs, de V. NAYLOR. Societatea matematică din Edinburgh. Diferențiale. (Discuțiune în Adunarea anuală dela 5 Ianuarie 1934). Matematicile în Școlile centrale. (Discuțiune în Adunarea anuală din 3 Ianuarie 1934). Triunghiul eternal, de N. N. GIBBINS. Metoda lui MAYER pentru rezolvarea ecuații $dz = Pdx + Qdy$, de M. L. CARTWRIGHT. Rigla de calcul în învățământul logaritmilor și radicalelor, de E. J. ATKINSON. Noțiuni geometrice pentru copii tineri, de D-ra E. M. WILLIAMS.

Revista Matematică din Timișoara. Anul XIV. No. 3. Mai 1934. Timișoara. Asupra unei lucrări a D-lui Profesor GIUSPEPE TACCHELLA. De V. ALACI.

Mathematica. Volumul VIII 1934. Cluj. Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles, par T. POPOVICIU. Sur les formes différentielles tensorielles et le théorème de POINCARÉ, par W. SLEBODZINSKI. Zykliden als Bilder von Flächen 2. Ordung in der geraden Kugeltransformation, von E A. WEISS. Sur un problème de caractère intégral relatif à l'equation:

$$\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

par T. WAWEWSKI. Sur les équations aux dérivées partielles de M. M. P. HUMBERT et M. GHERMANESCO, par JACQUES DAVISME. Essay sur le principe des travaux virtuels, par B. H. GERMAY. Sur l'équation $\Delta^n u = 0$, par M. GHERMANESCO. Remarque sur un théorème de MR. WALSH, par J. RUDNICKI. Sur certaines équations aux dérivées partielles du second ordre et du type elliptique à coéfficients singuliers, J. CAPOULADE. Note on the location of the roots of the derivative par of a polynomial, by J. L. WALSH. Sur les ensembles toujours de première catégorie, par W. SIERPINSKI. Sur l'équation du troisième degré, par M. BIERNACKI. L'oeuvre mathématique de PAINLEVÉ, par JEAN CHAZY. Sur un problème concernant les jets gazeux, par CAÏUS JACOB.

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. XL. No. 3. Martie 1934. New-York. Adunarea anuală din Cambridge, de R. G. D. CHARDSON. Medaliile Congreselor internaționale de matematici, de J. L. SYNGE. VEBLEN și relativitatea proiectivă, de D. J. STRUIK. RADO, despre problema lui PLATEAU, de J. DOUGLAS. Coloquium din California, de J. M. THOMAS. Sumare de comunicări.

N. ABRAMESCO. *Sur le cercle d'univalence d'une fonction holomorphe* $f(x)$ *et sur la plus petite distance entre deux zéros d'une équation* $f(x)=A$. (Extras din *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*). Palermo 1934.

Sphinx. Anul IV. No. 6. Iunie 1934. Bruxelles. Asupra unor aplicaţiuni ale probabilităţilor la aritmetică, de E. BOREL. In chestia reformei calendarului gregorian, de A. DECERF.

Natura. Anul 23. No. 5. Mai 1934. Bucureşti. Geometria lui GHEORGHE LAZĂR, de I. IONESCU.

CERERI

238. In ce carte tipărită în limba română sunt date pentru prima dată noţiuni de hidraulică ?

I. I.

DIVERSE

In Secţiunea istorică a Congresului Asociaţiunii Române pentru Inaintarea Ştiinţelor, D-l I. IONESCU a făcut o comunicare asupra Geometrii lui GHEORGHE LAZĂR, iar D-l P. SERGESCU o conferinţă asupra istoricului ştiinţelor matematice în România.

Asupra lucrărilor din celelalte secţiuni, se va publica o dare de seamă.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 3031. *Care sunt numerile de patru cifre, aşa ca produsul cifrelor extreme să fie egal cu suma celor mijlocii, iar produsul acestora egal cu suma primelor. Generalizare pentru un număr de* 2n *cifre. Putem da lui* n *orice valoare ?*

W. SOLOMON.

Fie N_i ($i = 1, 2, 3, 4$) patru numere, având câte un număr oarecare de 2 cifre. Conform enunţului, trebue să avem relaţiile

$$(1) \qquad N_1N_4 = N_2 + N_3 \ , \ N_1 + N_4 = N_2N_3$$

din care deducem

$$(2) \qquad N_{1,4} = \frac{N_2N_3 \pm \sqrt{N_2^2N_3^2 - 4N_2 - 4N_3}}{2} \ .$$

Pentru ca aceste valori să fie întregi trebue ca realizantul să fie un patrat perfect; considerându-l ca un trinom de gradul al doilea în N_2 sau N_3, el trebue să admită rădăcini întregi, deci

$$1 + N_2^3 = k^2,$$

care nu este satisfăcută decât pentru $N_2 = 2$. Relaţia (2) devine

$$(2') \qquad N_{1,4} = N_3 \pm \sqrt{N_3^2 - N_3 - 2}.$$

Cantitatea de sub radical este patrat perfect numai pentru $N_3 = 2, 3$. In primul caz avem

$$N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = 2,$$

cu soluţia 2222; în al doilea,

$$N_1 = 5 \ , \ N_2 = 2 \ , \ N_3 = 3 \ , \ N_4 = 1,$$

cu soluţia 5231.

Evident că soluţii mai sunt şi numerile obţinute din cele de mai sus, schimbând între ele cifrele mijlocii sau extreme, simultan sau în parte. Astfel, pe lângă cele de mai sus, problema admite şi soluţiile

$$5321 \ , \ 1235 \ , \ 1325 \ , \ 2513 \ , \ 2153 \ , \ 3512 \ , \ 3152$$

adică în total nouă soluţiuni, dar numai 2222 şi una singură din celelalte sunt *distincte*.

Notă. 1. D-l M. MARGULIUS a tratat problema în felul de mai sus, dar a găsit numai soluţia 2222.

2. O generalizare, pe care cred că a avut-o în vedere şi autorul problemei, ar fi însă următoarea:

Fie un număr de $4n$ *cifre* $a_1 \ , \ a_2 \ldots a_{2n} \ , \ b_1 \ , \ b_2 \ , \ldots b_{2n}$. *Condiţiile ar fi*

$$a_{1+k} + b_{2n-k} = a_{2n-k} \, . \, b_{1+k} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots 2n - 2.$$

Se vede că în acest fel nu avem decât problema propusă, multiplicată. Soluţiile distincte ar fi

$$\underbrace{22 \ldots 2}_{4n} \quad \text{şi} \quad \underbrace{5252 \ldots 52}_{2n} \quad \underbrace{3131 \ldots 31}_{2n}.$$

M. G.

PROBLEMA 3908. *Să se arate că între elementele unui triunghiu există relaţiunea*

$$\sin^2 A \sin^2 B + \sin^2 B \sin^2 C + \sin^2 C \sin^2 A \leqslant \frac{3}{4}(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C).$$

CEZAR COŞNIŢĂ.

Soluţie dată de Domnii: N. N. ALDEA (student Bucureşti), CEZAR IVĂNESCU (student Iaşi), P. C. MAZILU, A. MIRCEA şi N. D. ZANE.

Fie un triunghiu oarecare ABC, G centrul de greutate, A_1, Q şi A_2, respectiv piciorul înălţimei din A pe BC, proecţia lui G pe BC şi piciorul medianei din A. Avem evident

$$GQ \leqslant GA_2. \tag{1}$$

Din triunghiurile asemenea AA_1A_2, GQA_2 deducem

$$GQ = \frac{AA_1}{3} = \frac{2R \sin B \sin C}{3}$$

$$GA_2 = \frac{AA_2}{3} = \frac{1}{6}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}\ .$$

Prin ridicare la patrat şi înlocuire relaţia (1) devine

$$16R^2 \sin^2 B \sin^2 C \leqslant 2(b^2 + c^2) - a^2.$$

Ţinând seamă de $a = 2R \sin A$, etc. . . , avem

$$4\sin^2 B \sin^2 C \leqslant 3(\sin^2 B + \sin^2 C) - \sin^2 A\ .$$

Adunând această relaţie, cu analoagele ei, se ajunge la relaţia din enunţ, adică

$$\Sigma \sin^2 B \sin^2 C \leqslant \frac{3}{4} \Sigma \sin^2 A\ .$$

Când $A = B = C$, cazul triunghiului echilateral, avem valoarea maximă $\frac{3}{4}$.

Note. 1. D-l A. MIRCEA, a făcut o serie de observaţiuni, găsind în legătură cu demonstrarea relaţiei din enunţ, un număr de alte relaţii:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \geqslant \frac{16}{3} S^2$$

$$\frac{(a^2-b^2)^2}{c^2}+\frac{(b^2-c^2)^2}{a^2}+\frac{(c^2-a^2)^2}{b^2}\geqslant 0$$

$$\frac{9}{16}(\sin^4A+\sin^4B+\sin^4C)\geqslant \sin^4A\sin^4B+\sin^4B\sin^4C+\sin^4C\sin^4A$$

$$\frac{9}{16}\sin^2A\sin^2B+\sin^2B\sin^2C+\sin^2C\sin^2A)\geqslant \sin^2A\sin^2B\sin^2C(\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C).$$

$$3R^2\geqslant\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2+b^2+c^2}\geqslant\frac{16S^2}{9R^2}$$

sau

$$\frac{16}{3}S^2\leqslant\frac{a^2+b^2+c^2}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}\leqslant 9R^4$$

şi termină scriind că s'ar putea deduce prin aceiaş metodă, neegalităţi numerare, noi sau deja cunoscute.

2. D-l M. MĂNESCU a demonstrat relaţia din enunţ, arătând că maximul expresiunei

$$\frac{\Sigma\sin^2A\sin^2B}{\Sigma\sin^2A}$$

este 3/4, când A = B = C.

3. Altă soluţie, diferită, s'a primit de la un ANONIM (după scris ar fi D-l SUB.-LT. I. PAREPEANU).

COLONEL G. I. LIT.

PROBLEMA 4089. *Fie* ABCD *un patrulater inscriptibil; prelungind laturile opuse* AB, DC *şi* CB, DA *se obţin la intersecţiile lor respectiv punctele* E *şi* F.

Să se demonstreze egalităţile [1]) :

$$(1)\qquad \frac{\sin A+\sin B+\sin C+\sin D}{\cos A+\cos B-\cos C-\cos D}=\pm\operatorname{cotg}\frac{F}{2}$$

$$(2)\qquad \frac{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B-\operatorname{tg}C-\operatorname{tg}D}{\operatorname{cotg}A+\operatorname{cotg}B-\operatorname{cotg}C-\operatorname{cotg}D}=\operatorname{cotg}\frac{F+E}{2}\operatorname{cotg}\frac{F-E}{2}.$$

CORNELIU GEORGESCU.

---

1) La enunţarea problemei, autorul a dat părţii a 2-a a egalităţii întâia numai semnul minus.

Soluţie. Dacă figura este astfel notată cu litere, încât latura CD este situată între punctul F şi AB, partea a doua a egalităţii întâia are semnul plus; dacă însă latura AB este situată între F şi CD, atunci semnul părţei a doua din egalitatea 1-a, este minus.

Egalitatea a 2-a, nu'şi schimbă semnul în partea a 2-a, oricum am face notarea cu litere.

1°. *Pentru prima egalitate* putem lua un patrulater complet oarecare, în locul patrulaterului inscriptibil.

Avem succesiv, după felul notării cu litere:

$$F = 180^0 - (A + B) = -[180^0 - (C + D)] \ ;$$

$$F = 180^0 - (C + D) = -[180^0 - (A + B)]$$

şi prin urmare

$$+ \operatorname{cotg}\frac{F}{2} = -\operatorname{tg}\frac{C+D}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{A+B}{2}\right) \ ;$$

$$-\operatorname{cotg}\frac{F}{2} = \operatorname{tg}\frac{A+B}{2} = -\operatorname{tg}\frac{C+D}{2} .$$

Dar

$$\operatorname{tg}\frac{A+B}{2} = \frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}} = \frac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B}$$

şi

$$-\operatorname{tg}\frac{C+D}{2} = \frac{\sin C + \sin D}{-\cos C - \cos D} .$$

De unde

$$\pm \operatorname{cotg}\frac{F}{2} = \frac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B} = \frac{\sin C + \sin D}{-\cos C - \cos D}$$

$$= \frac{\sin A + \sin B + \sin C + \sin D}{\cos A + \cos B - \cos C - \cos D} .$$

2°. *In cazul egalităţei a 2-a,* avem şi

$$E = 180^0 - (B + C) = -[180^0 - (A + D)]$$

sau

$$E = 180^0 - (A + D) = -[180^0 - (B + C)].$$

Deci

$$F+E=C-A \qquad F+E=A-C$$

sau

$$F-E=D-B \qquad F-E=B-D$$

şi prin urmare pentru ambele cazuri:

$$\operatorname{cotg}\frac{F+E}{2}\operatorname{cotg}\frac{F-E}{2}=\operatorname{cotg}\frac{C-A}{2}\operatorname{cotg}\frac{D-B}{2}$$

$$=\operatorname{cotg}\frac{A-C}{2}\operatorname{cotg}\frac{B-D}{2}.$$

In cazul patrulaterului inscriptibil, unghiurile opuse fiind suplimentare, rezultă:

$$\operatorname{cotg}\frac{F+E}{2}\operatorname{cotg}\frac{F-E}{2}=\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B=\frac{\operatorname{sin}A\ \operatorname{sin}B}{\operatorname{cos}A\ \operatorname{cos}B}$$

$$=\frac{\dfrac{\operatorname{sin}(A+B)}{\operatorname{cos}A\ \operatorname{cos}B}}{\dfrac{\operatorname{sin}(A+B)}{\operatorname{sin}A\ \operatorname{sin}B}}=\frac{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}A}{\operatorname{cotg}A+\operatorname{cotg}B}$$

$$=\frac{2(\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B)}{2(\operatorname{cotg}A+\operatorname{cotg}B)}=\frac{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B-\operatorname{tg}C-\operatorname{tg}D}{\operatorname{cotg}A+\operatorname{cotg}B-\operatorname{cotg}C-\operatorname{cotg}D}$$

deoarece avem şi $\operatorname{tg}A=-\operatorname{tg}C$, $\operatorname{cotg}A=-\operatorname{cotg}C$, etc.

S'au primit soluţiuni dela Domnii: N. N. MIHĂILEANU (Constanţa), M. MARGULIUS (Bucureşti), N. N. ALDEA, C. I. CHIRIAC, D. DOGARU, SORIN EFSTATE, C. D. IONESCU (Lic. Laurian); CEZAR IVĂNESCU, D. D. MAVRODIN, S.-LT. E. MILEA, M. LEONTE NEGREA, ŞT. E. OLTEANU, I. C. PAREPEANU, N. PATRAULEA, M. I. POPESCU-STĂNEŞTI, G. ŞT. ROŞCA, I. C. ŞOVA-GRIGORENI, P. M. VARLAM, S.-LT. I. GH. ZAMFIRESCU, N. D. ZANE.

Notă. Soluţia de mai sus a fost redijată după soluţia primită dela D-l N. N. MIHĂILEANU, D-sa fiind singurul care a observat că prima relaţie satisface unui patrulater oarecare, însă nu a făcut distincţia între cele 2 cazuri cum pot fi notate vârfurile patrulaterului şi a considerat la prima egalitate numai semnul plus, în locul semnului minus cum era în enunţul publicat. Numai D-l M. MARGULIUS a făcut această distincţie fără însă a considera pentru prima egalitate cazul unui patrulater oarecare.

COLONEL LITEANU.

PROBLEMA 4195. *Fie* A_1, B_1, C_1 *picioarele înălțimilor triunghiului* ABC; A', A'' *picioarele perpendicularelor* AA', AA'' *respectiv pe* $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_1C_1}$; B', B'' *picioarele perpendicularelor* BB', BB'' *respectiv pe* $\overline{B_1C_1}$, $\overline{B_1A_1}$; C', C'' *picioarele perpendicularelor* CC', CC'' *respectiv pe* $\overline{C_1A_1}$, $\overline{C_1B_1}$ *și în fine* A_2, B_2, C_2 *mijloacele laturilor* B_1C_1, A_1C_1, A_1B_1. *Dacă* $A_3 \equiv (A_1A_2, A'A'')$, $B_3 \equiv (B_1B_2, B'B'')$, $C_3 \equiv (C_1C_2, C'C'')$, *dreptele* AA_3, BB_3, CC_3 *sunt concurente.*

TH. GH. COCEA.

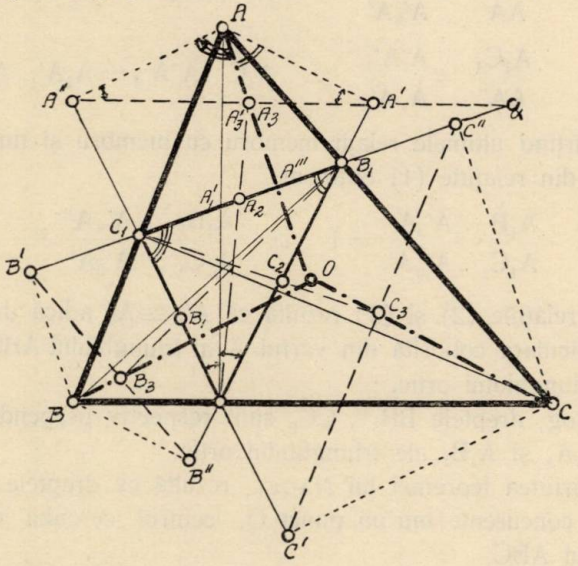
Soluția I-a.

Înălțimea AA_1 fiind bisectoarea unghiului $\widehat{C_1A_1B_1}$ din triunghiul ortic, rezultă că :

(1) $\qquad AA'' = AA'$ și $A_1A'' = A_1A'$.

Insemnând cu α intersecția dreptelor $\overline{A''A'}$ cu $\overline{C_1B_1}$ și considerând triunghiurile $\alpha A'B_1$ și $\alpha A''C_1$ tăiate de transversala $A_1A_2A_3$ avem relațiile :

$$\frac{A_1B_1}{A_1A'} \cdot \frac{A_3A'}{A_3\alpha} \cdot \frac{A2\alpha}{A_2B_1} = 1 \quad \therefore \quad A_1B_1 \cdot A_3A' \cdot A_2\alpha = A_1A' \cdot A_3\alpha \cdot A_2B_1$$



$$\frac{A_1C_1}{A_1A''} \cdot \frac{A_3A''}{A_3\alpha} \cdot \frac{A_2\alpha}{A_2C_1} = 1 \quad \therefore \quad A_1C_1 \cdot A_3A'' \cdot A_2\alpha = A_1A'' \cdot A_3\alpha \cdot A_2C_1.$$

Impărțind ultimele relații membru cu membru, ținând seama de cea de a doua din relațiile (1) și că A_2 fiind mijlocul laturii B_1C_1 , $A_2B_1 = A_2C_1$, rezultă:

$$(2) \qquad \frac{A_1B_1 \cdot A_3A'}{A_1C_1 \cdot A_3A''} \quad \therefore \quad \frac{A_1B_1}{A_1C_1} = \frac{A_3A''}{A_3A'} .$$

Insemnând cu A''' intersecția perpendicularei coborîtă din A pe latura B_1C_1 a triunghiului ortic, cu A'_3 intersecția lui AA''' cu $A'A''$ și cu A'_1 intersecția dreptelor AA_1 și B_1C_1, avem următoarele egalități de unghiuri:

$$\widehat{AA''A'_3} = \widehat{C_1A_1A'_1} \quad , \quad \widehat{A'_3AA''} = \widehat{A'_1C_1A_1}$$

și

$$\widehat{AA'A'_3} = \widehat{B_1A_1A'_1} \quad , \quad \widehat{A'_3AA'} = \widehat{A'_1B_1A_1}$$

ca având laturile perpendiculare, de unde rezultă că triunghiurile $AA''A'_3$ cu $C_1A_1A'_1$ și $AA'A'_3$ cu $B_1A_1A'_1$ sunt asemenea. Putem deci scrie relațiile:

$$\frac{A_1B_1}{AA'} = \frac{A_1A'_1}{A'_3A'} \quad \therefore \quad A_1B_1 \cdot A'_3A' = A_1A'_1 \cdot AA'$$

$$\frac{A_1C_1}{AA''} = \frac{A_1A'_1}{A''A'_3} \quad \therefore \quad A_1C_1 \cdot A''A'_3 = A_1A'_1 \cdot AA''.$$

Impărțind ultimele relații membru cu membru și ținând seama de prima din relațiile (1) obținem:

$$(3) \qquad \frac{A_1B \cdot A'_3A'}{A_1C_1 \cdot A'_3A''} = 1 \quad \therefore \quad \frac{A_1B_1}{A_1C_1} = \frac{A'_3A''}{A'_3A'} .$$

Din relațiile (2) și (3) rezultă că $A'_3 \equiv A_3$ adică dreapta AA_3 e perpendiculara coborîtă din vârful A al triunghiului ABC pe latura B_1C_1 a triunghiului ortic.

Analog, dreptele BB_3 , CC_3 sunt respectiv perpendiculare pe laturile C_1A_1 și A_1B_1 ale triunghiului ortic.

In virtutea teoremei lui NAGEL, rezultă că dreptele AA_3 , BB_3, CC_3 sunt concurente într'un punct O, centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

PREDUȚA D. BUNGEȚIANU
Studentă matematici.

O soluție apropiată de cea de mai sus s'a primit dela D-l V. CEAUȘESCU, elev Lic. Militar Iași.

Soluția II-a.

Lemă: Fie I cercul înscris tr. ABC și D, E, F contactele lui cu laturile. Se consideră intersecțiile: (DI, EF) $= \alpha, \ldots$ Cevienele $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, concură în centrul de greutate al triunghiului.

Observ mai întâi că proprietatea de concurență este mai generală, pentru un I, punct al cubicei DARBOUX a triunghiului, căci tr. (ABC, DEF) și (DEF, $\alpha\beta\gamma$) sunt respectiv omologice, centrul de omologie al ultimei grupe putând fi ales arbitrar.

Identificarea punctului de concurență în cazul particular, o fac prin calcul. Avem în coordonate baricentrice:

$$I(a, b, c);\ D\left(0, \frac{1}{p-b}, \frac{1}{p-c}\right);\ E\left(\frac{1}{p-a}, 0, \frac{1}{p-c}\right);\ F\left(\frac{1}{p-a}, \frac{1}{p-b}, 0\right)$$

Dreptele:

$$(EF) \quad : \quad \alpha(p-a) - \beta(p-b) - \gamma(p-c) = 0$$

$$(DI) \quad : \quad (\alpha b - a\beta)(p-b) = (\alpha c - a\gamma)(p-c)$$

concură în punctul $\alpha\left(\frac{a}{p-a}, 1, 1\right)$ pe mediana în A ($\beta = \gamma$).

c. c. t. d.

Proprietatea se mai enunță:

Mediana din A *taie pe* EF *în* α *și* αI *e perpendiculară pe* BC. Sub această formă proprietatea se poate extinde la cercul exînscris I_a.

A_b, A_c fiind contactele cercului exînscris I_a pe laturile unghiului A, mediana din A a tr. ABC, taie pe A_b A_c în α_1 și I_a α_1 este perpendiculară pe BC. Deci I_a α_1 și dreptele analoage I_b β_1, I_c γ_1 sunt concurente în centrul cercului circumscris triunghiului $I_aI_bI_c$.

E destul să luăm acum pe $I_aI_bI_c$ ca triunghiu de referință și obținem proprietatea problemei 4195.

N. N. MIHĂILEANU
Student, București.

Soluție analitică dată de D-l MARIUS MARGULIUS (București).

Luăm ca triunghiu de referință, tr. $A_1B_1C_1$.

Avem:

$$A(-a, b, c,) \; ; \; A'(c-p, p, 0) \; ; \; A''(b-p, 0, p)$$

$$A'A'' \equiv -p^2\alpha + p(c-p)\beta + p(b-p)\gamma = 0$$

$$A_1A_2 \equiv \beta - \gamma = 0$$

$$A_3(-a, p, p)$$

şi acum vom scrie ecuaţiile dreptelor ce vroim să verificăm dacă sunt concurente:

$$AA_3 \equiv p(c-b)\alpha + a(c-p)\beta + a(p-b)\gamma = 0$$

$$BB_3 \equiv b(p-c)\alpha + p(a-c)\beta + b(a-p)\gamma = 0$$

$$CC_3 \equiv c(b-p)\alpha + c(p-a)\beta + p(b-a)\gamma = 0.$$

Se observă cu uşurinţă că suma acestor trei ecuaţii e identic nulă.

c. c. t. d.

Observaţie. Problema 4195 se poate demonstra cu uşurinţă şi elementar urmărind direct figura indicată de autor.

1°. *Vârfurile* ABC *ale unui triunghiu sunt centrele cercurilor exînscrise triunghiului ortic* ($A_1B_1C_1$).

2°. *Perpendicularele scoborîte din vârfurile unui tr.* ABC *pe laturile triunghiului ortic concură în centrul cercului circumscris tr.* ABC. (Teorema lui NAGEL, v. pr. 663 pag. 284. Ex. de Géom. F. G. M.)

3°. Dintr'un punct A (care este centrul cercului exînscris) nu se poate cobori pe o dreaptă B_2C_2 (care este latura triunghiului ortic) decât o singură perpendiculară. Ca atare această perpendiculară cât şi mediana A_1A_2 vor tăia pe A'A'' în acelaş punct A_3, conform propoziţiunei enunţate în demonstraţia D-lui N. N. M., propoziţiune, care se găseşte demonstrată complet geometric (după cum arată chiar D-l N. N. M.) în „Ex. de Géom. moderne" par PAPELIER la capitolul „Pôles et polaires" § 32 şi mai general la § 39.

Problema este deci demonstrată şi *se observă că ea ascunde prin enunţ două probleme deja cunoscute.*

CPT. GH. N.

PROBLEMA 4197. *Fiind date expresiunile*

$$A = 5(x+y)^{18} + 11x^2y^2(x+y)^{14} - 5(x+y)^{11}(x^7+y^7)$$
$$- 11x^2y^2(x+y)^9(x^5+y^5) - 5(x+y)^7(x^{11}+y^{11})$$
$$- 11x^2y^2(x+y)^7(x^7+y^7) + 11x^2y^2(x+y)^2(x^7+y^7)(x^5+y^5)$$
$$+ 5(x^{11}+y^{11})(x^7+y^7),$$

$$B = (x+y)^{18} - (x+y)^{13}(x^5+y^5) - (x+y)^5(x^{13}+y^{13}) + x^{18} + y^{18} + x^{13}y^5 + x^5y^{13},$$

să se găsească relaţia între A *şi* B.

M. GHERMĂNESCU.

Soluţie dată de D-nii: V. CEAUŞESCU, C. IVĂNESCU, M. MARGULIUS, D. MAVRODIN şi P. MAZILU.

Prima expresiune se poate scrie succesiv:

$$A = 5(x+y)^{11}[(x+y)^7 - x^7 - y^7] - 5(x^{11}+y^{11})[(x+y)^7 - x^7 - y^7]$$
$$+ 11x^2y^2(x+y)^7[(x+y)^7 - x^7 - y^7]$$
$$- 11x^2y^2(x+y)^2(x^5+y^5)[(x+y)^7 - x^7 - y^7],$$
$$= [(x+y)^7 - x^7 - y^7][5(x+y)^{11} - 5(x^{11}+y^{11}) + 11x^2y^2(x+y)^7$$
$$- 11x^2y^2(x+y)^2(x^5+y^5)]$$
$$= 55xy(x+y)[(x+y)^7 - x^7 - y^7][x^6 + 3x^5y + 8x^4y^2$$
$$+ 11x^3y^3 + 8x^2y^4 + 3xy^5 + y^6].$$

Pe de altă parte, (problema 2443, G. M. XXXVIII, p. 63).

$$B = [(x+y)^5 - x^5 - y^5][(x+y)^{13} - x^{13} - y^{13}].$$

Insă, pe calea urmată la problema 2443 se află uşor

$$(x+y)^5 - x^5 - y^5 = 5xy(x+y)(x^2+yx+y^2)$$
$$(x+y)^7 - x^7 - y^7 = 7xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2$$
$$(x+y)^{13} - x^{13} - y^{13} = 13xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2$$
$$(x^6 + 3x^5y + 8x^4y^2 + 11x^3y^3 + 8x^2y^4 + 3xy^5 + y^6).$$

Cu ajutorul acestor identităţi găsim lesne

$$\frac{A}{B} = \frac{77}{13}.$$

Notă. S'au mai primit câteva soluţii în care raportul A/B nu era independent de x şi y.

M, G.

PROBLEMA 4219. *Să se rezolve ecuația*

$$\sin^4 x - 2\cos^3 x - 2\sin^2 x + \lambda \cos x = 0$$

știind că avem

$$\cos^2 x_1 + \cos^2 x_2 + \sin^2 x_3 + \sin^2 x_4 = 2,$$

x_1, x_2, x_3, x_4 *fiind arcele corespunzătoare rădăcinilor ecuației.*

SUB.-LT. IOAN C. SAVIN.

I. *Soluție* dată de D-l CEZAR IVĂNESCU (Bârlad).

Ecuația dată se poate scrie

$$(1 - \cos^2 x)^2 - 2\cos^3 x - 2(1 - \cos^2 x) + \lambda \cos x = 0$$

sau

$$(1) \qquad \cos^4 x - 2\cos^3 x + \lambda \cos x - 1 = 0.$$

Condiția dată se poate scrie

$$(2) \qquad \cos^2 x_1 + \cos^2 x_2 = \cos^2 x_3 + \cos^2 x_4.$$

Să scrim relațiile dintre rădăcinile și coeficienții ecuației (1):

$$(3) \quad \cos x_1 + \cos x_2 + \cos x_3 + \cos x_4 = 2.$$

$$(4) \quad (\cos x_1 + \cos x_2)(\cos x_3 + \cos x_4) + \cos x_1 \cos x_2 + \cos x_3 \cos x_4 = 0.$$

$$(5) \quad \cos x_1 \cos x_2 (\cos x_3 + \cos x_4) + \cos x_3 \cos x_4 (\cos x_1 + \cos x_2) = -\lambda.$$

$$(6) \quad \cos x_1 \cos x_2 \cos x_3 \cos x_4 = -1.$$

Relația (2) se poate pune sub forma:

$$(\cos x_1 + \cos x_2)^2 - 2\cos x_1 \cos x_2 = (\cos x_3 + \cos x_4)^2 - 2\cos x_3 \cos x_4$$

Cum din (3) rezultă

$$\cos x_3 + \cos x_4 = 2 - (\cos x_1 + \cos x_2)$$

putem scrie

$$(\cos x_1 + \cos x_2)^2 - 2\cos x_1 \cos x_2 = 4 + (\cos x_1 + \cos x_2)^2 - 4(\cos x_1 + \cos x_2) - 2\cos x_3 \cos x_4.$$

$$(7) \quad \therefore \quad \cos x_1 \cos x_2 - \cos x_3 \cos x_4 = 2(\cos x_1 + \cos x_2) - 2.$$

De asemenea din (4), ținând seamă de (3) deducem

(8) $\cos x_1 \cos x_2 + \cos x_3 \cos x_4 = (\cos x_1 + \cos x_2)^2 - 2(\cos x_1 + \cos x_2)$.

Adunând și scăzând relațiile (7) și (8) parte cu parte se obține:

(9) $2\cos x_1 \cos x_2 = (\cos x_1 + \cos x_2)^2 - 2$.

(10) $2\cos x_3 \cos x_4 = (\cos x_1 + \cos x_2)^2 - 4(\cos x_1 + \cos x_2) + 2$.

Inmulțind aceste din urmă relații și ținând seama de (6) rezultă:

$$[(\cos x_1 + \cos x_2)^2 - 2][(\cos x_1 + \cos x_2)^2 - 4(\cos x_1 + \cos x_2) + 2] + 4 = 0.$$

Notând

$$\cos x_1 + \cos x_2 = y$$

se obține ecuația

$$y^4 - 4y^3 + 8y = 0$$

care poate fi scrisă

$$y(y-2)(y^2 - 2y - 4) = 0.$$

De unde

$$y_1 = 0\ ,\ y_2 = 2\ ,\ y_3 = 1 + \sqrt{5} \quad \text{și} \quad y_4 = 1 - \sqrt{5}.$$

Luăm pe rând fiecare rădăcină în parte. Avem:

1. *Pentru* $y_1 = 0$, avem

$$\begin{cases} \cos x_1 + \cos x_2 = 0 \\ \cos x_1 \cos x_2 = -1 \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} \cos x_3 + \cos x_4 = 2 \\ \cos x_3 \cos x_4 = 1 \end{cases}$$

care ne dau

$$\cos x_1 = 1\ ,\ \cos x_2 = -1 \quad \text{și} \quad \cos x_3 = 1\ ,\ \cos x_4 = 1.$$

De unde

$$x_1 = 2k\pi\ ;\ x_2 = (2k+1)\pi\ ;\ x_3 = 2k\pi\ ;\ x_4 = 2k\pi$$

putând avem de asemenea $\begin{cases} x_1 = (2k+1)\pi \\ x_2 = 2k\pi. \end{cases}$

2. *Pentru* $y_2 = 0$, rezultă

$$\begin{cases} \cos x_1 + \cos x_2 = 2 \\ \cos x_1 \cos x_2 = 1 \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} \cos x_3 + \cos x_4 = 0 \\ \cos x_3 \cos x_4 = -1. \end{cases}$$

Deci

$$x_1 = 2k\pi\ ;\ x_2 = 2k\pi\ ;\ x_3 = 2k\pi \quad \text{sau} \quad x_3 = (2k+1)\pi\ ;\ x_4 = 2(k+1)\pi \quad \text{sau} \quad x_4 = 2k\pi.$$

In cazurile 1) şi 2) se găseşte $\lambda = 2$.

3. *Pentru* $y_3 = 1 + \sqrt{5}$ se obţine

$$\begin{cases} \cos x_1 + \cos x_2 = 1 + \sqrt{5} \\ \cos x_1 \cos x_2 = 2 + \sqrt{5} \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} \cos x_3 + \cos x_4 = 1 - \sqrt{5} \\ \cos x_3 \cos x_4 = 2 - \sqrt{5}. \end{cases}$$

Rădăcinile sistemului întâiu sunt imaginare, iar rădăcinile sistemului al doilea sunt date de

$$\cos^2 z - (1 - \sqrt{5}) \cos z + 2 - \sqrt{5} = 0$$

având numai rădăcina posibilă

$$\cos z = \frac{1 - \sqrt{5} + \sqrt{2(\sqrt{5} - 1)}}{2} = 0{,}168$$

care dă circa

$z = 80^0 20'$; deci x_3 sau $x_4 = 80^0 20'$ sau $2k\pi \pm 80^0 20'$.

4. *Pentru* $y_4 = 1 - \sqrt{5}$, avem

$$\begin{cases} \cos x_1 + \cos x_2 = 1 - \sqrt{5} \\ \cos x_1 \cos x_2 = 2 - \sqrt{5} \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} \cos x_3 + \cos x_4 = 1 + \sqrt{5} \\ \cos x_3 \cos x_4 = 2 + \sqrt{5} \end{cases}$$

sisteme care dau

x_1 sau x_2 egale circa cu $80^0 20'$ sau $2k\pi \pm 80^0 20'$;

ar x_3 şi x_4 imaginare.

In cazurile 3) şi 4) se găseşte $\lambda = 6$, iar enunţul problemei nu poate fi satisfăcut în cazul ecuaţiei şi relaţiei trigonometrice.

II. *Soluţie* dată de D-l DIMITRIE D. MAVRODIN (liceul M. Eminescu, Loco):

Ecuaţia din enunţ se poate scrie

$$\cos^4 x - 2\cos^3 x + \lambda \cos x - 1 = 0$$

iar relaţia dintre rădăcini

$$\cos^2 x_1 + \cos^2 x_2 = \cos^2 x_3 + \cos^2 x_4.$$

Insemnând $\cos^2 x = v$, (1

ecuaţia dată devine

$$v^2 - 1 = -\sqrt{v}\,(\lambda - 2v)$$

$$\therefore \quad v^4 - 4v^3 - (2 - 4\lambda)\, v^2 - \lambda v + 1 = 0 \qquad (2)$$

iar relaţia dată

$$v_1 + v_2 = v_3 + v_4. \qquad (3)$$

Relațiile dintre rădăcinile și coeficienții ecuației (2), împreună cu relația (3) ne dau pe λ_1 v_1, v_2, v_3 și v_4.

Se obține $\lambda_1 = 6$ și $\lambda_2 = 2$ și sistemele de soluții:

$$(4)\ \begin{cases} v_1 = 1 \pm 2\sqrt{-2-\sqrt{5}} \\ v_2 = 1 \mp \sqrt{-2-\sqrt{5}} \end{cases}; \qquad (5)\ \begin{cases} v_1 = 1 \pm 2\sqrt{\sqrt{5}-2} \\ v_2 = 1 \mp 2\sqrt{\sqrt{5}-2} \end{cases};$$

$$(6)\ \begin{cases} v_1 = 1 \\ v_2 = 1 \end{cases}; \qquad (7)\ \begin{cases} v_3 = 1 \pm 2\sqrt{\sqrt{5}-2} \\ v_4 = 1 \mp 2\sqrt{\sqrt{5}-2} \end{cases};$$

$$(8)\ \begin{cases} v_3 = 1 \pm 2\sqrt{-2-\sqrt{5}} \\ v_4 = 1 \mp 2\sqrt{-2-\sqrt{5}} \end{cases}; \qquad (9)\ \begin{cases} v_3 = 1 \\ v_4 = 1 \end{cases}.$$

Sistemele (4) și (8) sunt imaginare; din (6) și (9) înlocuite în (1) găsim

$\cos^2 x = 1$; $\cos x = \pm 1$ $\therefore$ $x_{1,2,3} = 2k\pi$ iar $x_4 = (2k+1)\pi$

pentru a se satisface relația din enunț.

Din (5) și (7) deducem *numai*

$\cos^2 x = 1 - 2\sqrt{\sqrt{5}-2} = 1 - 0{,}9718 = 0{,}0282$; adică $\cos x = \pm 0{,}168$

ceeace corespunde la arcul de circa $80^0 20'$ — Deci $x = 2k\pi \pm 80^0 20'$, iar relația din enunț nu poate fi satisfăcută în cazul liniilor trigonometrice.

Observație. a) O soluție analoagă celei de a doua s'a primit de la D-l I. CURCHI.

b) Soluții parțiale au fort date de D-nii C. D. IONESCU-ȚIU, MIRCEA-LEONTE NEGREA.

c) In ultimpul timp s'a mai primit o soluțiefoarte bună dela D-l PANAIT C. MAZILU.

COLONEL G. I. L.

PROBLEMA 4237. *Știind că numărul* $2^{512} + 1$ *e divizibil prin* $p = 37 \cdot 2^{16} + 1$, *să se arate că numerile*

$$2^{512-16n} + (-37)^n \qquad n = 1, 2, \ldots 32$$

sunt divizibile prin p.

M. GHERMĂNESCU.

1. *Soluție* dată de D-nii: V. CEAUȘESCU, M. MĂNESCU, G. SILAȘ și GH. STĂNCIULESCU-PITEȘTI.

Numerile date se mai pot scrie

$$\frac{2^{512} + (-37)^n \cdot 2^{16n}}{2^{16n}}$$

și fiindcă numitorul e prim cu p, e destul ca

$$N = 2^{512} + (-37)^n 2^{16n}$$

să fie divizibile cu p. Ori, putem scrie

$$N = 2^{512} + 1 + (-37)^n 2^{16n} - 1 = Mp + (-37)^n 2^{16n} + 1.$$

Insă

$$(-37)^n 2^{16n} + 1 = (-1)^n (37 \cdot 2^{16})^n + 1 = Mp,$$

oricare ar fi paritatea lui n c. c. t. d.

Numerile date sunt întregi numai dacă $512 > 16n$, $n \leqslant 32$.

2. *Generalizare* dată de D-l H. IONESCU-BISS.

Dacă A, B, a, b *sunt numere întregi, astfel încât* $A^a + 1$ *să fie divizibil cu* $p = BA^b + 1$, *atunci* n *fiind un număr întreg ce satisface inegalitatea* $a \geqslant nb$, *toate numerile*

$$N = A^{a-nb} + (-B)^n$$

sunt divizibile prin p.

Demonstrația se face ca mai sus. Mai trebue adăugată condiția ca numerile considerate să fie positive.

M. G.

PROBLEMA 4264. *Fie cercul* ABC *de centru* O; A', B', C' *punctele diametral opuse lui* A, B, C, *iar* A_1, B_1, C_1 *mijloacele laturilor triunghiului* ABC. *Pe dreptele* AA', BB', CC' *se iau în același sens punctele* A_2, B_2, C_2 *așa încât să avem:*

$$\frac{A_2O}{A_2A} = \frac{B_2O}{B_2B} = \frac{C_2O}{C_2C} = K.$$

Perechile de drepte $(B_2C_1, C_2B), (A_2C_1, C_2A_1), (B_2A_1, A_2B_1)$ *concură în* M, N, P *respectiv pe* AA', BB', CC'.

Triunghiul MNP *este omotetic cu* ABC *şi înscris într'un cerc concentric cu* ABC, *iar raportul ariilor este:*

$$\frac{S_{ABC}}{S_{MNP}} = \frac{(K+1)^2}{K^2}.$$

N. N. VELICESCU.

Soluţie dată de D-nii: V. CEAUŞESCU (cl. VI, Lic. Militar Iaşi), CEZAR IVĂNESCU (St. Bârlad), D. D. MAVRODIN (cl. VII, Lic. M. Eminescu Buc.), N. N. MIHĂILEANU (St. Bucureşti), IANCU N. SAGER şi G. SILAŞ (St. Cluj).

1°. Fie M punctul unde B_2C_1 taie pe AA'. Triunghiul AOB tăiat de transversala B_2C_1 ne dă:

$$\frac{MO}{MA} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} \cdot \frac{B_2B}{B_2O} = 1 \quad \therefore \quad \frac{MO}{MA} = \frac{C_1B}{C_1A} \cdot \frac{B_2O}{B_2B}.$$

Dar prin construcţie avem:

$$\frac{C_1B}{C_1A} = -1 \quad \text{şi} \quad \frac{B_2O}{B_2B} = K.$$

Rezultă:

$$\frac{MO}{MA} = -K.$$

Dacă notăm acum cu M' punctul unde C_2B_1 taie pe AA' şi considerăm triunghiul AOC tăiat de transversala C_2B_1, găsim:

$$\frac{M'O}{M'A} = -K.$$

adică M' coincide cu M, ceeace ne spune că dreptele B_2C_1 şi C_2B_1 concură în M pe AA'. Analog, perechile de drepte (A_2C_1 , C_2A_1) şi (B_2A_1 , A_2B_1) concură în N şi P respectiv pe BB' şi CC'.

2°. Având:

$$\frac{MO}{MA} = \frac{NO}{NB} = \frac{PO}{PC} = -K$$

rezultă că triunghiurile ABC şi MNP sunt omotetice, centrul de omotetie fiind O.

3°. Cum în cercul O avem, ca raze:

$OA = OB = OC$ iar $MO = MA + OA$; $NO = NB + OB$; etc.

egalităţile de sub (2) ne dau:

$$OM = ON = OP$$

adică triunghiul MNP este înscris într'un cerc concentric cu cercul O.

4°. Raportul de omotetie fiind:

$$\frac{OA}{OM} = \frac{OA}{OA + AM} = \frac{\frac{OA}{AM}}{\frac{OA}{AM} + 1} = \frac{-K-1}{-K} = \frac{K+1}{K}$$

şi cum raportul suprafeţelor a două triunghiuri asemenea este egal cu patratul raportului de asemănare, vom avea:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{MNP}} = \frac{(K+1)^2}{K^2}$$

şi astfel s'a răspuns la toate punctele cerute de problemă.

Observaţie. 1°. Singurul corespondent care a observat că punctul O poate fi oricare în planul triunghiului, jucând acelaşi rol pentru ambele triunghiuri ABC şi MNP este D-l N. N. MIHĂILEANU. Aceasta rezultă cu uşurinţă şi din mersul demonstraţiei dar şi cu mai multă uşurinţă se poate vedea făcând o proiecţie cilindrică când cercurile devin conice, iar O centrul lor, restul elementelor păstrându-se în acest fel de proiecţie.

2°. Se observă încă, că nici punctele A_1 , B_1 , C_1 nu e nevoie să fie mijloacele laturilor tr. ABC ci e suficient să le împartă în acelaş raport constant, pentruca propietatea să se menţină.

3°. Autorul enunţului a făcut unele observaţiuni în raport cu figura particulară a problemei, dar ele sunt cunoscute. Astfel observaţia mai remarcabilă că dreptele C_1C_2 , A_1B_2 , A_1A_2 sunt concurente este şi ea cunoscută căci se observă cu uşurinţă că triunghiurile $A_1B_1C_1$ şi $A_2B_2C_2$ sunt simetrice.

4°. Traducerea enunţului în proiecţie conică ce va da ?

LT. C-DOR GH. N.

PROBLEMA 4291. *Se cer patratele de opt cifre, la care primele patru cifre sunt identice, iar ultimele formează un patrat perfect.*

V. THÉBAULT.

Soluţie dată de D-l MĂNESCU MIRCEA (Elev cl. VII, Lic. «M. Eminescu», Buc.):

Patratele cerute vor fi de forma

$$iiiiabcd \quad , \quad i = 1, 2, \ldots 9.$$

Vom proceda prin extragere de rădăcină patrată a fiecărui număr, obţinut din cel de sus făcând pe rând $i = 1, 2, \ldots 9$.

Operaţia se urmează după aşezarea de mai jos

$\sqrt{11 \,.\, 11 \,.\, ab \,.\, cd}$	333
$-\ 21.1$	$63 \times 3 = 189$
$22a \,.\, b$	$663 \times 3 = 1989$
1989	
$211 + 10a + b, cd$	666

Trebue să avem, pentru cifra a patra a rădăcinei, egalitatea

$$666x \times x = (211 + 10a + b) \times 100 + 10c + d.$$

Maximul şi minimul membrului al doilea sunt respectiv 21100 şi 30999, de unde rezultă $x = 4$, $abcd = 5556$, care însă nu este patrat perfect.

Procedând în acelaşi mod cu celelalte numere, vom găsi soluţiile

$$66667225 = 8165^2 \ , \ 77774761 = 8819^2.$$

Avem, în adevăr,

$$7225 = 85^2 \ , \ 4761 = 69^2.$$

Notă. 1. Au găsit cele două soluţii de mai sus, tot pe cale de extrageri de rădăcini patrate, D-nii: V. CEAUŞESCU, C. GAVRILESCU, D. MAVRODIN şi GH. VALERIU.

2. D-ra CORNELIA NANEŞ şi D-l A. GEIER au scris patratele cu primele patru cifre identice, din care au extras soluţiile problemei, fără a arăta cum au obţinut pe primele.

3. D-nii ANCA IULIU, M. MARGULIUS, D. MEHEDINŢI, TR. PREDOESCU şi M. PROCOPIESCU, deşi au dat soluţii destul de îngrijite, au pierdut totuşi numărul 77774761.

4. D-l GH. BOIANGIU, servindu-se de cele cuprinse în Nota D-lui VIRG. C. POPESCU (Toulouse) din G. M. XXVII, p. 22, a dat numai soluţia 77774761.

Acea Notă trebue deci completată şi ar fi bine ca un corespondent să reia chestiunea.

5. D-l M. PREDOESCU, după ce umple patru pagini şi jumătate de coală ministerială cu încercări, conchide totuşi că problema n'are soluţii! Bănueşte însă că a greşit, dar declară că renunţă la o verificare. Cred şi eu, faţă de drumul pe care l-a luat.

M. G.

PROBLEMA 4348. *Să se rezolve ecuaţia*:

$$\cos 10x - \cos 8x - \cos 6x + 1 = 0.$$

S.-LT. I. C. SAVIN.

Soluţie dată de D-ra MARIA C. DRĂGUŢ (studentă Cluj) şi D-nii: SUBLOC. A. BĂDESCU (Fontainebleau), PANAIT C. MAZILU (elev inginer), CT. I. CHIRIAC (Şc. preg. ofiţeri), D. MAVRODIN (cl. VII Lic. M. Eminescu, Buc.), N. MIHĂILĂ (st. Cluj), LEONTE-MIRCEA A. NEGREA (Brăila), OCTAVIAN C. PETRESCU (cl. VI Lic. Internat Iaşi), IANCU N. SAGER, GEORGE SILAŞ (st. Cluj), I. C. ŞOVA (Bacău) şi N. VASILESCU-JIU.

Dela Lic. Militar Cernăuţi au trimis soluţia D-nii: TIBUL AMĂRICĂ, V. APOSTOL, N. BOITAN, V. CÂRJĂ, C. CĂŞVEANU, AR. GH. CEHAN, M. CORNESCU, AL. CRĂCEA, C-TIN I. HARET, D. ILIESCU, C. M. MAFTEI, GH. MĂRGĂRIT, C. D. NICOARĂ, V. POPESCU-GREACA, N. TRĂSNITU, C. A. VASILIU, M. I. VASILIU şi SILVIU VERENCA.

Dela Lic. Militar Chişinău, D-nii: HARALAMBIE GH. FLORESCU şi N. I. MILU.

Dela Lic. Militar «N. Filipescu», D-nii: CONST. A. CRISTOPOL, PAUL DOBRESCU, VINTILĂ GRIGORESCU, M. MANAC, DAN MARIN şi ION GH. ŞABAN.

Dela Lic. Militar Iaşi, D-nii: V. I. COTEANU, V. COZMA, C. N. GAVRILESCU, V. GHEORGHIU, V. D. IFRIM, I. S. MERCUREANU, I. V. MIHALACHE, C. NEGOIŢĂ, GH. RUSU, EM. C. STUPEANU, GH. ŞTIRBU şi M. VASILESCU.

Ecuaţia dată se mai poate scrie:

$$(1 - \cos 8x) + (\cos 10x - \cos 6x) = 0.$$

Trecând la sinusuri, ea se transformă succesiv astfel:

$$2 \sin^2 4x - 2 \sin 8x \sin 2x = 0$$

$$\therefore \quad 2 \sin 4x \ (\sin 4x - 2 \cos 4x \sin 2x) = 0$$

$$\therefore \quad 4 \sin 2x \sin 4x \ (\cos 2x - \cos 4x) = 0.$$

Efectuând şi paranteza, avem în cele din urmă:

$$8 \sin x \sin 2x \sin 3x \sin 4x = 0.$$

Soluţiunile ecuaţiei date sunt deci:

$$x = k\pi \; ; \; x = \frac{k\pi}{2} \; ; \; x = \frac{k\pi}{3} \; ; \; x = \frac{k\pi}{4} .$$

Observaţie. In afară de D-l I. C. ŞOVA (Bacău) nici un alt corespondent nu a încercat să dea o formă mai generală ecuaţiei propuse. Ori, atât din mersul rezolvirii cât şi observând coeficienţii numerici ai arcelor desprindem o legătură care se traduce prin sistemul:

$$a + b = 2m$$

$$a - b = m : 2$$

având soluţiile: $a = 5m/4$; $b = 3m/4$, încât ecuaţia cu o formă mai generală decât cea propusă va fi:

$$\cos \frac{5m}{4} x - \cos mx - \cos \frac{3m}{4} x + 1 = 0$$

sau făcând: $m = 4n$, obţinem:

$$\cos 5nx - \cos 4nx - \cos 3nx + 1 = 0 \qquad (1)$$

care se transformă în ecuaţia echivalentă:

$$\sin \frac{n}{2} x \sin nx \sin \frac{3n}{2} x \sin 2nx = 0 \qquad (2)$$

dând rădăcinile:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{k\pi}{n}\right) ; \frac{2}{3}\left(\frac{k\pi}{n}\right) ; \left(\frac{k\pi}{n}\right) ; 2\left(\frac{k\pi}{n}\right) \qquad (3)$$

Făcând în (1), (2) şi (3), $n = 2$, obţinem ecuaţia din problema 4348 echivalenta ei şi soluţiile ei. Pentru $n = 1000$ obţinem:

$$\cos 5000x - \cos 4000x - \cos 3000x + 1 = 0$$

care are ca ecuaţie echivalentă pe:

$$\sin 500x \sin 1000x \sin 1500x \sin 2000x = 0.$$

Noi observăm că arcele ecuaţiei (2) sunt în progresie aritmetică, cu raţia $\frac{1}{2}$ şi deci ele nu pot fi şi consecutive decât pentru $n = 2$, adică tocmai, pentru cazul problemei propuse. Suma acestor arce egalează arcul termenului prim din ecuaţia (1). Altă generalizare, se mai poate aduce problemei 4348?

LT. C-DOR. GH. N.

EXERCIŢII

20. Fie A_h , B_h , C_h picioarele înălţimilor triunghiului ABC pe laturi şi A_c , A_b proecţiile lui A_h pe AB şi AC. Să se demonstreze că :

$$AB \cdot CA_c = AC \cdot BA_b .$$

N. N. MIHĂILEANU.

R. Se observă că

$$\overline{CA}_c^2 = \overline{AA}_c^2 + \overline{AC}^2 - 2\,\overline{AA}_c \cdot \overline{CC}_h, \text{ iar } \overline{BA}_b^2 = \overline{AA}_b^2 + \overline{AB}^2 - 2\,\overline{AA}_b \cdot \overline{BB}_h$$

şi se ţine seama că

$$AB \cdot AA_c = AC \cdot AA_b \text{ iar } AB \cdot CC_h = AC \cdot BB_h$$

apoi se multiplică prima relaţie cu $\overline{AB}^2$ iar a doua cu $\overline{AC}^2$, se ajunge în sfârşit la relaţia din enunţ.

21. Să se construiască două segmente de dreaptă, cunoscând suma lor şi diferenţa pătratelor lor.

S.-LT. AVRAM CONSTANTIN.

R. Notând suma lor cu s şi diferenţa patratelor lor cu k^2 avem :

$$a + b = s \quad (1) \quad \text{şi} \quad \frac{a+b}{k} = \frac{k}{a-b} . \quad (2)$$

Luăm un segment $\overline{AC} = a + b$ şi din C ducem o dreaptă oarecare pe care luăm $\overline{CM} = k$ şi $\overline{MN} = a + b$. In N ducem o paralelă la $\overline{AC}$ şi luăm în sensul dela A la C, segmentul $\overline{NP} = k$. Dreapta $\overline{PM}$ taie dreapta $\overline{AC}$ în R.

Din triunghiurile asemenea RCM şi NMP avem :

$$\frac{\overline{MN}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{NP}}{\overline{RC}} \quad \text{sau} \quad \frac{a+b}{k} = \frac{k}{\overline{RC}}$$

ţinând seama de (2), vedem că $\overline{RC} = a - b$. Atunci $\overline{AR} = \overline{AC} - \overline{RC} = 2b$.

Construim mijlocul B al segmentului $\overline{AR}$ şi avem :

$$\overline{AB} = b \text{ iar } BC = a.$$

PROBLEME PROPUSE

4381. Să se găsească cel mai mic patrat perfect astfel ca ultimele patru cifre dela dreapta să fie termenii unei progresiuni aritmetice.

V. THÉBAULT.

4382. Să se rezolve problema următoare, pe care o extrag din o aritmetică pentru clasele inferioare ale şcoalelor profesionale de fete:

«Un cablu electric compus din 48 de fire de câte 3 mm. diametru a fost înfăşurat de 73 ori neîntrerupt dintr'un capăt în altul al unui drug. Care-i lungimea drugului?»

I. IONESCU.

4383. Se proectează un punct M, de pe înălţimea BD a triunghiului ABC, în E şi F pe bisectoarele unghiului A. Fie P intersecţia lui EF cu AB şi Q intersecţia lui AE cu perpendiculara în P pe FP. Să se demonstreze că FQ trece printr'un punct fix când B se mişcă pe o perpendiculară la AC.

COL. GH. BUICLIU.

4384. Fie M un punct situat în planul poligonului P. Notând $P_1, P_2 \ldots P_n$ poligoanele podare ale punctului M respectiv în raport cu P, $P_1 \ldots P_{n-1}$, să se determine n pentru care P_n este asemenea cu P şi să se arate că M este centrul lor de similitudine.

C. IONESCU-BUJOR.

4385. Să se găsească toate polinoamele de gr. II-a, care satisfac relaţiei:

$$P^2(x+1) - P(x).P(x+2) = 2P(x+1).$$

GH. TH. GHEORGHIU.

4386. Se consideră polinoamele:

$$P(x) = x^2 + ax + b \quad \text{şi} \quad Q(x) = x^2 + px + q$$

şi se notează cu x_1 , x_2 rădăcinile ecuaţiei:

(1) $$P(x) = 0.$$

1. Să se formeze ecuaţia de gr. II-a care are drept rădăcini pe:

$$Q(x_1) \quad \text{şi} \quad Q(x_2).$$

2. Să se deducă de aci condiţia ca ecuaţiile:

$$P(x) = 0 \quad \text{şi} \quad Q(x) = 0$$

să aibă o rădăcină comună.

3. Să se deducă ecuaţia care are drept rădăcini pătratele rădăcinilor ecuaţiei (1).

4. Presupunând $p = 0$ şi pe b şi q cunoscuţi să se determine a aşa fel încât să avem:

$$Q^2(x_1) + Q^2(x_2) + \alpha Q(x_1)\, Q(x_2) = 0.$$

N. BOTEA.

4387. Să se calculeze valoarea determinantului

$$D_n = \begin{vmatrix} 1! & 2! & 3! & \ldots & n! \\ 2! & 3! & 4! & \ldots & (n+1)! \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ n! & (n+1)! & \ldots & & (2n-1)! \end{vmatrix}.$$

M. GHERMĂNESCU.

4388. Fie în triunghiul ABC, A_1, B_1, C_1 picioarele bisectoarelor interioare şi A_2, B_2, C_2 punctele de tangenţă a cercurilor exînscrise cu laturile triunghiului considerat. — Să se stabilească relaţia:

$$A_1A_2 \operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}+B\right) + B_1B_2 \operatorname{tg}\left(\frac{B}{2}+C\right) + C_1C_2 \operatorname{tg}\left(\frac{C}{2}+A\right) = 4R+r.$$

GH. VASILIU.

4389. Prin picioarele izogonalelor unui triunghiu, trec cercurile unui fascicol de cercuri de primul gen, având ca bază dreapta ce uneşte centrele izodinamice ale triunghiului şi ca puncte limită însăşi aceste centre.

COL. GH. I. POPESCU.

4390. Fie α unghiul cu care s'a rotit pământul într'un interval dat şi ω unghiul pe care-l fac axele longitudinale ale unui pat orizontal la începutul şi la sfârşitul intervalului. Să se găsească poziţia patului aşa fel ca unghiul ω să fie minim.

V. VÂLCOVICI.

Începând cu N-rul 7/XXXIX „*Gazeta Matematică*" va apare în 48 pagini, prețul abonamentului rămânând însă același.

Dela apariția ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Amărică T. (4346); *Bădescu A. Subloc.* (4296, 334, 43, 48); *Bădulescu V. D.* (4367); *Boiangiu I. Gh.* (4194, 251); *Bucur M. T.* (4317); *Bungețianu Preduța* (4296); *Cardara Gh.* (4296); *Căşveanu C.* (4346); *Cehan G. A.* (4346); *Cocea G. I.* (4355); *Cocea Th.* (P); *Constantineanu G. G.* (1214, 36, 2609, 23, 92, 889, 3005, 09, 223, 445, 622, N); *Coşavliu Şt.* (4296); *Coteanu I. V.* (4324); *Cseke W.* (4296, 324, 45); *Dăscălescu V. C.* (4296); *Diaconescu Gh. D-tru* (4324); *Dobrescu D. P.* (4233, 47, 312, 46, 67, 79, P); *Florescu H.* (4346, 67); *Gheorghiu Adr.* (3646); *Gheorghiu Valentin* (4324); *Ghiban Gr. Nicolae* (4296, 324); *Grigorescu Vintilă* (4238, 312, 45, 75, 79); *Gatzu Al.* (A); *Harbuz I. Gh.* (4296); *Hornstein H. S.* (4346, 67); *Ionescu C. Em.* (4296); *Ionescu D-tru* (4346); *Ioneanu Ilie* (A); *Lebădă I. D-tru* (4310, 24, 54); *Mănac M.* (4348, 75); *Manu M.* (4313); *Margulius Gr.* (4312. 43, 46, 61, R); *Marin Dan* (4244, 348, 75, 79); *Matei Alex.* (4296); *Mavrodin D. D.* (2469, 4060, 146, 56, 57, 62, 91, 200, 25, 43, 48, 61, 78, 96, 310, 13, 21, 69, 72, 75, 79); *Mazilu C. P.* (3908, 4190, 248, 66, 73, 76, 78, 96, 310, 13, 21, 48, 51, 71); *Mercureanu S. I* (4324, 46, 67); *Mihăileanu N. N.* (1882, 2851, 3646, 4269); *Mihalcea O.* (4367); *Mitache I. A.* (4346); *Negoiță C.* (4296); *Negrea A. M. Leonte* (4298, 307, 48, 51, 78); *Petrescu C. Oct.* (4296); *Petreanu I. I.* (4307, 46, 67); *Popeanu G. Vlad* (4346); *Postelnicescu M.* (4345, 46, E); *Presadă P.* (4296); *Rallea S. M.* (4317, 46, 67); *Rotaru D.* (4251); *Sabac Ion* (4345); *Sager N. I.* (4345, 54); *Silaș G.* (4345); *Simionescu D. Gh.* (N); *Stănculescu Gh.* (4296); *Stănescu Em.* (4296); *Stoicescu T.* (4310); *Stupkaru Z.* (4324); *Thébault V.* (N, P); *Țițcica I. I.* (4346); *Vasilescu C. N.* (4346); *Vasilescu C. N.* (4346); *Vasilescu I. M.* (4324, 46); *Vasiliu Ion* (3646).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât și cele de propus de **geometrie,** *a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.*

Manuscrisele se vor scrie **pe o singură parte a foii și nu se vor tratà mai multe chestiuni diferite pe aceiași foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exercițiile, recreațiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărți sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

«Gazeta Matematică» vinde ani completi broşaţi cu preţul de 400 lei volumul, afară de volumele: X, XVII, XVIII, XIX, XX şi XXI care se vând cu preţul de 500 lei volumul.

Volumele: I, XV şi XXV sunt epuizate.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **N. Abramescu,** *Lecţiunile de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediţia IV revăzută şi adăogită,* 1924 (Epuizată).

3. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de mecanică şi geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

4. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă şi cosmografie* (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu,** *Tratat de geometrie analitică,* Fascicola I *Ediţia II revăzută şi adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—
Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).
Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).
Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150,—

6. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10,—

7. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. Lei 180,—

8. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

9. **G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de geometrie* Lei 150,—

La aceste preţuri se vor adăogà taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II) Lei 150,—

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamaţiunile şi cererile pentru cărţi din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete numai D-lui: Inginer **Al. D. Bunescu,** Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, B-dul Elisabeta 29, Bucureşti I.

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii şi orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie şi expediţie, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Căluşei 23, Bucureşti 4.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXXIX

NUMĂRUL 11. — IULIE 1934

BIBLIOTECA CENTRALĂ ... SIBIU

SUMARUL

1. Premiile „Gazetei Matematice"
2. Géométrie du tétraèdre . . . . . *V. Thébault*
3. Asupra cubicei lui Darboux . . . . . *N. N. Mihăileanu*
4. Note matematice: 53 — 61.
5. Chestiuni de examen.
6. Bibliografie.
7. Cereri: 239.
8. Diverse.
9. Probleme rezolvate: 2609, 3223, 3250, 3461, 3739, 3785, 3826, 3935, 3973, 4233, 4267, 4346.
10. Exerciţii: 22.
11. Probleme propuse: 4391 — 4402.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1934

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: Colonel **Gh. Buicliu** din Ministerul Apărării Naţionale; **I. Buşilă**, Inginer Inspector General, Ministerul Lucrărilor Publice; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice" se vor trimite D-lui Inginer-Şef GH. ILIESCU, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret, Bucureşti 6.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela „*Gazeta Matematică*" („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29 Bucureşti 1) în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 691, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 270, 71, 97, 99, 310, 33, 67, 84, 86, 99, 412, 50, 553, 650, 79, 711, 29, 64, 876, 906, 14, 29, 59, 87, 2004, 17, 70, 74, 111, 70, 338, 405, 30, 39, 66, 77, 502, 03, 56, 77, 87, 607, 38, 55, 65, 84, 709, 13, 17, 35, 69, 80, 814, 65, 86, 909, 12, 26, 36, 47, 3045, 69, 81, 127, 61, 69, 208, 30, 55, 60, 98, 300, 04, 10, 16, 18, 50, 405, 12, 24, 25, 72, 89, 93, 522, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 27, 73, 608, 27, 32, 47, 57, 65, 81, 82, 84, 99, 700, 03, 33, 36, 93, 804, 08, 29, 36, 44, 53, 64, 80, 96, 909, 13, 15, 16, 18, 20, 33, 44, 83, 4010, 13, 30, 34, 45, 53, 59, 62, 68, 70, 73, 85, 102, 03, 11, 12, 18, 19, 23, 32, 48, 50, 51, 63, 67, 69, 92, 203, 06, 09, 10, 13, 26, 30, 36, 40, 49, 52, 75, 77, 80, 81, 83, 87, 88, 89, 90, 300, 01, 03, 15, 19, 20, 22, 32, 33, 37, 40, 41, 42, 44, 52, 56, 57, 58, 59, 60, 62, 63, 64, 65, 66, 68, 70, 73, 74, 76, 77, 80, 81, 82, 84, 85, 86, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 400, 01, 02.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procură dela „*Gazeta Matematică*" („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29. Bucureşti 1), cu preţul de 12 lei.

PREMIILE „GAZETEI MATEMATICE"
PENTRU CONCURSUL ŢINUT ÎN APRILIE 1934

Rezultatul concursului ţinut în zilele de 12, 13 şi 14 Aprilie 1934, s'a publicat la pagina 337 şi următoare ale revistei.

Candidaţilor reuşiţi la concurs li se dau următoarele premii, dintre care unele donate de membrii societăţii noastre, autori de lucrări :

1. *Grigorescu Vintilă :* I. IONESCU. *Comparaţiunea rădăcinilor mai multor ecuaţiuni de gradul al doilea.* (Vol. I şi Vol. II).
   P. APPELL & S. DAUTHEVILLE. *Précis de Mécanique rationnelle.*
2. *Godeanu Vasile :* I. IONESCU. *Reforma calendarului.*
   P. AUBERT & G. PAPELIER. *Exercices D'Algèbre d'Analyse et de Trigonométrie.* (Vol. II).
3. *Dobrescu P. Paul :* I. IONESCU. *Istoricul învăţământului ingineriei în România.*
   E. MOSNAT. *Problèmes de géométrie analytique.* (Vol. I şi II).
4. *Popa Traian :* I. IONESCU. *Viaţa lui* EULER.
   A. JAVARY. *Traité de géometrie Descriptive.* (Première et Deuxième partie).
5. *Cozma Victor :* I. IONESCU. *Despre comparaţiunea construcţiunilor geometrice sau geometrografia.*
   G. ŢIŢEICA, *Culegere de probleme de geometrie.*
6. *Cioc I. Dumitru :* I. IONESCU. *Maşinile de calcul.*
   A. G. IOACHIMESCU. *Culegere de probleme de algebră.*

Conform regulamentului fondului «LT.-COL. GH. A. TĂNĂSESCU» se acordă D-lui GRIGORESCU VINTILĂ, primul reuşit la concurs şi volumul :

MARCEL-YVON: *Mèthodes et Problèmes de géométrie Moderne,* cumpărat din venitul fondului «LT.-COL. GH. A. TĂNĂSESCU».

Fiecare premiat primeşte şi o diplomă.

Premiile şi diplomele se găsesc la D-l Inginer DAN VASILIU, «Monitorul Oficial» Bucureşti, de unde se pot lua sau se pot cere pentru a fi expediate.

DELEGAŢIA SOCIETĂŢII:

COL. GH. BUICLIU, AL. D. BUNESCU, I. BUŞILĂ.

GÉOMÉTRIE DU TÉTRAÈDRE

1. J. NEUBERG définiti ainsi une fonction quadratique très importante dans l'étude du tétraèdre:

$$(1)\quad |\varphi(x)| = \varphi_{11}x_1^2 + 2\varphi_{12}x_1x_2 + 2\varphi_{13}x_1x_3 + 2\varphi_{14}x_1x_4 + \varphi_{22}x_2^2 + 2\varphi_{23}x_1x_3 + 2\varphi_{24}x_2x_4 + \varphi_{33}x_3^2 + 2\varphi_{34}x_3x_4 + \varphi_{44}x_4^2,$$

où $\varphi_{11} = \varphi_{22} = \varphi_{33} = \varphi_{44} = 0$, $\varphi_{rs} = -\frac{1}{2}a^2_{rs}$, (a_{rs}) désignant la distance des sounnets A_r, A_s, d'un tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ [1]).

On peut donc écrire plus simplement

$$(2)\quad |\varphi(x)| = a^2_{12}x_1x_2 + a^2_{13}x_1x_3 + a^2_{14}x_1x_4 + a^2_{23}x_2x_3 + a^2_{24}x_2x_4 + a^2_{34}x_3x_4.$$

NEUBERG démontre que si x_1, x_2, x_3, x_4, sont les coordonnées tétraédriques barycentriques d'un point M, $|\varphi(x)|$ est la puissance M de M par rapport à la sphère $(O) \equiv A_1A_2A_3A_4$.

Pour nos jeunes lecteurs, voici quelques applications de cette importante relation (2) qui peut être mise sous la forme

$$(3)\quad M = \left|\frac{1}{x_1+x_2+x_3+x_4}\right|^2 \left| a^2_{12}x_1x_2 + a^2_{13}x_1x_3 + a^2_{14}x_1x_4 + a^2_{23}x_2x_3 + a^2_{24}x_2x_4 + a^2_{34}x_3x_4 \right|,$$

où

$$(4)\quad M = \left|\frac{1}{\Sigma x_1}\right|^2 \left| \Sigma a^2_{12}x_1x_2 \right|,$$

en coordonnées barycentriques absolues.

1) *Bulletins de l'Académie royale de Belgique,* 1870.

2. Soient S_1, S_2, S_3, S_4, les aires des faces $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$, $A_1A_2A_3$, V le volume du tétraèdre, G le centre de gravité, I celui de la sphère inscrite, de rayon r, R le rayon de la sphère (O).

Marquons sur les arêtes A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2, par exemple, des points α_1, α_2, α_3, tels que

$$\frac{A_2\alpha_1}{A_3\alpha_1} = -\frac{S_3^n}{S_2^n}, \quad \frac{A_3\alpha_2}{A_1\alpha_2} = -\frac{S_1^n}{S_3^n}, \quad \frac{A_1\alpha_3}{A_2\alpha_3} = -\frac{S_2^n}{S_1^n},$$

c'est-a-dire des points qui partagent chacune des arêtes du tétraèdre dans des rapports égaux aux $n^{ièmes}$ puissances des aires des deux faces qui leur sont adjacentes.

On a donc

$$\frac{A_2\alpha_1}{A_3\alpha_1} \cdot \frac{A_3\alpha_2}{A_1\alpha_2} \cdot \frac{A_1\alpha_3}{A_2\alpha_3} = -1,$$

et les droites $A_1\alpha_1$, $A_2\alpha_2$, $A_3\alpha_3$, se coupent en un point K_4. Par analogie, on obtient des points K_1, K_2, K_3, sur les autres faces, et les droites A_1K_1, A_2K_2, A_3K_3, A_4K_4, se rencontrent en un point K de coordonnées barycentriques absolues

$$\frac{S_1^n}{S_1^n+S_2^n+S_3^n+S_4^n}, \ldots, \frac{S_4^n}{S_1^n+S_2^n+S_3^n+S_4^n}.$$

En vertu de (3), la puissance du point K, par rapport à (O), s'exprime

$$(5) \qquad -M = \left|\frac{1}{\Sigma S_1^n}\right|^2 \cdot \left|\Sigma a_{12}^2 S_1^n S_2^n\right| .$$

Cas particuliers. Lorsque $n=0$, $n=1$, $n=2$, $M \equiv G$, $M \equiv I$, $M \equiv L$, L étant le point du minimum de la somme des distances aux plans des faces du tétraèdre [1]), et l'on a

$$(6) \qquad -M_G = \frac{1}{16}\left|a_{12}^2+a_{13}^2+a_{14}^2+a_{23}^2+a_{24}^2+a_{34}^2\right| ,$$

$$(7) \qquad -M_I = \left|\frac{1}{S_1+S_2+S_3+S_4}\right|^2 \cdot \left|\Sigma a_{12}^2 S_1 S_2\right| ,$$

$$(8) \qquad -M_L = \left|\frac{1}{S_1^2+S_2^2+S_3^2+S_4^2}\right| \left|\Sigma a_{12}^2 S_1^2 S_2^2\right| ;$$

1) J. NEUBERG. *Mémoire sur le tétraèdre.*

d'où il vient

$$(9) \qquad \overline{OG}^2 = R^2 - \frac{1}{16} \Sigma\, a_{12}^2$$

$$(10) \quad \overline{OI}^2 = R^2 - \left| \frac{1}{\Sigma\, S_1} \right|^2 \left| \Sigma\, a_{12}^2 S_1 S_2 \right|, \quad \overline{OL}^2 = R^2 - \left| \frac{1}{\Sigma\, S_1^2} \right|^2 \left| \Sigma\, a_{12}^2 S_1^2 S_2^2 \right|.$$

3. Considérons, en coordonnées barycentriques dans le tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$, des points

$$M(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,) \quad \text{et} \quad Q(S_1^2 x_1,\ S_2^2 x_2,\ S_3^3 x_3,\ S_4^4 x_4),$$

le conjugué *isotomique* de M est un point $M_1 \left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}, \frac{1}{x_4} \right)$,

et le conjugué *isogonal* de Q est un point $Q' \left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}, \frac{1}{x_4} \right)$,

de sorte que $M_1 \equiv Q'$.

Cette remarque conduit à une propriété assez curieuse des points $K_0, K_1, K_2, K_3, \ldots, K_n$, obtenus en partagent les arêtes du tétraèdre dans des rapports égaux aux $n^{ièmes}$ puissances des aires des deux faces adjacentes.

Le conjugué isotomique du point K_n, *de coordonnées* S_1^n, S_2^n, S_3^n, S_4^n, *par rapport au tétraèdre fondamental, coïncide avec le conjugué isogonal du point* K_{n+2} *de coordonnées barycentriques* S_1^{n+2}, S_2^{n+2}, S_3^{n+2}, S_4^{n+2}.

Ainsi, pour $n = 0$, $K_0 \equiv G\ (1,\ 1,\ 1)$, $K_2 \equiv L\ (S_1^2,\ S_2^2,\ S_3^2,\ S_4^2)$; pour $n = 1$, $K_1 \equiv I$, $K_3 \equiv N\ (S_1^3,\ S_2^3,\ S_3^3,\ S_4^3)$.

4. Si l'on marque sur les arêtes A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2, par exemple, des points α'_1, α'_2, α'_3, qui partagent les arêtes sur lesquelles ils se trouvent dans le rapport des $n^{ièmes}$ puissances des deux arêtes adjacentes, on obtient, en général, deux points α'_1, α''_1, sur chaque arête, et

$$\frac{A_2\alpha'_1}{A_3\alpha'_1} = -\frac{a_{24}^n}{a_{34}^n}, \quad \frac{A_2\alpha''_1}{A_3\alpha''_1} = -\frac{a_{12}^n}{a_{13}^n}.$$

Pour que l'on ait $\alpha'_1 \equiv \alpha''_1$, il faut et il suffit que $a_{13}^n a_{24}^n = a_{12}^n a_{34}^n$, c'est-à-dire que le tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ soit *isodynamique*.

Dans ce cas, les droites $A_1\alpha'_1$, $A_2\alpha'_2$, $A_3\alpha'_3$, se coupent en un point K'_4. La droite $A_4K'_4$, et ses analogues $A_1K'_1$, $A_2K'_2$, $A_3K'_3$, concourent en un point K′ de coordonnées barycentriques absolues

$$x'_1 = \frac{a_{12} + a_{13} + a_{14}}{2\,\Sigma\, a_{12}}, \ldots, x'_4 = \frac{a_{14} + a_{24} + a_{34}}{2\,\Sigma\, a_{12}},$$

en posant $\Sigma\, a_{12} = a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{23} + a_{24} + a_{34}$.

5. Le centre de gravité G et le point L du minimum de la somme des carrés des distances aux plans des faces d'un tétraèdre *quelconque* $A_1A_2A_3A_4$, sont les foyers d'une quadrique de révolution (Q) inscrite au tétraèdre.

Soient x_1, x'_1, les distances de G, L, au plan de la face $A_2A_3A_4$, V le point où la droite AL perce cette face; h_1, h_2, h_3, h_4, les hauteurs du tétraèdre. On a

$$x_1 = \frac{1}{4} h_1 \ , \ x'_1 = h_1 \left| \frac{S_1^2}{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2} \right| ,$$

car, VL: VA $= x'_1 : h_1$, et le point V a pour coordonnées barycentriques (O, S_2^2, S_3^2, S_4^2), par rapport à $A_1A_2A_3A_4$.

Si 2β désigne le petit axe de la quadrique (Q),

$$\beta^2 = x_1 x'_1 = \frac{1}{4} h_1^2 \left| \frac{S_1^2}{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2} \right| = \frac{9}{4} \left| \frac{V^2}{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2} \right| ,$$

d'où

$$(11) \qquad \beta = \frac{3}{2} \cdot \frac{V}{|S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2|^{\frac{1}{2}}} .$$

N. B. Dans un tétraèdre *équifascial*, $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$; la quadrique (Q) se confond avec la sphère inscrite, et

$$r = \beta = \frac{3}{4} \frac{V}{S_1} = \frac{1}{4} h_1 .$$

Par suite, avec (9) et (10), *dans un tétraèdre équifascial, les points* I, G, L, O, *coïncident, et les hauteurs sont égales au quadruple du rayons de la sphère inscrite* [1]).

V. THÉBAULT.
Le Mans (France).

---

1) Propriétés connues.

ASUPRA CUBICEI LUI DARBOUX

Fie P un punct de pe cubica lui DARBOUX a triunghiului ABC. Se ştie că

$$\frac{\cos PAB}{\cos PAC} \cdot \frac{\cos PBC}{\cos PBA} \cdot \frac{\cos PCA}{\cos PCB} = 1. \qquad (1)$$

Acestei relaţii îi asociez şi următoarea identitate valabilă pentru P oricare

$$\frac{\sin PAB}{\sin PAC} \cdot \frac{\sin PBC}{\sin PBA} \cdot \frac{\sin PCA}{\sin PCB} = 1. \qquad (2)$$

Voi demonstra în cele ce urmează câteva proprietăţi ale punctelor P de pe cubica lui DARBOUX.

1°. P *fiind pe cubica lui* DARBOUX, *izogonalul său* Q, *aparţine aceleiaşi cubice.*

Se deduce imediat din însăşi definiţia punctelor izogonale şi din (1).

2°. *Triunghiul podar al lui* P *este omologic cu* ABC.

Fie P_a, P_b, P_c proecţiile lui P pe laturile triunghiului ABC. Se vede pe figură că

$$BP_a = BP \cos PBC \quad ; \quad CP_a = CP \cos PCB$$

deci, ţinând seamă de semne

$$\frac{P_aB}{P_aC} \cdot \frac{P_bC}{P_bA} \cdot \frac{P_cA}{P_cB} = 1.$$

3°. *Triunghiul* $N_aN_bN_c$, *antipodar lui* P, *este omologic cu* ABC.

Fie T_a, T_b, T_c intersecţiile laturilor celor două triunghiuri. Se vede pe figură că

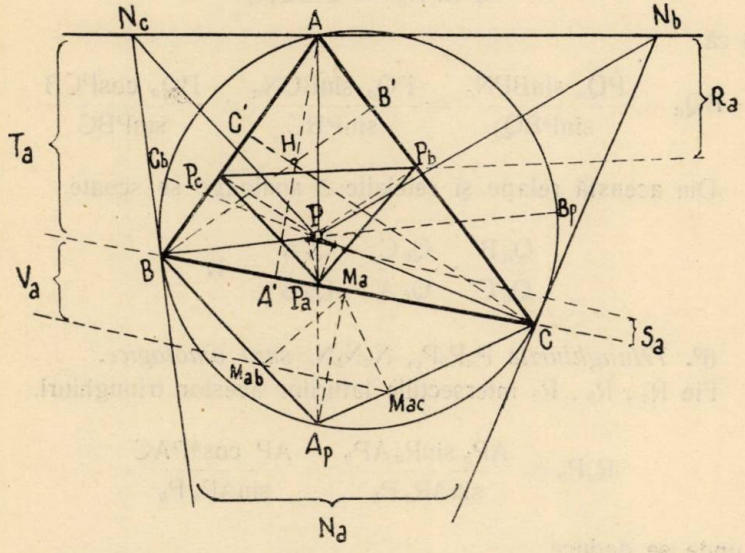
$$\frac{\sin T_aAB}{\sin T_aAC} = \frac{\sin (90^0 - PAB)}{\sin (90^0 + PAB)} = \frac{\cos PAB}{-\cos PAC}. \qquad (3)$$

Relaţiuni analoage se obţin plecând şi dela punctele T_b, T_c. Apoi triunghiurile ABT_a, ACT_a dau

$$\frac{T_aB}{\sin T_aAB} = \frac{AB}{\sin AT_aB}$$

$$\frac{T_aC}{\sin T_aAC} = \frac{AC}{\sin AT_aB}$$

$$\therefore \quad \frac{T_aB}{T_aC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin T_aAB}{\sin T_aAC}.$$



Ţinând seamă de relaţiunile analoage care se obţine plecând dela T_b, T_c şi de (3) se găseşte.

$$\frac{T_aB}{T_aC} \cdot \frac{T_bC}{T_bA} \cdot \frac{T_cA}{T_cB} = 1$$

ceeace demonstrează teorema.

4°. AP, BP, CP *taie cercul* ABC *în* A_c, B_p, C_p *iar aceste puncte se proectează în* M_a, M_b, M_c *pe* BC, CA, AB. *Triunghiurile* ABC, M_a, M_b, M_c *sunt omologice.*

Avem pe figură

$$BA_p = 2R \sin PAB$$

$$BM_a = BA_p \cos A_p BM_a = 2R \sin PAB \cos PAC.$$

Din relaţiile analog obţinute şi ţinând seama de (1) şi (2) se găseşte

$$\frac{M_a B}{M_a C} \cdot \frac{M_b C}{M_b A} \cdot \frac{M_c A}{M_c B} = 1.$$

5°. *Dreptele* PN_a, PN_b, PN_c *întâlnesc laturile triunghiului* ABC *în* Q_a, Q_b, Q_c. *Triunghiurile* ABC, $Q_a Q_b Q_c$ *sunt omologice.*

Patrulaterul $BPCN_a$ fiind inscriptibil

$$\sphericalangle BPN_a = \sphericalangle BCN_a$$

aşa că

$$BQ_a = \frac{PQ_a \sin BPN_a}{\sin PBQ_a} = \frac{PQ_a \sin BCN_a}{\sin PBC} = \frac{PQ_a \cos PCB}{\sin PBC}.$$

Din această relaţie şi celelalte 5 analoage se scoate

$$\frac{Q_a B}{Q_a C} \cdot \frac{Q_b C}{Q_b A} \cdot \frac{Q_c A}{Q_c B} = 1.$$

6°. *Triunghiurile* $P_a P_b P_c$, $N_a N_b N_c$ *sunt omologice.*

Fie R_a, R_b, R_c intersecţiile laturilor acestor triunghiuri.

$$R_a P_b = \frac{AP_b \sin R_a AP_b}{\sin AR_a P_b} = \frac{AP \cos^2 PAC}{\sin AR_a P_b}$$

de unde se deduce

$$\frac{R_a P_b}{R_a P_c} \cdot \frac{R_b P_c}{R_b P_a} \cdot \frac{R_c P_a}{R_c P_b} = 1.$$

Această proprietate constitue o primă generalizare a problemei 1083, propusă de D-l Al. Nicolau în *Revista Matematică din Timişoara* Vol. XII pag. 12.

Proprietăţile 5° şi 6° fac subiectul problemei 3646, propusă de D-l N. G. Botea în *Gazeta Matematică* Vol. XXXIII pag. 320.

7°. *Punctele* P_a, P_b, P_c *se proiectează pe* (BP, CP); (CP, AP) *şi* (AP, BP) *respectiv în* P_{ab}, P_{ac}, P_{bc}, P_{ba}, P_{ca}, P_{cb}. *Triunghiurile dreptelor* $P_{ab}P_{ac}$, $P_{bc}P_{ba}$, $P_{ca}P_{cb}$ *este omologic cu triunghiul* ABC.

Fie S_a, S_b, S_c intersecțiile laturilor considerate. Se găsește că

$$S_aB = \frac{BP_{ab}\,\sin PP_{ab}P_{ac}}{\sin S_a} = \frac{BP_a\,\cos PBC\,\sin PP_aP_{ac}}{\sin S_a}.$$

$$\therefore \quad S_aB = \frac{BP\,\cos^2 PBC\,\sin PCB}{\sin S_a}.$$

Din relațiile analoage și (1), (2) se deduce

$$\frac{S_aB}{S_aC}\cdot\frac{S_bC}{S_bA}\cdot\frac{S_cA}{S_cB} = 1.$$

Această proprietate formează obiectul problemei 3857, propusă de D-l C. Coșniță în *Gazeta Matematică* Vol. XXXV pag. 200.

8°. *Fie* M_{ab}, M_{ac} *proecțiile lui* M_a *pe* BA_p, CA_p *și* M_{bc}, M_{ba}, M_{ca}, M_{cb} *punctele analoage. Triunghiul dreptelor* $M_{ab}M_{ac}$, $M_{bc}M_{ba}$, $M_{ca}M_{cb}$ *este omologic cu triunghiul* ABC.

Dacă V_a, V_b, V_c sunt intersecțiile laturilor acestor triunghiuri atunci

$$V_aB = \frac{BM_{ab}\,\sin A_pM_{ab}M_{ac}}{\sin V_a} = \frac{BM_a\,\cos CBA_p\,\sin A_pM_aM_{ac}}{\sin V_a}$$

$$\therefore \quad V_aB = \frac{BA_p\cos CBA_p\,\sin BCA_p}{\sin V_a} = \frac{2R\,\sin^2 PAB\,\cos^2 PAC}{\sin V_a}$$

$$\therefore \quad \frac{V_aB}{V_aC}\cdot\frac{V_bC}{V_bA}\cdot\frac{V_cA}{V_cB} = 1.$$

Pentru soluția acestei proprietăți a se vedea și Nota Matematică dată de D-l C. Coșniță în *Revista Matematică din Timișoara* Vol. X pag. 28.

9°. *Paralelele, duse prin ortocentrul* H *al triunghiului* ABC, *la cevienele lui* P, *determină pe* BC, CA, AB *punctele* A', B', C'. *Triunghiurile* ABC, A'B'C' *sunt omologice.*

Urmărind figura

$$BA' = \frac{BH\,\sin BHA'}{\sin(AP, BC)} = \frac{BH\,\sin[\sphericalangle(AP, BC) + 90^0 - C]}{\sin(AP, BC)}$$

$$\therefore \quad BA' = \frac{BH\,\sin[90^0 + A - PAB]}{\sin(AP, BC)} = \frac{BH\,\cos PAC}{\sin(AP, BC)}$$

$$\therefore \quad \frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{C'A}{C'B} = 1.$$

Problema 2591, propusă de D-l L. HAMBURGER în *Gazeta Matematică* Vol. XXIII pag. 240, generalizează această chestiune.

10°. *Fie* A_1, B_1, C_1 *trei puncte luate pe paralelele duse prin* H *la cevienele unui punct al cubicei lui* DARBOUX. *Înălțimele triunghiului* ABC *determină picioarele a 3 ceviene pe laturile triunghiului* $A_1B_1C_1$.

Notăm cu A_2, B_2, C_2 intersecțiile înălțimelor cu BC, CA, AB. Avem:

$$A_2B_1 = \frac{HB_1 \sin A_2HB_1}{\sin (AH, B_1C_1)} = \frac{HB_1 \sin (AH, BP)}{\sin (AH, B_1C_1)}$$

$$\therefore \quad A_2B_1 = \frac{HB_1 \cos PBC}{\sin (AH, B_1C_1)}$$

$$\therefore \quad \frac{A_2B_1}{A_2C_1} \cdot \frac{B_2C_1}{B_2A_1} \cdot \frac{C_2A_1}{C_2B_1} = 1.$$

11°. *Fie* A'_1, B'_1, C'_1 *trei puncte pe perpendicularele duse din* H *pe cevienele unui punct al cubicei lui* DARBOUX. *Paralelele duse din* H *la laturile triunghiului* ABC, *determină picioarele a 3 ceviene în noul triunghiu.*

Fie A'_2, B'_2, C'_2 intersecțiile laturilor triunghiului $A'_1B'_1C'_1$ cu paralelele duse din H în condițiile enunțului. Avem:

$$A'_2B'_1 = \frac{HB'_1 \sin A'_2HB'_1}{\sin (HA'_2, B'_1C'_1)} = \frac{HB'_1 \sin (AH, BP)}{\sin (HA'_2, B'_1C'_1)}$$

$$\therefore \quad A'_2B'_1 = \frac{HB'_1 \cos PBC}{\sin (HA'_2, B'_1C'_1)}$$

și deci

$$\frac{A'_2B'_1}{A'_2C'_1} \cdot \frac{B'_2C'_1}{B'_2A'_1} \cdot \frac{C'_2A'_1}{C'_2B'_1} = 1.$$

Pentru proprietățile 9°, 10° și 11° a se vedea și broșura D-lui M. GRÜNBAUM, *Contribuții la geometria Triunghiului,* respectiv chestiunile 15 pag. 35, 16 și 17 pag. 36.

12°. *Transversalele unghiulare ale punctului* P *de pe cubica lui* DARBOUX, *determină pe laturile triunghiului său podar trei puncte pe trei ceviene.*

Fie L_a, L_b, L_c intersecțiile obținute pe P_bP_c, P_cP_a, P_aP_b cu AT, BP, CP.

Avem:

$$\frac{L_a P_b}{L_a P_c} = \frac{PP_b}{PP_c} \cdot \frac{\sin APP_b}{\sin APP_c} = \frac{PP_b}{PP_c} \cdot \frac{\cos PAC}{\cos PAB}$$

de unde se deduce proprietatea 12⁰.

13⁰. Relaţia (1), care caracterizează punctele P se mai poate pune şi sub formele remarcabile

$$\frac{\operatorname{tg} PAB}{\operatorname{tg} PAC} \cdot \frac{\operatorname{tg} PBC}{\operatorname{tg} PBA} \cdot \frac{\operatorname{tg} PCA}{\operatorname{tg} PCB} = 1$$

$$\frac{\sin 2PAB}{\sin 2PAC} \cdot \frac{\sin 2PBC}{\sin 2PBA} \cdot \frac{\sin 2PCA}{\sin 2PBH} = 1.$$

N. N. MIHĂILEANU.

NOTE MATEMATICE

53. *Sur certains carrés parfaits.* Nous avons rappelé, (G. M. vol. XXXVII p. 206), le carré suivant de huit chiffres

$$N = ab\ cd\ ef\ gh$$

tel que les entiers *ab, cd, ef, gh* soient des carrés:

$$N = 6041^2 = 36493681.$$

M. ROSE, qui a signalé ce carré, (*Mathesis* 1931 p. 260), ajoute que N est le seul possédant cette curiosité.

Il a sans doute voulu dire que N est le seul dont les chiffres *a, b, c, d, e, f, g, h* soient *tous différents* de zéro, car les carrés suivants jouissent de la même propriété:

$1000^2 = 0100000$	$4080^2 = 16646400$
$1005^2 = 01010025$	$4100^2 = 16810000$
$1020^2 = 01040400$	$5000^2 = 25000000$
$1080^2 = 01166400$	$5001^2 = 25010001$
$2000^2 = 04000000$	$5004^2 = 25040016$
$2010^2 = 04040100$	$6000^2 = 36000000$
$2090^2 = 04368100$	$6030^2 = 36360900$

$2194^2 = 04813636$ $\quad$ $6041^2 = 36493681$

$3000^2 = 09000000$ $\quad$ $8000^2 = 64000000$

$3060^2 = 09363600$ $\quad$ $8010^2 = 64160100$

$4000^2 = 16000000$ $\quad$ $8040^2 = 64641600$

$4005^2 = 16040025$ $\quad$ $9000^2 = 81000000$

$4020^2 = 16160400$ $\quad$ $9020^2 = 81360400.$

N. B. Voici un carré tel que les nombres formés par les tranches de deux chiffres sont *trois* carrés et *un* cube :

$$3046^2 = 09278116.$$

V. THÉBAULT.

54. *Variaţiuni neproporţionale.* In *„Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie“* tipărită în *„Biblioteca Gazetei Matematice“* Bucureşti 1901, după *„Reguli de trei“* am pus la pagina 39 un Capitol cu *„Variaţiuni neproporţionale“* pentru a se atrage atenţia că sunt mărimi care variază şi altfel decât proporţional şi că problemele asupra lor nu se pot deslega prin reguli de trei.

In această privinţă, iată ce spunea GHEORGHE LAZĂR elevilor săi în *„Aritmetica matematicească“* din 1821, după regulile de trei :

„Dezlegarea aceştii Probleme, să zice şi regula de aor, den pricină, pentrucă prea mare folos are în viaţa de obşte, se zice şi regula de trei, pentrucă den trei numere se află al patrălea analog geometricesc. Insă regula aciasta numai în analogia numerilor celor statornice şi hotărîte are loc, iar în numerile sau cătăţimile, care însămnează curgerea materiilor curgătoare precum ar fi vinu, apa, spiritu, ş. c. l. den oareş care vas, nu să poate întrebuinţa ; den pricină, pentrucă la început materiile acestea pren gaora în fundul vasului făcută, curg mai iute, iară mai în urmă mai încet, den care pricină, acestea au alt canon de socoteală, care se va arăta la locul său“.

Şi cu toate acestea, azi, după un secol şi mai bine, se tipăresc aritmetici în care se dau probleme în care se presupune că apa din rezervoare se scurge în cantităţi proporţionale cu timpul !

I. I.

55. *O complectare.* Din eroare de culegere, sfârşitul frazei cu care se termină pagina 398 din acest an nu a fost imprimat. De aceea ultimul rând al paginei 398 trebuie complectat astfel:

«..., dreptele MI şi T'B' fiind înălţimile scoborîte din vârfurile unghiurilor egale avem

$$FI = FB'$$

care comparată cu egalitatea precedentă dă

$$FB' = FQ'$$

deci B' este simetricul lui Q' faţă de F. S'a văzut la 2^0 că Q' descrie o concoidă, deci şi B' *va descrie o concoidă focală a parabolei*».

COL. GH. BUICLIU.

56. *Asupra problemei 4324.*

S'au primit în ultimul timp soluţiuni la problema 4324 şi dela D-nii: CSEKE VILHELM (student, Cluj), COTEANU I. VASILE, DIACONESCU GH. DUMITRU, GHEORGHIU VALENTIN, GIBAU GR. NICOLAE, LEBĂDĂ I. DUMITRU, MERCUREANU I. S., STUPKARU Z. şi VASILESCU M. toţi elevi ai Liceului militar din Iaşi. Soluţiile elevilor sus menţionaţi sunt aproape pe acelaşi tipic — asta ca să nu zic că sunt copiate unul după altul. Astfel de soluţiuni pe viitor nu se vor mai lua în seamă.

GH. V.

57. *Asupra problemei No. 4327.*

Această problemă a fost rezolvată şi de D-nii: EMIL C. IONESCU (Student, Bucureşti), D. I. LEBĂDĂ (Liceul militar Iaşi), PANAIT C. MAZILU (Şcoala Politehnică Bucureşti), I. ŞABAC (Liceul militar dela Mănăstirea Dealu), GH. STĂNCULESCU-PITEŞTI (Liceul militar Iaşi) şi EMIL M. STĂNESCU.

Soluţiunile Domniilor lor sosind după redijarea problemei, nu au putut fi menţionaţi la pag. 381.

I. S. A.

58. *Asupra problemei 4179.*

După ce această problemă a fost redijată şi dată la tipar, s'au mai primit soluţii foarte bune şi de la Domnii: V. F. CEAUŞESCU,

V. COZMA, T. DIMITRIU, C. N. GAVRILESCU, C. NEGOIȚĂ, GH. RUSSU, C. A. SĂVULESCU, GH. ȘTIRBU și EM. STUPCANU (elevi Lic. Militar Iași).

COLONEL G. I. LITEANU.

59. *O soluție directă a problemei 3894, G.M., XXXVIII, 393.*

In cele ce urmează voiu da o soluție a sus citate probleme care cred că este mai elementară decât cea dată la locul indicat.

Pentru aceasta observ că expresiunea din problema citată se poate pune sub forma:

$$E = (2^{2n} - 1)^2 - 9 \cdot 2^{2n-2} n^2$$

însă avem:

$$(2^{2n}-1)^2 = [(3-1)^{2n}-1]^2 = [3^{2n} - c_{2n}^1 3^{2n-1} + \ldots + 3^2 c_{2n}^{2n-2} c_{2n}^{2n-1} 3 + 1]^2$$

$$= M3^4 + 3^2 (c_{2n}^{2n-1})^2 - 2 \cdot 3^3 c_{2n}^{2n-1} c_{2n}^{2n-2}.$$

Analog avem:

$$2^{2n-2} = (3-1)^{2n-2} = 3^{2n-2} - c'_{2n-2} 3^{2n-3} + \ldots - c_{2n-2}^{2n-3} 3 + 1$$

$$= M3^2 + 1 - 3c_{2n-2}^{2n-3}.$$

Acestea obținute avem:

$$E = M3^4 + 3^2 (c_{2n}^{2n-1})^2 - 23^3 c_{2n}^{2n-1} c_{2n}^{2n-2} - 3^2 n^2 (M3^2 + 1 - 3 c_{2n-2}^{2n-3})$$

$$= M3^4 + 3^2 \left[4n^2 - 6 \frac{2n(2n-1)}{2!} 2n - n^2 + 3n - 2 \right]$$

$$= M3^4 + 3^2 [3^2 (1 - 2n) n^2] = M3^4. \qquad \text{Q. E. D.}$$

HARALAMB P. IONESCU-BISS.

60. *Influența reciprocă a masselor oscilante.*

Influența dintre mai multe masse oscilante se numește *interacțiune.*

1) *Fie două masse* A_1 (m_1) *și* A_2 (m_2) *legate printr'un resort de massă neglijabilă, care suferă o translație la o direcție dată. Să se determine interacțiunea lor.*

Dacă aplicăm massei A_1 o forță $F = m_1 . \Phi . \sin \alpha t$, atunci ecuația diferențială a lui A_1 va fi:

$$1) \qquad U''_1 + \omega_1^2 . (u_1 - u_2) = \Phi . \sin \alpha t$$

u_1 fiind translația lui A_1 și u_2 a lui A_2, u''_1 simbolul derivatei a doua, iar $\omega_1 = \frac{1}{3_1 m_1}$, unde n_1 este supleţea adică raportul dintre deplasarea u_1 și forța F.

In ecuația 1) am neglijat viscozitatea.

Ecuația diferențială a lui A_2 va fi analog:

2) $$u''_2 + \omega_2^2 \cdot (u_2 - u_1) = 0.$$

Scăzând 2) din 1) obținem:

3) $$(u_1 - u_2)'' + (\omega_1^2 + u_2^2)(u_1 - u_2) = \Phi \sin \alpha t$$

care reprezintă ecuația de mișcare a unui oscilator fictiv, sub acțiunea forței F, constituit dintr'o supra sarcină de massă;

$$\frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$$

și legat de un reperfix cu un resort f, a cărui oboseală se determină ușor din ecuația 3) unde se rezolvă $(u_1 - u_2)$.

2) *Fie trei masse, în aceleași condițiuni ca mai sus. Să se determine interacțiunea.*

Ecuația primelor două masse, influențate de massa a treia, se mai poate scrie:

4) $$X'' + \Omega^2 \cdot (X - u_3) = \Phi \cdot \sin \alpha t$$

unde:

$$X = u_1 - u_2 \quad \text{și} \quad \Omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2.$$

Ecuația massei a treia este:

5) $$u''_3 + \omega_3^2 (u_3 - X) = 0.$$

Ori prin scădere din 4), obținem:

6) $$(X - u_3)'' + (\Omega^2 + \omega_3^2)(X - u_3) = \Phi \sin \alpha t$$

care este ecuația unui oscilator fictiv, sub acțiunea unei forțe F, constituit dintr'o supra sarcină de massă:

$$\frac{m_1 \cdot m_2 \cdot m_3}{m_1 \cdot m_2 + m_2 \cdot m_3 + m_3 \cdot m_1}.$$

Procedând analog pentru un număr de masse crescător, obţinem ecuaţiuni analoage pentru oscilatori fictivi, având drept supra sarcină massa:

$$\frac{\prod_{1}^{n} m_i}{\sum_{1}^{n} \prod_{1}^{n-1} m_i}$$

în cazul unui oscilator cu n masse.

MAIOR I. LINTEŞ.

61. *Asupra elicei.*

Vom da o demonstraţie simplă a proprietăţii curburei şi torsiunei de a fi proporţionale cu curbura proecţiei ei, pe planul ce taie sub unghiu constant, tangentele [1]).

Vom folosi următoarea lemă; v fiind un unghiu dat şi v' proecţia lui pe un plan ce face unghiurile θ, β, γ cu planul şi laturile unghiului v, avem relaţia $\sin v : \sin v' = \cos\beta \cos\gamma : \cos\theta$.

Fie o elice (m) înfăşurată pe un cilindru (γ), de secţiune normală pe generatoare (k), conţinută în planul (π) făcând cu tangentele elicei, unghiul constant α; $d\varepsilon$ fiind unghiul de contingenţă în m la (m) şi $d\omega$, proecţia lui pe planul (π), unghiul de contigenţă în μ la (k), formula precedentă în care $\theta = \beta = \gamma = \alpha$ şi unghiurile v, v' sunt infinitezimale, devine: $d\varepsilon = \cos\alpha d\omega$. Pe de altă parte arcele curbelor (m) şi (k), fie ds şi $d\sigma$ sunt proporţionale: $d\sigma = \cos\alpha ds$. Rezultă

$$R = \frac{ds}{d\varepsilon} = \frac{d\sigma}{d\omega} \cdot \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{\rho}{\cos^2\alpha}$$

ρ fiind raza de curbură în μ la curba (k).

De asemenea, binormala la elice fiind conţinută în planul tangent la cilindru în punctul corespunzător m, se proectează pe planul (π), pe urma acestui plan tangent, conţinând şi tangenta în m la elice; deci unghiul $d\tau$ de torsiune se proectează de asemenea după $d\omega$,

1) Metoda este extinderea soluţiei date în cazul elicei circulare (curs de Geometrie Descriptivă, Prof. G. NICHIFOR), dar care, deşi naturală, nu figurează sub această formă în cursul de Geometrie Infinitezimală: Prof. N. ABRAMESCU.

însă în acest caz $\theta = \beta = \gamma = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Aceeaş lemă dă $d\tau = \sin\alpha \, . \, d\omega$

şi deci

$$T = \frac{ds}{d\tau} = \frac{d\sigma}{d\omega} \cdot \frac{1}{\sin\alpha \, . \, \cos\alpha} = \frac{\rho}{\sin\alpha \, . \, \cos\alpha} \quad \text{c. c. t. d.}$$

N. N. MIHĂILEANU.

CHESTIUNI DE EXAMEN

ŞCOALA POLITEHNICĂ «REGELE CAROL II» BUCUREŞTI

Examenul de Admitere în Ciclul I

(15 Septemvrie 1933)

— Toate chestiunile obligatorii. — Timp acordat 4 ore —

ALGEBRĂ

I. Să se studieze variaţia funcţiunei:

$$y = 2 \operatorname{Log} (x^4 - 5x^2 + 4) - x^2 + 2$$

şi să se reprezinte grafic această variaţie.

II. Se consideră ecuaţia:

$$(1) \quad f(\theta) \equiv \cos 6\theta - 2\cos 5\theta - 7\cos 4\theta + 24\cos 3\theta + a\cos 2\theta + b\cos\theta + c = 0$$

şi se ia ca necunoscută $x = \cos\theta$.

Fie $g(x) = 0$ ecuaţia ce se obţine astfel din ecuaţia (1).

Se cere:

1°. Să se determine a, b, c astfel ca ecuaţia $g(x) = 0$ să fie reciprocă.

2°. Să se rezolve această ecuaţie reciprocă şi apoi să se găsească soluţiile ecuaţiei (1) corespunzătoare.

III. Să se determine numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei:

$$f(x) \equiv x^3 - 5x^2 - 2x + 3 = 0$$

şi să se calculeze cea mai mare rădăcină pozitivă cu o eroare $< {}^1/_{100}$.

GEOMETRIE ANALITICĂ

I. Se consideră două axe dreptunghiulare Ox, Oy şi punctele A (0, 2), B (0, λ), λ fiind un parametru variabil. Se cere:

1°. Coordonatele punctului C de pe axa Ox, ştiind că dreapta AC face cu *axa pozitivă* Ox un unghiu de 150°.

2°. Prin punctele A, B, C trece un cerc de centru O'; să se afle coordonatele punctului D, în care acest cerc tae a doua oară axa Ox.

3°. Să se afle locul geometric al centrului cercului O', când parametrul λ variază.

4°. Să se determine λ aşa fel ca cercul O', să fie tangent la axa Ox în punctul C, în care caz să se scrie şi ecuaţia cercului astfel obţinut.

Să se explice geometriceşte, rezultatele dela punctul 3° şi dela punctul 4°.

II. Se consideră, în raport cu axele dreptunghiulare Ox, Oy, triunghiul definit de punctele;

$$A(-a, 0),\ B(a, 0),\ C(0, a\sqrt{3})$$

şi se cere:

1°. Ecuaţia generală a conicelor care trec prin vârfurile triunghiului ABC şi prin punctul H de întâlnire al înălţimilor lui.

2°. Să se studieze natura acestei conice.

3°. Să se afle locul geometric al centrelor conicelor de mai sus (care trec prin punctele A, B, C, şi H); să se arate ce fel de curbă reprezintă, precum şi poziţia pe care ea o ocupă faţă de triunghiul ABC.

Să se explice geometriceşte rezultatele dela punctele 2° şi 3°.

III. Se consideră trei axe dreptunghiulare $Oxyz$ şi punctul A (3, 2, 1); se cere:

1°. Ecuaţia planului P, care trece prin axa Ox şi prin punctul A; ecuaţia planului Q, care trece prin axa Oy şi prin punctul A; unghiul format de planele P şi Q.

2°. Ecuaţia planului R; care trece prin dreapta de intersecţie a planelor P şi Q şi prin punctul B (3, 2, 0); să se explice geometriceşte, rezultatul.

IV. Fie un punct oarecare M (x, y, z); să însemnăm cu N proiecţia sa pe planul, de ecuaţie:

$$3y - 2x = 0$$

şi cu P, proiecţia aceluiaşi punct pe axa Ox; se cere:

1°. Ecuaţia locului geometric al punctului M (x, y, z), care se bucură de proprietatea:

$$\frac{\overline{MN}}{\overline{MP}} = \frac{K}{\sqrt{13}} \quad (k \text{ constant}).$$

2. Să se discute natura locului geometric de mai sus, după diferitele valori ale constantei k.

GEOMETRIE DESCRIPTIVĂ

I. Se dă:

a) O sferă tangentă la planul orizontal de proiecţiune şi cu centrul în punctul O. (100, 62, 30).

b) Un con circular drept cu axa verticală trecând prin centrul sferei, cu vârful V de cotă egală cu dublul diametrului sferei şi cu generatoarele tangente la sferă şi

c) Un cilindru cu generatoarele perpendiculare pe planul vertical de proiecţiune şi racordat cu sfera.

Se cere:

1°. Intersecţia celor trei corpi.

2°. Să se determine natura curbei de intersecţie, între cilindru şi con.

3°. Tangenta într'un punct curent al curbei.

4°. Punctele duble reale ale curbei de intersecţie între cilindru şi con, dacă sunt, şi linia punctelor duble în proiecţiune, dacă este.

Datele în negru; curbele rezultate în albastru; construcţii în roşu.

Pe aceiaşi foaie şi la dreapta se va executa solidul comun în negru.

Linia pământului, paralelă cu marginile mari ale cadrului şi la mijloc.

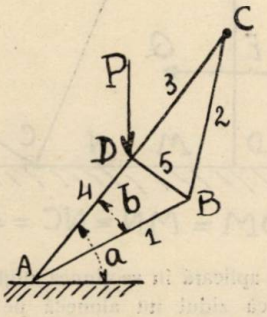
II. Să se determine centrul radical al unui grup de trei cercuri date (demonstraţie).

III. Să se stabilească direct formula care dă volumul unei sfere, demonstrând şi lemele pregătitoare.

IV. Să se demonstreze că două unghiuri sunt egale dacă au laturile paralele şi îndreptate în acelaş sens, *în spaţiu.*

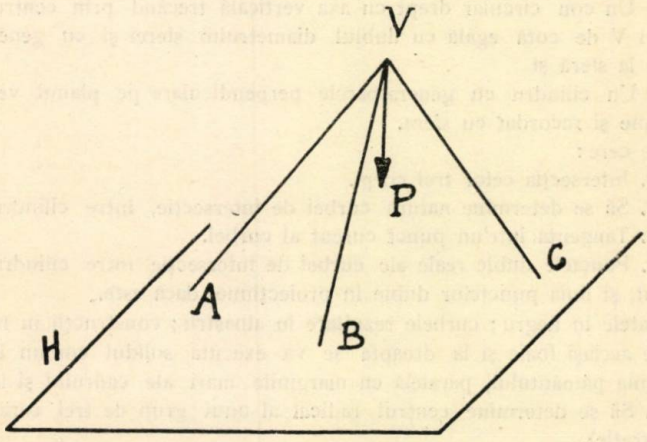
MECANICA

1. Se consideră sistemul articulat ABCDB, format din 5 bare, AB=BC, CD = DA şi BD; în A avem un reazem simplu orizontal, în C articulaţie

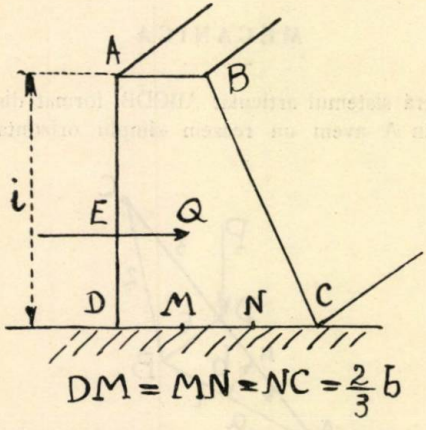


într'un punct fix; direcţia ADC face cu orizontala unghiul *a,* iar unghiul BAD = *b.* In D e aplicată forţa verticală P. Se cer eforturile în bare. Greutăţile barelor se neglijă. Aplicaţie $a = 60°$, $b = 30°$.

2. Un trepied e format din 3 picioare egale, VA, VB, VC, dispuse simetric în raport cu verticala lui V; capetele A, B, C, se reazemă cu frecare pe un plan orizontal H, coeficient de frecare f. In V e aplicată greutatea P. Se cer valorile unghiurilor $AVB = BVC = CVA = a$, ca trepiedul să rămâe în echilibru. Greutăţile proprii ale picioarelor se neglijă. Aplicaţie $f = 0{,}25$.



3. Un zid de 1 m. lungime, are secţiunea verticală, perpendiculară pe direcţia lungimei, în formă de trapez ABCD. $AD = i$ verticală, $DC = 2AB = 2b$ orizontală; zidul e făcut dintrun material omogen de greutate specială d, şi se sprijină pe pământ cu faţa CD. In afară de greutatea lui, zidul e supus la



o împingere orizontală Q, aplicată în secţiunea mijlocie în punctul E, aşa că $AE = 2DE$. Presupunând că zidul nu alunecă pe baza DC, să se găsească condiţia ca rezultanta verticală a reacţiunelor pe faţa DC, să se găsească în treimea mijlocie a acestei feţe. Să se calculeze raportul $b : i$ în cazul când $d = 2$, iar $Q = \frac{1}{2} i^2$.

FIZICA

1°. *Lupa.*

Teorie elementară; Lupa lentilă groasă. Câmp. Putere separatoare.

2°. *Dilatațiunea gazelor.*

Gaze perfecte și reale. Formulele gazelor perfecte. Experiențele lui REGNAULT. Zero absolut. Temperatură normală.

3°. *Barometru.*

Principii. Corecțiuni. Tipuri mai importante. Măsura înălțimilor.

4°. *Fenomene capilare produse de tuburi.*

CHIMIA

1°. Compușii halogenați a elementelor studiate ca metaloizi tetravalenți.
2°. Compușii oxigenați ai plumbului.
3. Despre monoalcooli.

Examenul de Admitere în Anul Preparator

(27 Octombrie 1933)

— Toate chestiunile obligatorii. — Timp acordat 4 ore —

ALGEBRA

I. Să se simplifice expresiunea:

$$E \equiv \frac{1-\frac{1}{x}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2} : \frac{1}{x^2+2x+1}$$

scriind rezultatul sub forma cea mai simplă.

II. Se consideră funcțiunea:

$$y(x) = x^2 - x$$

și se notează cu $y(a)$ rezultatul înlocuirii în funcțiunea $y(x)$, a lui x prin a.

1. Să se verifice identitățile:

$$y\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}\right) + y\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{3}$$

$$y(0) + 3y\left(\frac{1}{3}\right) + 3y\left(\frac{2}{3}\right) + y(1) = -\frac{4}{3}.$$

2. Să se reprezinte grafic, în raport cu două axe dreptunghiulare $0x$, $0y$, funcţiunea $y\,(x)$ când x variază între 0 şi 1.

3. Să se afle abscisele punctelor de intersecţie dintre curba reprezentativă a funcţiei:

$$y\,(x) = x^2 - x$$

şi dreapta: $y = -\frac{1}{6}$.

GEOMETRIE

Se dau două cercuri de raze R şi R', cu centrele în O şi O', tangente exterioare în A.

Se duce tangenta comună BB', care atinge cercul O în B, cercul O' în B' şi taie linia centrelor OO' în I.

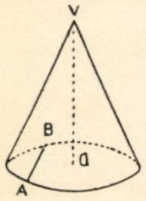
Să se calculeze lungimile $\overline{IO}$, $\overline{IO'}$, $\overline{IB}$, $\overline{IB'}$ şi deci $\overline{BB'}$.

Dacă se notează cu C şi C' punctele diametral opuse lui A în cercurile O şi O', dreptele CB şi C'B' se taie într'un punct D. Să se arate că ABDB' e un dreptunghiu, în care diagonala AD e tangenta în A la cele două cercuri. Să se regăsească pe această cale lungimea $\overline{BB'} = \overline{AD}$, exprimată cu ajutorul razelor R şi R'.

TRIGONOMETRIE

1. Să se determine valorile lui x, coprinse între 0^0 şi 180^0, date de relaţia:

$$\sin^4 x = \frac{1 - \sin 52^0\ 35'\ 30''}{1 + \sin 52^0\ 35'\ 30''}.$$



2. Se dă un con circular drept de înălţime i, raza bazei r, V vârful, O centrul bazei. In cercul de bază se duce coarda $AB = l$; să se calculeze unghiurile AOB, AVB precum şi unghiul planelor AOB cu VAB. Să se aplice în cazul când

$$i = 2l = 3r.$$

3. La poalele unui munte se află un teren plan, de unde se poate vedea vârful muntelui. Să se arate ce măsuri trebuesc făcute, de lungimi şi unghiuri, spre a calcula înălţimea muntelui. Să se indice formulele de întrebuinţat. Ce verificări putem face că nu am greşit?

Chestiune facultativă

4. Fie $A' = A\cos^2 a + B\sin^2 a - C\sin 2a$,

$B' = A\sin^2 a + B\cos^2 a + C\sin 2a$,

$C' = (A - B)\sin a\cos a + C(\cos^2 a - \sin^2 a)$;

Să se arate că dacă $C' = 0$, A' şi B' sunt rădăcinele ecuaţii :

$$X^2 - (A + B)X + (AB - C^2) = 0.$$

ARITMETICĂ

1. Se dă numărul 75600 şi se cere :

a) Să se desfacă într'un produs de doi factori astfel ca primul să se împartă exact cu al doilea. Să se dea toate soluţiile.

b) Să se desfacă într'un produs de trei factori astfel ca primul să se împartă exact cu al doilea, iar al doilea factor să se împartă exact cu al treilea.

c) Se poate merge mai departe cu descompuneri în acest sens ?

Nu se va admite numărul 1 ca factor în nici unul din cele trei cazuri de mai sus.

2. O unitate veche de lungime în Moldova erea stânjenul, care conţinea 8 palme, o palmă 8 palmace şi 1 palmac 12 linii. Un loc de 1250 stânjeni pătraţi, de forma dreptunghiulară, avea dimensiunile în raportul 9 : 32. Care erea lungimea totală a împrejmuirii acelui loc în măsuri moldoveneşti ? Care ar fi valoarea actuală a lui, dacă azi s'ar vinde cu 120000 lei hectarul ? Stânjenul moldovenesc avea 2,23 m lungime.

3. Pe un cont curent al unui fabricant cu un comerciant, client al lui, găsim scris :

La **Debit :** Sold la 1 Ianuarie 3250 lei ; la 20 Ianuarie 4000 lei cu scadenţa 17 Martie ; la 5 Fevruarie 2500 lei cu scadenţa 1 Aprilie ; la 20 Fevruarie 3200 lei cu scadenţa 1 Iunie ; la 5 Martie 5400 lei cu scadenţa 25 Aprilie.

La **Credit :** La 5 Ianuarie 2400 lei cu scadenţa 1 Martie ; la 10 Ianuarie 3000 lei cu scadenţa de 21 Mai ; la 30 Ianuarie 5000 lei cu scadenţa 25 Aprilie ; la 10 Fevruarie 2000 lei cu scadenţa 15 Iunie ; la 25 Fevruarie 1000 lei cu scadenţa 20 Mai ; la 1 Martie 1600 lei cu scadenţa 1 Mai ; la 25 Martie 6050 lei cu scadenţa 5 Iulie.

Dobânzile au fost de 4% în Ianuarie ; de 5% în Fevruarie şi de 6% dela 1 Martie înainte pentru sumele debitoare ; şi respectiv de 3%, 4%, 5%, pentru sumele creditoare.

Se cere să se încheie acest cont pe ziua de 1 Iulie.

COMPOZIŢIE ŞTIINŢIFICĂ

Importanţa atmosferei din punctul de vedere al ştiinţelor fizico-chimice şi naturale.

BIBLIOGRAFIE

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. XL. No. 4. Aprilie 1934. New-York. Funcţiuni de tip exponenţial, de R. D. CARMICHAEL. Notă asupra momentelor unei distribuţiuni BERNOULLI, de A. T. CRAIG. Unele integrale definite dând funcţiuni selfreciproce, de B. M. MEHROTRA. Multiplicatori LAGRANGE pentru funcţiuni de o infinitate de variabile, de L. W. COHEN. O teoremă asupra integralelor FOURIER-STIELTJES, de S. BOCHNER. O observare asupra notei precedente a lui BOCHNER, de I. J. SCHOENBERG. Notă asupra unei mărci în un câmp finit, de M. WARD. Asupra unei probleme a lui KNASTER şi ZARANGIEWICZ, de J. H. ROBERTS. Legea probabilităţii pentru sumă de n variabile independente, fiecare supusă la legea $[1/(2h)]\mathrm{sech}[\pi x/(2h)]$, de W. D. BATEN. Proprietăţi enumerative ale curbelor din spaţiul r, de B. C. WONG. O notă asupra condiţiunii JACOBI pentru probleme parametrice în calculul variaţiunilor, de M. R. HESTENES. Ecuaţiuni algebrice cu diferenţe, de J. F. RITT. O teoremă de existenţă pentru sisteme generalizate PFAFFIANE, de J. M. THOMAS. Condiţiune pentru un sistem PFAFFIAN în involuţiune, de J. M. THOMAS. Condiţiuni necesare şi suficiente pentru reprezentarea unei funcţiuni prin o dublă integrală infinită, LAPLACE, de D. V. WIDDER. Aritmetica şi teoria ideală a înmulţirii abstracte, de A. H. CLIFFORD. O notă asupra algebrei nilpotentă în patru unităţi, de K. S. GENT. Notă asupra ecuaţii integrale a lui CARSON, de J. J. SLADE. Curbe plane simetrice, selfduale, raţionale, de D. C. DUNCAN.

Mathesis. Tomul XLVIII. No. 4—5. Aprilie — Mai 1934. Gembloux. Asupra puterilor perechi, de G. LAMBERT. Exerciţii de geometrie vectorială, de R. GODEAU. Asupra trigonometrii sferice, de A. SAPIN. Diferenţiarea unei funcţiuni $F(x, y, z)$ pe o suprafaţă $S = f(x, y, z) = 0$, de AD. M. Asupra fascicolelor conjugate, de J. DIEUDONNÉ. Privitor la uvragiul lui LOUIS de LAUNAY, de J. PELSENEER. Exerciţii asupra coordonatelor ternare, de AD. M. Asupra geometrii triunghiului, de J. LEEMANS. Asupra hiperbolismelor, de R. GOORMAGHTIGH. Mişcarea irotaţională a unui licuid în o parte a spaţiului limitată de un cilindru eliptic animat de o mişcare de translaţie perpendiculară pe axa sa, de L. DUFOUR.

Boletin Matematico Elemental. Anul V. No. 2. Aprilie 1934, Buenos Aires. Prepararea şi prezentarea unei soluţiuni la o problemă de geometrie, de B. I. BAIDAFF.

Idem. No. 3. Mai 1934. Termeni întrebuinţaţi la cercuri, de B. I. B.

Boletin Matematico. *Suplemento informativo.* Anul II. No. 4. Aprilie 1934. Buenos Aires. Cărţi de şcoală moderne, de B. I. BAIDAFF.

Idem. Anul II. No. 5. Mai 1934. Buenos Aires. O mare victorie. Viitorul, de B. I. BAIDAFF.

Boletin Matematico. Anul VII. No. 2. Aprilie 1934. Buenos Aires. Compliment asupra numerelor raţionale generalizate, de M. Q. GONZALEZ.

Boletin del Seminario Matematico. Vol. III. No. 14. Decemvrie 1933. Buenos Aires. Schema unei teorii geometrice a singularităţilor funcţiunilor analitice, de J. REY PASTOR. Asupra seriilor de puteri ale căror coeficienţi sunt polinoame, de J. BABINI. Observaţiuni asupra seriilor de puteri ai căror coeficienţi sunt funcţiuni algebrice întregi, de J. REY PASTOR. Asupra sumării progresiunilor, de E. SAMATAN. Asupra unor dezvoltări în serii, de J. REY PASTOR. Notă asupra zerorilor seriilor de puteri ale căror coeficienţi sunt polinoame, de J. BABINI.

Ştiinţă şi Progres. Anul I. No. 3. Iunie 1934. Târgul Mureş. Congresul Asociaţiunii române pentru înaintarea ştiinţelor. Asupra unor formule fundamentale din trigonometria plană, de D. V. IONESCU.

Idem. No. 4. Iulie 1934. Determinarea unei clase speciale de funcţiuni de G. CĂLUGĂREANU. Asupra cuburilor perfecte, de I. V. MĂTIEŞ. Balonul pilot, de Cpt. M. BĂNULESCU.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XIV. No. 4. Iunie 1934. Timişoara. Sur des cercles associés au triangle, par V. THÉBAULT. Asupra dreptelor isogonale, simediane şi punctul lui LEMOINE, de N. ABRAMESCU.

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Tomul CXVII. Fascicola II. Februarie 1934. Buenos Aires.

Universidad Nacional de la Plata. Anuario para el ano 1933. La Plata 1933.

Journal des Mathematiques Elementaires. publié par H. VUIBERT. Anul 58. No. 17. Iunie 1934. Paris.

Idem. No. 18. Iunie 1934.

V. THÉBAULT. *Triangle bordé de carrés.* (Extras din *Annales de la Société scientifique de Bruxelles.* Supliment la *Mathesis.* Bruxelles 1933.

LUCIEN GODEAUX. *L'Ecole de Géométrie de l'Université de Liège.* (Extras din *Bulletin de l'Académie royale de Belgique.* Supliment la *Mathesis*). Bruxelles 1934.

MAIOR LINTEŞ. *Noutăţi în construcţia gurilor de foc.* Timişoara 1934.

COMANDANT I. LINTEŞ. *Le calcul de la vitesse minima dans la «Balistique interieure.* (Extras din *Bulletin scientifique de l'Ecole polytechnique de* Timişoara). Timişoara 1934.

GH. EM. FILIPESCU. *Statica şi Rezistenţa.* Bucureşti, Imprimeria Naţională. 1934. (Ediţie provizorie cu primele 560 pagini).

CERERI

239. In *«Manualul Construcţiunei şi Intreţinerei Drumurilor»* publicat la 1869 în Bucureşti, de Inginerul SPIRIDON IORCEANU, găsim următoarele rânduri :

«In toate aceste cazuri suprafecele de săpătură şi de umplutură a profilelor transversale, se pot calcula cu mare repejiune prin aplicarea Tablelor, publicate de Ministerul Agriculturei şi Lucrărilor Publice, redactate pentru drumuri de 10 metri lărgime în platformă şi putându-se aplica la toate profilele ce nu au pe acs o cotă mai mare de cât 3,00 metri şi înclinări transversale ale terenului mai mare de 0^m, 25 pe metru».

Unde s'ar putea găsi exemplare din asemenea tabele ?

I. I.

DIVERSE

Societatea Română de Ştiinţe, secţiunea matematică a ţinut şedinţă în seara zilei de 28 Mai când s'a făcut o comunicare asupra ecuaţiilor funcţionale de ordin infinit de D-l M. GHERMĂNESCU.

In seara de 4 Iunie 1934 s'a ţinut o nouă şedinţă, la care D-l M. NICULESCU a făcut o comunicare asupra unei propietăţi caracteristice a funcţiunilor armonice de ordinul p, iar D-l N. CIORĂNESCU asupra ecuaţii lui FREDHOLM de speţa doua cu parametru neliniar.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2609. *Se dă seria*

$$1 - \frac{x}{T_1} + \frac{x^2}{T_1 T_2} - \frac{x^3}{T_1 T_2 T_3} \cdots$$

în care T_i *este al* i*-lea număr triunghiular. Pentru ce valoare a lui* x *suma seriei este nulă ?*

I. IONESCU.

Conform enunțului problemei, T_i fiind numărul triunghiular de rangul i vom avea:

$$T_i = \frac{i(i+1)}{2},$$

iar seria dată se va scrie

$$y = 1 - \frac{2x}{2} + \frac{2^2 . x^2}{2^2 . 3} - \frac{2^3 . x^3}{2^2 . 3^2 . 4} + \ldots + (-1)^n \frac{2^n x^n}{2^2 . 3^2 . 4^2 \ldots n^2 (n+1)} \cdots$$

Dacă fac schimbarea de variabilă $2x = -z$, obțin seria:

$$y = 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2 . 3} + \frac{z^3}{2^2 . 3^2 . 4} + \ldots + \frac{z^n}{2^2 . 3^2 . 4^2 \ldots n^2 (n+1)} \cdots$$

care este convergentă pentru oricare ar fi z. Multiplicând-o prin z și derivând de două ori în raport cu această variabilă, obținem cu ușurință ecuațiunea diferențială lineară de ordinul doi, la care satisface seria considerată:

$$zy'' + 2y' - y = 0.$$

Această ecuațiune este de tipul clasic al lui LAPLACE și deci integrabilă prin cuadraturi după metoda bine cunoscută de a se căuta o funcțiune $V(u)$ astfel că luând:

$$y = \int_{\alpha}^{\beta} V(u)\, e^{zu}\, du,$$

ecuațiunea diferențială lineară să fie satisfăcută.

Preferăm însă metodei acesteia clasice, pe aceia rezultată din observarea că $(z+2)$ este o integrală particulară a acestei ecuațiuni diferențiale. Deci, aplicăm formula clasică:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_1 \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{y_1^2} e^{-\int_{x_1}^{x} p\,dx},$$

care dă integrala generală a ecuațiunei diferențiale lineare de ordinul doi:

$$y'' + py' + qy = 0,$$

atunci când se cunoaşte integrala ei particulară y_1. Conchidem, având în vedere că am pus $2x = -z$, că determinarea constantelor C_1 şi C_2 din funcţiunea

$$y = \left[2C_1 - C_2 \int_{x_0}^{x} \frac{e^{4x}}{(1-x)^2}\, dx\right](1-x),$$

îmi dă suma serii date şi că un zero al acestei serii este evident $x = 1$ oricare ar fi constantele C_1 şi C_2. Astfel problema este rezolvată.

G. G. CONSTANTINESCU.

PROBLEMA 3223. *Să se construiască un pseudopatrat (patrulater cu diagonalele egale şi perpendiculare), cunoscându-se:*

a) *O latură, o diagonală şi unghiul acestei laturi cu latura opusă.*

b) *Două laturi opuse şi unghiul celorlalte două.*

I. IONESCU.

Primul punct al acestei probleme este cunoscut, el făcând obiectul problemei 219 propusă tot de D-l Prof. I. IONESCU în *Gazeta Matematică*, Vol. II, pag. 196 şi rezolvată prin patru metode diferite în *Gazeta Matematică*, Vol. III, pag. 164.

Redăm aci soluţiunea a doua a D-lui G. G. DOBROVICI pentru motivul că ea permite imediat rezolvarea celui de al doilea punct al problemei.

a) Din extremităţile laturei cunoscute AB ale pseudopatratului coborîm perpendicularele AM, BN pe latura CD. Triunghiurile AMC, BND sunt egale ca având ipotenuzele AC, BD egale şi unghiurile din C şi B egale ca fiind ascuţite şi având laturile perpendiculare. Deci CM = BN. Luăm R pe BN aşa ca BR = MN. Atunci NR = NC şi prin urmare dreapta RC este înclinată de 45^0 pe BR. De aci deducem următoarea construcţie: In un punct I' al prelungirei dreptei date AB facem unghiul C'I'A egal cu unghiul dat. Din A şi B coborîm perpendicularele AM', BN' pe C'I'. Luăm BR = M'N', care este egal cu MN şi ducem dreapta RC' înclinată de 45^0 pe BN'. Punctul C va fi pe această dreaptă şi-l vom determina descriind

din A ca centru cu o rază egală cu diagonala dată un arc de cerc până întâlneşte dreapta. Pentru a determina punctul D ducem BD perpendicular pe AC şi egală cu AC. Pseudopatratul este astfel găsit, căci îi cunoaştem vârfurile.

b) Rezolvarea celui de al doilea punct este imediată acum, căci pe AM avem un punct R' ce se construeşte tot ca R şi care se bucură de aceeaşi proprietate, adică dreapta R'D este înclinată de 45^0 pe AR'. Deci, construind punctele R şi R' în modul arătat în soluţiunea primului punct al problemei, vom avea de dus în triunghiul dreptunghic isoscel C'OD' format de C'D' cu R'D' şi RC' un segment dat CD paralel cu ipotenuza C'D' ceeace se poate face uşor luând pe această ipotenuză două puncte C'', D'' egal depărtate de mijlocul S al ipotenuzei şi astfel ca C''D'' să fie egal cu CD. Din aceste puncte, ridicând perpendiculare pe ipotenuză, obţinem ca intersecţie a lor cu laturile unghiului punctele căutate C şi D şi astfel avem construit pseudopatratul cerut fiindcă îi cunoaştem vârfurile.

G. G. CONSTANTINESCU.

PROBLEMA 3250. *Se dau expresiunile*

$$n_1 = px + qy + xy \quad , \quad n_2 = qx + py + xy$$

p, q *fiind constante reale.*

Cum trebue să fie x, y, *reali pentru a avea*

$$N_1^2 + N_2^2 - 2\alpha N_1 N_2 = 0, \tag{1}$$

unde

$$N_1 = \alpha n_1 + n_2$$
$$N_2 = n_1 + \alpha n_2,$$

iar α *un parametru real. Considerând* x, y *ca fiind coordonatele unui punct în plan, să se dea o reprezentare grafică a soluţiei.*

I. ST. TEODORESCU.

Inlocuind în (1) pe N_1 , N_2 în funcţie de x, y se găseşte

$$(1 - \alpha^2)[(px + qy + xy)^2 + (qx + py + xy)^2 + 2\alpha (px + qy + xy)(qx + py + xy)] = 0.$$

Presupunând $\alpha \neq \pm 1$, ecuația precedentă, omogenă în hiperbolele

$$px + qy + xy = 0 \quad \text{şi} \quad qx + py + xy = 0$$

dă

$$(2) \qquad \frac{px + qy + xy}{qx + py + xy} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1}.$$

Condițiile de realitate a membrului întâi al lui (2) sunt

$$(3) \qquad \alpha \leqslant -1 \quad \text{şi} \quad 1 \leqslant \alpha.$$

Deci dacă α satisface pe (3) atunci relația (1) din enunț are loc când va exista (2), oricare ar fi x şi y reali.

Dacă x, y reprezintă coordonatele unui punct din plan, atunci condiția (1) reprezintă nişte hiperbole ale căror ecuații sub forma întreagă, sunt:

$$(1 + \alpha \mp A)\,xy + (p + \alpha q \mp A)\,x + (q + \alpha p \mp A)\,y = 0$$

în care

$$A = \sqrt{\alpha^2 - 1}.$$

Când α are valorile limită ± 1, condiția (1) din enunț devine o identitate.

Se observă uşor că dacă $\alpha \neq \pm 1$ şi dacă unul din numerele n_1 , n_2 e nul atunci şi celalt este nul.

Notă. D-l Lt. M. I. FOCŞENEANU, a trimis această soluție pe când era elev în anul II al Şc. de Artilerie, Timişoara.

PROBLEMA 3461. *Să se rezolve un triunghiu în care*

$$R + r = 7 \quad \text{şi} \quad a^3 r_a^3 + b^3 r_b^3 + c^3 r_c^3 = 1852416$$

ştiind că numerele ce măsoară pe R, a, b *şi* c *sunt întregi.*

RÉNÉ I. SPATHY.

Soluție. Se ştie că în orice triunghiu raza cercului înscris nu poate fi mai mare ca jumătatea razei cercului circumscris, deci pe lângă prima relație din enunț, mai avem $2r \leqslant R$, ceeace ne conduce la următoarele două supoziții

$$\text{I} \begin{cases} R = 6 \\ r = 1 \end{cases} \quad \text{şi} \quad \text{II} \begin{cases} R = 5 \\ r = 2. \end{cases}$$

In cazul I, ţinând seamă că

$$a^2 = (r_a - r)(r_b + r_c) \quad \text{şi} \quad r_a + r_b + r_c = 4R + r = 25$$

deducem $a^2 = (r_a - 1)(25 - r_a)$, care pentru valori întregi ale lui a ne dă $r_a = 13$ şi $a = 12$.

Deasemenea din $pr = r_a (p - a)$ se deduce $p = 13$, prin urmare $b + c = 14$ şi din $12 . b . c = 4R . pr = 4 . 6 . 13 . 1$ se deduce $bc = 26$.

Cum ecuaţia $Z^2 - 14Z + 26 = 0$, care dă valorile lui b şi c, nu are rădăcini întregi, nu putem avea soluţii în acest caz.

In cazul II, aceleaşi relaţii ca la cazul I, ne conduc la $a = 10$ şi $r_a = 12$, şi din $pr = r_a (p - a)$ aflăm $p = 12$. Prin urmare $b + c = 14$ şi $10\,bc = 480$.

De unde $b = 6$ şi $c = 8$, iar din $pr = r_b (p - b) = r_c (p - c)$ se deduce $r_b = 4$ şi $r_c = 6$.

Relaţia a 2-a din enunţ *se verifică*

$$\Sigma\, a^3 r_a^3 = 10^3 . 12^3 + 6^3 . 4^3 + 8^3 . 6^3 = 1852416.$$

Notă. 1. Soluţia de mai sus a fost redijată după aceea a D-lui GH. GH. VASILIU, student *Leoben-Austria,* actualmente inginer şi membru al *Gazetei Matematice.*

Se deduce din soluţia de mai sus, că enunţul problemei este supra-abondent, fiind suficient a se da numai relaţia $R + r = 7$ şi a se spune că numerele R, a, b şi c sunt întregi. Singurul corespondent care a observat şi arătat aceasta, a fost D-l U. M. FLORESCU (Craiova), care în soluţia ce ne-a trimis a rezolvit triunghiul cu ajutorul formulelor

$$(p - a) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} = r \;\; ; \;\; \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} = \frac{1 - \cos A}{\sin A} .$$

2. D-l GH. T. GHEORGHIU, (elev Lic. Galaţi , astăzi, profesor şi membru al Societăţei *Gazeta Matematică,* a trimis o soluţie în care trasformă expresiunea $\Sigma\, a^3 r_a^3$ în $8p^3 (2R - r)^3$, conchizând că triunghiul aflat este dreptunghic ($10^2 = 8^2 + 6^2$).

3. Alte soluţii s'au primit de la D-nii : ILIE VASILIEV (Tulcea) şi GH. G. CONSTANTINESCU (Craiova).

4. AUTORUL problemei a dat şi valorile unghiurilor ascuţite ale triunghiului dreptunghic, ce corespunde ca soluţiune, şi anume :

$$\hat{C} = 53^\circ 7' 48'',46 \;\; ; \;\; \hat{B} = 36^\circ 52' 11'',54.$$

COL. GH. I. LITEANU.

PROBLEMA 3739. *Să se demonstreze că într'un triunghiu dreptunghiu*[1] *există relaţia*

$$\sum \frac{a^2-b^2}{S} \cdot \frac{\sec 2B + \operatorname{tg} 2B}{\operatorname{cotg} B - \operatorname{cotg} A} = 2 \cdot \frac{24SR - \Sigma ab^2}{(b-a)(c-b)(a-c)} .$$

ION SAVIN.

Soluţie dată de D-nii: VL. CRIVĂŢ, CR. I. RÂMNICEANU şi N. N. VELICESCU.

Ţinând seamă de relaţiile

$$\frac{a^2-b^2}{\operatorname{cotg} B - \operatorname{cotg} A} = 2S \text{ , etc...}$$

(F. G. M. Trigonométrie, pages 267 et 261).

$$\sec 2B + \operatorname{tg} 2B = \frac{c+b}{c-b} \text{ , etc...}$$

$$24SR = 6abc$$

expresiunea dată devine

$$2 \sum \frac{c+b}{c-b} = 2 \frac{6abc - \Sigma ab^2}{(b-a)(c-b)(a-c)} .$$

Simplificând şi desvoltând calculele în partea întâia, se obţine

$$\sum \frac{c+b}{c-b} = \frac{(c+b)(b-a)(a-c)+(a+c)(b-a)(c-b)+(b+a)(c-b)(a-c)}{(b-a)(c-b)(a-c)}$$

$$= \frac{6abc-(a^2b+b^2c+c^2a+a^2c+b^2a+c^2b)}{(b-a)(c-b)(a-c)} = \frac{6abc - \Sigma ab^2}{(b-a)(c-b)(a-c)} .$$

Deci relaţia din enunţ e demonstrată.

PROBLEMA 3785. *Să se construiască triunghiul care are aceiaşi suprafaţă cu a triunghiului său ortic.*

CĂPITAN GH. NICULESCU.

---

1) Enunţ rectificat.

Soluţie dată de D-l MARIUS MARGULIUS (Lic. Spiru Haret, Bucureşti).

Insemnând cu a, b, c, R şi S elementele cunoscute din triunghiu şi cu a', b', c', R' şi S' aceleaşi elemente corespunzătoare triunghiului său ortic, scriem relaţiunile cunoscute:

$$a = a\cos A \ ; \ b' = b\cos B \ ; \ c' = c\cos C \ ; \ 2R' = R.$$

Egalând, cum cere enunţul, suprafeţele S şi S', obţinem:

$$\frac{abc}{4R} = \frac{a'b'c'}{4R'}$$

sau făcând înlocuirile şi reducerile posibile avem:

$$\cos A \cos B \cos C = \frac{1}{2} \cdot \qquad (1)$$

Dar în *Culegere de Probleme,* la pag. 394, găsim:

$$\cos A \cos B \cos C = \frac{\Sigma \sin^2 A - 2}{2} \cdot \qquad (2)$$

Comparând (1) cu (2) ajungem la condiţia:

$$\Sigma \sin^2 A = 3$$

ceeace înseamnă că egalitatea de mai sus nu poate fi satisfăcută decât pentru:

$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \frac{\pi}{2} \quad \text{sau} \quad \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \frac{3\pi}{2}$$

egalitate care nu poate avea loc într'un triunghiu. *Deci concluzia este că nu există triunghiuri, care să aibă aceeaşi suprafaţă cu triunghiurile lor ortice.*

Notă. Dacă această concluzie este adevărată pentru un triunghiu cu toate unghiurile ascuţite, ea poate să nu mai fie adevărată pentru cazul triunghiurilor având un unghiu opus. Este suficient să se deseneze un triunghiu cu două unghiuri ascuţite şi mici, ca să se vadă imediat că suprafaţa triunghiului ortic este chiar mai mare ca aceia a triunghiului considerat.

Cum n'am primit decât o soluţiune a acestei probleme, şi aceasta parţială, problema rămâne deschisă şi aşteptăm soluţiuni în cazul unui unghiu obtus.

D-l C. N. POPESCU, dela care s'a mai primit o soluţiune, a interpretat greşit enunţul.

LT. C-DOR. GH. N.

PROBLEMA 3826. *Dacă* O, H, ω, A′, A″ *sunt într'un triunghiu* ABC *respectiv: centrul cercului circumscris, ortocentrul, centrul cercului celor 9 puncte, mijlocul laturi* BC *piciorul înălţimei* AH *să se construiască triunghiul* ABC *cunoscând:*

I punctele O, H *şi* A′.

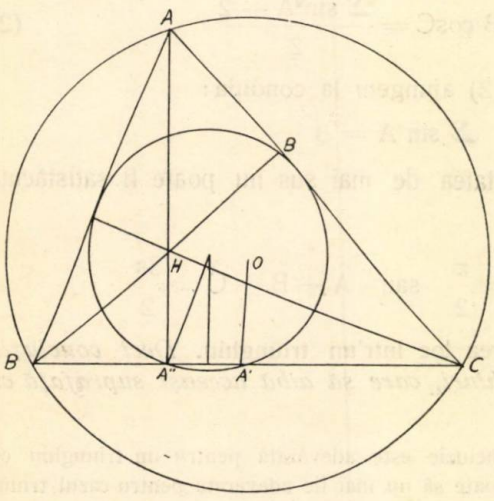
II » A″ H *şi* ω.

VLADIMIR CRIVĂŢ.

Soluţie dată de D-l I. C. PAREPEANU.

I. Considerăm punctele O, H şi A′ date.

Unim O cu H. Din $\frac{OH}{2}$ ducem o dreaptă până în A′. La $\frac{OH}{2}$ avem punctul ω centrul cercului celor 9 puncte. Ducem din H şi O câte o paralelă la ω A′. Ducem prin A′ o perpendiculară pe ω A′.



Această perpendiculară tae paralela dusă din H în A″. Unim A″ cu ω şi cu o rază cât ω A″ şi având ω ca centru ducem un cerc. Acesta este cercul lui EULER. Prelungim A″H′ până unde tae cercul acesta. Fie E′ punctul de intersecţie. Acesta e punctul lui EULER relativ la înălţimea AA″. Prelungim AE′ cu HE′ şi obţinem vârful A. Unim acum O′ cu A şi din O ca centru cu o rază cât OA ducem un cerc care tae dreapta perpendiculară pe AA″ în BC. Unim B şi C cu H şi obţinem triunghiul căutat.

II. Considerăm punctele A″ H şi ω.

Unim Hω şi o prelungim cu încă pe-atâta. Punctul obţinut va fi O centrul cercului circumscris. Unim ω cu A″ ci din ω ca centru cu rază cât ω A″ ducem un cerc. Unim acum A″ cu H şi-l prelungim

până tae cercul cu centrul cu ω. Punctul de intersecție este E' punctul lui EULER relativ la vârful A. Prelungim A'' E' cu HE' și obținem vârful A. Din O ca centru și cu OA ca rază ducem un cerc. Acest cerc tae perpendiculara AA'' în B și C. Unim B și C cu A și obținem triunghiul ABC căutat.

PROBLEMA 3935. *Să se dovedească pentru un triunghiu relația*

$$\frac{3}{8S} = \frac{a \cdot a_1}{b^2c^2} + \frac{b \cdot b_1}{c^2a^2} + \frac{c \cdot c_1}{a^2b^2}$$

S *fiind suprafața triunghiului,* a, b, c *laturile, iar* a_1, b_1, c_1 *distanțele dela centrul cercului celor nouă puncte la laturi.*

CORNELIU N. POPESCU.

Soluție dată de Domnii: M. MARGULIUS, N. N. ALDEA, H. P. IONESCU-BISS.

Să stabilim relația din enunț. Considerăm identitatea

(1) $$3 \sin A \sin B \sin C = \Sigma \sin^3 A \cos (B - C).$$

(CARLO BOURLET. Trigonométrie pag. 80).

(H. VUIBERT. Relations entre les éléments d'un triangle pag. 26).

Dacă înmulțim cu R^3 în ambele părți și ținem seama că $a = 2R \sin A$, etc. . . . , putem scrie succesiv:

$$\frac{3abc}{8} = \frac{a^3\cos(B-C) + b^3\cos(A-C) + c^3\cos(A-B)}{8}$$

$$\frac{3}{8abc} = \frac{a^3\cos(B-C) + b^3\cos(A-C) + c^3\cos(A-B)}{8a^2b^2c^2}.$$

Dar $abc = 4RS$, deci

$$\frac{3}{8S} = \frac{R}{2} \sum \frac{a}{b^2c^2} \cos (B - C).$$

Se știe însă, că distanța a_1 de la centrul cercului lui EULER la latura a, este:

(2) $$a_1 = \frac{R}{2} \cos (B - C), \text{ etc. . . .}$$

(G. M. XXXVII, pag. 105).

Prin urmare putem scrie:

$$\frac{3}{8S} = \frac{a \cdot a_1}{b^2c^2} + \frac{b \cdot b_1}{a^2c^2} + \frac{c \cdot c_1}{a^2b^2}$$

adică tocmai relaţia din enunţ.

D-l N. N. MIHĂILEANU stabileşte relaţia din enunţ, servindu-se de relaţia

$$\Sigma\, a^2 (\sin 2B + \sin 2C) = 12S.$$

(G. M. XXXI, pag. 316).

Notă. 1. Au rezolvat problema demonstrând că relaţia din enunţ este adevărată, Domnii: V. CRIVĂŢ, N. DONCIU, M. L. A. NEGREA, ŞT. OLTEANU, I. C. PAREPEANU, M. I. POPESCU-STĂNEŞTI, N. N. VELICESCU, SUB.-LT. I. GH. ZAMFIRESCU, GOSPODIN TUDOR & I. ZARDA, utilizând relaţiile

$$a_1 = \frac{R}{2}(\cos A + 2\cos B \cos C) = \frac{R}{2}\cos(B - C)\ ;\ b_1 = \ldots \text{ etc.}$$

2. Demonstrarea relaţiilor (1) şi (2) din soluţia de mai sus, a fost dată de unii corespondenţi, plecând pentru prima relaţie de la

$$3 \sin A \sin B \sin C = \Sigma \sin A \sin B \sin(A + B)$$

pe care aranjând-o convenabil şi transformând-o succesiv se obţine

$$3\sin A \sin B \sin C = \Sigma \sin^2 A (\sin B \cos B + \sin C \cos C) = \frac{1}{2}\Sigma \sin^2 A (\sin 2B + \sin 2C)$$

$$= \Sigma \sin^2 A \sin(B+C)\cos(B-C) = \Sigma \sin^3 A \cos(B-C),$$

iar pentru relaţia (2), observând că a_1 este egală cu semi-suma distanţelor de la ortocentrul triunghiului la latura a, şi de la centrul cercului circumscris la aceeaşi latură.

COLONEL LITEANU.

PROBLEMA 3973. *Care sunt puterile a 6-sea, mai mici ca 10000, pe care scriindu-le în alte sisteme de numeraţie şi privindu-le atunci ca scrise în sistemul zecimal, par a fi patrate sau cuburi.*

M. A. FAŢE.

Excluzând pe 1^0 care se scrie 1 în orice sistem de numeraţie, puterile a 6-sea mai mici ca 10000 sunt:

(1) $\quad 2^6 = 64\ ;\ 3^6 = 729\ ;\ 4^6 = 4096\ .$

Fie x baza unui sistem de numeraţie ale cărui cifre a_i sunt $0, 1, 2, \ldots, (x+1)$ şi N unul din numerele şirului (1). Ecuaţia problemei este

(2) $\quad a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots + a_i x^{i-1} = N$

unde cifrele $a_1, a_2 \ldots a_i$ nu sunt neapărat semnificative şi nici diferite. Ele îndeplinesc numai condiţia de a fi întregi şi mai mici ca x. Odată rezolvată ecuaţia (2) în numere întregi, numărul N în sistemul x este

$$M = a_1 a_2 \ldots a_i$$

şi problema revine la a privi pe M ca scris în sistemul zecimal şi a examina dacă este patrat sau cub.

Cu datele din problemă nu se poate rezolva în numere întregi ecuaţiunea (2) cu $i + 1$ necunoscute.

Vom rezolva problema pentru câte un exemplu în următoarele 2 cazuri:

Cazul 1°. *Se dă x şi se caută* $a_1, a_2 \ldots a_i$. Să căutăm de exemplu ce devine 64 în baza 6. Ecuaţia (2) devine

$$(3) \qquad a_1 + 6a_2 + 6^2 a_3 + \ldots + 6^i a_{i+1} = 64$$

unde $a_1, a_2, \ldots$ sunt cel mult egali cu 5. Deoarece $6^3 > 64$ urmează că $a_4, a_5, \ldots$ sunt nuli şi (3) devine

$$(4) \qquad a_1 + 6a_2 + 6^2 a_3 = 64$$

unde $a_3 \neq 0$ căci $6a_2 < 64$ chiar când $a_2 = 5$. Apoi $2 \times 6^2 > 64$ aşa că rezultă $a_3 = 1$ şi (4) devine

$$a_1 + 6a_2 = 28$$

care rezolvată în numere întregi pozitive admite numai soluţia

$$a_1 = a_2 = 4.$$

Deci 64 în baza 6 devine 144, care privit ca fiind scris în baza 10 este patratul lui 12.

Dând lui x în (2) diferite valori întregi începând cu 2 iar lui N valorile şirului (1) se găsesc diferite numere M scrise în baza x, care apoi fiind privite ca scrise în baza 10 sunt examinate, pe căile cunoscute dacă sunt sau nu patrate sau cuburi.

Cea mai mare valoare de dat lui x, este N, căci N în baza N sau baze mai mari ca N reprezintă cifra N.

Problema nu prezintă alt interes de cât acela al rezolvărei cu numere întregi a ecuaţiei de forma (3) în care cea mai mare valoare a unuia din numerele a_i este $x - 1$.

Cazul 2°. *In ce sistem trebue scris 4096 din scrisul (1) pentru a deveni 1331*, care în sistemul zecimal este cubul lui 11.

Ecuaţia problemei este

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 4096$$

$$\therefore \qquad x(x^2 + 3x + 3) = 4095. \qquad (5)$$

Paranteza nu se divide cu 3 decât dacă x se divide cu 3, de asemeni făcând pe x *mult.* 5 plus succesiv 1, 2, 3, 4 se găseşte că ea nu se divide cu 5. Trebue ca x să se împartă exact şi cu 5, deci:

$$x = 15y$$

iar (5) devine

$$y(75y^2 + 15y + 1) = 91 = 7 \times 13$$

y, trebuind să fie unul din divizorii lui 91 nu poate fi decât 1, căci altfel paranteza ar fi mai mare ca 91. Dar atunci

$$x = 15$$

şi (5) devine

$$(x - 15)(x^2 + 18x + 273) = 0.$$

Paranteza mare are rădăcini imaginare, deci 15 este singura bază în care 4096 se poate scrie 1331.

Dacă s'ar fi cerut în enunţ:

a) *Care este sistemul de numeraţie mai mic ca 50, de exemplu, în care scriind puterile a 6-a...*

sau

b) *Care sunt puterile a 6-a mai mici ca... care par a fi cuburi sau patrate mai mici ca...*

problema ar fi comportat rezolvarea în numere întregi a unui număr mai restrâns de ecuaţiuni de forma (3) sau (5).

Puterea a 6-a fixată de enunţ nu prezintă, după cum se vede, nici o particularitate de vreun interes oarecare.

Notă. 1°. D-l N. N. Mihăileanu (Constanţa) a rezolvat cel mai complect problema şi a dat soluţiunile sub forma următoarelor tablouri:

64		Care este în baza 10	
In baza	Se scrie	patratul	cubul
2	1000000	1000^2	100^3
4	1000	—	10^3
6	144	12^2	—
7	121	11^2	—
8	100	10^2	—
24	2 (16)	—	6^3
39	1 (25)	—	5^3
43	1 (21)	11^2	—
58	16	4^2	—

729		Care în baza 10 este	
In baza	Se scrie	patratul	cubul
3	1000000	1000^2	100^3
5	10404	102^2	—
8	1331	—	11^3
9	1000	—	10^3
13	441	21^2	—
24	169	13^2	—
25	144	12^2	—
26	121	11^2	—
27	100	10^2	—
45	(16) 9	13^2	—

4096		Care în baza 10 este	
In baza	Se scrie	patratul	cubul
4	1000000	1000^2	100^3
7	14641	121^2	—
8	10000	100^2	—
15	1331	—	11^3
16	1000	—	10^3
21	961	31^2	—
31	484	22^2	—
32	400	20^2	—
61	169	13^2	—
62	144	12^2	—
63	121	11^2	—
64	100	10^2	—
4090	16	4^2	—

Numerile în paranteză din coloana II sunt cifre în baza respectivă înscrisă în coloana I.

2°. D-l M. MARGULIUS (Lic. Spiru Haret, Bucureşti) a dat 14 din soluţiile tablourilor precedente.

PROBLEMA 4233. *Fie* d_a, d_b, d_c *lungimile mediatoarelor unui triunghiu de laturi* a, b, c. *Să se demonstreze că suma*

$$E = ad_a^2 + bd_b^2 + cd_c^2$$

se divide exact prin valoarea perimetrului acelui triunghiu.

COL. GH. BUICLIU.

Soluţie dată de D-nii: M. L. A. NEGREA (Brăila); E. MEREUŢĂ (Neamţ); I. C. PAREPEANU (Sub.-Locot. din Geniu), C. IVĂNESCU (Student Iaşi) şi P. D. DOBRESCU (Lic. Militar «N. Filipescu»).

Fie R şi r raza cercului circumscris şi înscris triunghiului. Pe o figură se vede că

$$d_a^2 = R^2 - \frac{a^2}{4} \; ; \; d_b^2 = R^2 - \frac{b^2}{4} \; ; \; d_c^2 = R^2 - \frac{c^2}{4} \cdot$$

$$\therefore \; E = (a+b+c)\,R^2 - \frac{1}{4}(a^3+b^3+c^3) \cdot$$

Dar s'a demonstrat în *Gazeta Matematică,* Vol. XXXVIII, pag. 250 că

$$a^3 + b^3 + c^3 = 2p\,(p^2 - 3r^2 - 6Rr).$$

Inlocuind în E, avem

$$E = 2p\left[R^2 - \frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{4}\right]$$

ceeace demonstrează că E se divide prin $2p$.

Notă. Au rezolvat problema utilizând formule de trigonometrie, D-nii: I. N. SAGER, I. CURCHI şi D. D. MAVRODIN.

PROBLEMA 4267. *Să se rezolve sistemul:*

$$x^9 + y^9 = 513$$
$$x^6 y^3 + x^3 y^6 = 72.$$

M. CHIRIŢĂ.

Soluţie. Sistemul dat se transformă cu uşurinţă în sistemul echivalent:

$$x^9 + y^9 = 513$$
$$(x^3 + y^3)^3 = 729 = 9^3.$$

Insemnând cu 1, α şi α^2 rădăcinile cubice ale unităţii, unde α are valoarea cunoscută:

$$\alpha = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

sistemul echivalent se descompune în următoarele trei sisteme:

$$\text{I} \begin{cases} x^9 + y^9 = 513 \\ x^3 + y^3 = 9 \end{cases} \quad \text{II} \begin{cases} x^9 + y^9 = 513 \\ x^3 + y^3 = 9\alpha \end{cases} \quad \text{III} \begin{cases} x^9 + y^9 = 513 \\ x^3 + y^3 = 9\alpha^2 \end{cases}$$

pe cari le mai putem scrie:

$$\text{I}' \begin{cases} x^6 - x^3y^3 + y^6 = 57 \\ x^3 + y^3 = 9 \end{cases} \quad \text{II}' \begin{cases} \alpha\,(x^6 - x^3y^3 + y^6) = 57 \\ x^3 + y^3 = 9\alpha \end{cases}$$

$$\text{III}' \begin{cases} \alpha^2\,(x^6 - x^3y^3 + y^6) = 57 \\ x^3 + y^3 = 9\alpha^2 \end{cases}$$

căci: $(x^9 + y^9)$ are ca factor pe $(x^3 + y^3)$.

Eliminăm acum în I', II' şi III' variabila y, efectuăm toate reducerile posibile, ţinând seamă că $\alpha^3 = 1$, după care obţinem trei ecuaţii corespunzătoare:

(1) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$ $\qquad z_1^2 - 9z_1 + 8 = 0$

(2) $x^6 - 9\alpha x^3 + 8\alpha^2 = 0$ sau $z_2^2 - 9\alpha z_2 + 8\alpha^2 = 0$

(3) $x^6 - 9\alpha^2 z^3 + 8\alpha = 0$ $\qquad z_3^2 - 9\alpha^2 z_3 + 8\alpha = 0.$

Rădăcinile ecuaţiilor în **z** sunt:

$$z'_1 = 1\ ,\ z''_1 = 8\ ;\ z'_2 = \alpha\ ;\ z''_2 = 8\alpha\ ;\ z'_3 = \alpha^2\ ,\ z''_3 = 8\alpha^2.$$

Vom găsi rădăcinile ecuaţiilor în x utilizând substituţiile cari ne-au dat ecuaţiile în z şi anume:

$$x^3 = z_1\ ;\ x^3 = z_2\ ;\ x^3 = z_3$$

iar valorile lui **y** cu ajutorul ecuaţiilor:

(1') $y = \sqrt[3]{9 - x^3}$; (2') $y = \sqrt[3]{9\alpha - x^3}$; (3') $y = \sqrt[3]{9\alpha^2 - x^3}$

ştiind că fiecare din aceste forme ne dau şi rădăcinile cubice.

Sistemele (1, 1'), (2, 2') şi (3, 3') ne dau fiecare câte 6 perechi de rădăcini dar din cauza simetriei ne vom opri imediat ce am găsit la fiecare din sisteme primele trei perechi de rădăcini.

Rădăcinile sistemului (1, 1') sunt:

$$x_1 = 1 \quad x_2 = \alpha \quad x_3 = \alpha^3 \quad x_4 = 2 \quad x_5 = 2\alpha \quad \ldots$$

$$y_1 = 2 \quad y_2 = 2\alpha \quad y_3 = 2\alpha^2 \quad y_4 = 1 \quad y_5 = \alpha.$$

Ale sistemului (2, 2') sunt:

$$x_7 = \sqrt[3]{\alpha} \quad x_8 = \alpha\sqrt[3]{\alpha} \quad x_9 = \alpha^2\sqrt[3]{\alpha} \quad x_{10} = 2\sqrt[3]{\alpha} \quad \ldots$$

$$y_7 = 2\sqrt[3]{\alpha} \quad y_8 = 2\alpha\sqrt[3]{\alpha} \quad y_9 = 2\alpha^2\sqrt[3]{\alpha} \quad y_{10} = \sqrt[3]{\alpha}$$

In fine ale sistemului (3, 3') sunt:

$$x_{13} = \sqrt[3]{\alpha^2} \quad x_{14} = \alpha\sqrt[3]{\alpha^2} \quad x_{15} = \alpha^2\sqrt[3]{\alpha^2} \quad \ldots$$

$$y_{13} = 2\sqrt[3]{\alpha^2} \quad y_{14} = 2\alpha\sqrt[3]{\alpha^2} \quad y_{15} = 2\alpha^2\sqrt[3]{\alpha^2}$$

In rezumat am obţinut 9 perechi soluţiuni distincte, cari pentru motivul simetriei ne dau 18 perechi soluţiuni verificând sistemul propus. Cum se împacă acest rezultat cu teoria? Căci după teorema lui BÉZOUT sistemul nostru este compus din două curbe de gradul 9 fiecare, corespunzătoare celor două ecuaţiuni; aceste curbe trebuiesc să se intersecteze în $9 \times 9 = 81$ puncte, cari sunt soluţiuni ale sistemului. Am găsit 18, ce s'au făcut restul: $81 - 18 = 63$? Cele 18 soluţiuni găsite se grupează trei câte trei, din cauză că puterea cea mai mică a necunoscutelor în sistemul dat este puterea 3-a şi oricare din rădăcinile lui x (de exemplu gruparea: $1, \alpha, \alpha^2$) ridicate la puterea 3-a dau pentru y aceeaşi valoare. Putem deci număra $18 \times 3 = 54$ soluţiuni găsite. Restul de $3 \times 9 = 27$ sunt pierdute prin faptul reducerii sistemelor I, II şi III la I', II' şi III' din cauza factorului comun $(x^3 + y^3)$.

In rezumat sistemul are 9 perechi soluţiuni distincte, care din cauza simetriei lui se dublează la 18, iar acestea prin coincidenţă se triplează la $3 \times 18 = 54$ perechi soluţiuni. Restul de 27 se pierd prin confundare. Total 81.

Au rezolvat problema în modul cum se arată în dreptul fiecăruia:
1°. D-l PANAIT C. MAZILU (Iaşi) a găsit 54 perechi soluţiuni;

2°. D-nii: GR. MARTEŞ (Lic. militar Kişinău) şi I. N. SAGER au găsit 27 soluţiuni;

3°. D-nii: AL. D. STOICA (Lic. Marele Voevod Mihai, Buc.), MIRCEA-LEONTE A. NEGREA (Brăila) şi PETRE M. WARLAM (Şc. Politehnică Buc.), 18 soluţiuni;

4°. D-l GEORGE SILAŞ (st. Cluj) 11 soluţiuni.

5°. D-l I. C. VISARION a găsit cele 9 soluţiuni distincte.

6°. D-nii: S.-LT. CONST. AVRAM (geniu), VASILE V. GHIOCEL, EM. MEREUŢĂ (St. Buc.), GH. ŞTIRBU (cl. VI Lic. militar Iaşi) şi MARTIN ZIFF (Politehnică Buc.) au dat 6 soluţiuni.

7°. D-nii: V. CEAUŞESCU şi VICTOR COZMA (Elevi Lic. Militar Iaşi), V. GODEANU (Lic. Militar Craiova), I. I. PETRESCU, T. M. PREDOESCU (Lic. Militar Craiova) şi GH. RUSU (Lic. Militar Iaşi) au dat câte 4 soluţiuni.

8°. Domnişoarele DORINA FABIUS şi MARGARETA LÉBER, D-nii S.-LT. I. C. PAREPEANU (geniu), EM. APOSTOLESCU (Lic. Militar Iaşi), M. MĂNESCU şi D. MAVRODIN (cl. 7 Lic. M. Eminescu), I. MIHAIL-STĂNEŞTI, GH. I. STĂNCULESCU (cl. 7 Lic. Militar Iaşi), CONST. M. WARLAM (cl. VI S. P. U.) şi ILIE ZAHARESCU (Lic. Militar Iaşi) au dat câte 2 soluţiuni. Idem D-l CONST. CHIRIAC Lic. Militar Iaşi).

Notă. D-l M. I. PREDOESCU (Şc. Politehnică Buc.) arată că sistemul dat e susceptibil de generalizarea:

$$x^{3n} + y^{3n} = A$$

$$x^{2n} y^{n} + x^{n} y^{2n} = B$$

şi pentru cazul particular din soluţiile: ($x = 1$, $y = 2$) şi ($x = 2$, $y = 1$).

LT. C-DOR GH. N.

PROBLEMA 4346. *Suma termenilor unei progresii aritmetice, fără primul şi penultimul termen, este 188. Aceeaşi sumă, fără ultimul şi al doilea termen, este 182. Se cere să se găsiască acea progresie ştiind că numărul termenilor progresiei este de 3 ori mai mic decât ultimul termen adunat cu 1.*

V. IG. GODEANU.

Soluţie dată de D-nii: G. SILAŞ (Student, Cluj); C. BUDEANU, P. C. MAZILU (Şc. Politehnică, Bucureşti); N. C. VASILESCU (Tg.-Jiu); I. I. MERCUREANU, M. S. RALEA (Lic. militar, Iaşi); C. I. CHIRIAC, I. I. PETRESCU, A. G. CEHAN, C. CĂŞVEANU, VLAD G. POPESCU, M. I. VASILIU, T. AMĂRICĂ (Lic. Militar, Cernăuţi); G. MARGULIS, S. H. HORNSTEIN, J. FINKELSTEIN, O. D. KLINGER, D. D. MAVRODIN

(Lic. Eminescu, Bucureşti); A. I. MITACHE, H. FLORESCU, N. I. MILU (Lic. Militar, Chişinău); I. I. ŢIŢEICA, P. D. DOBRESCU, D-TRU IONESCU, V. GRIGORESCU, M. MĂNAC, DAN MARIN, M. POSTELNICESCU (Lic. Militar, Târgovişte); L. M. A. NEGREA (Brăila) MARCEL-EDUARD I. GOLDENBERG (Lic. Bălcescu, Brăila).

Fie progresia

$$\div a \,.\, b \,.\, c \,.\,.\,. \,k \,.\, l$$

de n termeni şi cu raţia r. Din condiţiile enunţului avem

$$(1) \qquad S - (a + k) = 188$$

$$(2) \qquad S - (b + l) = 182$$

$$(3) \qquad 3n = l + 1$$

iar din proprietăţile progresiilor aritmetice

$$(4) \qquad a + l = b + k$$

$$(5) \qquad l = a + (n - 1)\, r$$

$$(6) \qquad S = \frac{a + l}{2}\, n.$$

Din (1) şi (2) se deduce prin scădere

$$b + l = a + k + 6$$

şi ţinând seamă de (4):

$$l = k + 3$$

$$\therefore \qquad r = l - k = 3.$$

Ducând în (5) pe r găsit şi pe n din (3) avem

$$a = 2.$$

Se înlocueşte în (6) a prin 2 şi n din (3), iar rezultatul se duce în (1) în care se înlocueşte k prin $l - 3$ şi se găseşte

$$\frac{2 + l}{2} \cdot \frac{1 + l}{3} - l = 187$$

$$\therefore \qquad l^2 - 3l - 1120 = 0$$

ale cărei rădăcini sunt

$$l_1 = 35 \quad \text{şi} \quad l_2 = -32.$$

Ducând pe l_1 în (3) se găseşte $n = 12$. Cu acestea progresia căutată este

$$\div 2 . 5 . 8 . 11 . 14 . 17 . 20 . 23 . 26 . 29 . 32 . 35.$$

Pentru l_2 nu se găsesc valori întregi pentru n.

Problema are *o singură soluţie.*

Notă. 1°. Problema a fost greşit enunţată (*nu* din eroarea propunătorului) la pagina 240, Vol. XXXIX, unde se punea condiţia că *«numărul termenilor este cu 1 mai mic decât ultimul termen»*. Rectificarea s'a dat la pagina 336.

2°. D-nii D. MAVRODIN şi S. H. HORNSTEIN (Lic. Eminescu, Bucureşti) au demonstrat, înainte de a se fi publicat rectificarea dela pagina 336, că enunţul dela pagina 240 nu are soluţie.

3°. Am primit un fel de petiţie, semnată de 6 elevi dela un liceu militar care cereau **„de comun acord"** ca în enunţul dela pagina 240 să se înlocuiască 188 prin — 96 şi 182 prin — 102, ceeace ar fi condus la progresia

$$\div -26 . -23 . -20 . -17 . -14 . -11 . -8 . -5 . -2 . 1 . 4.$$

Am preferat să rectificăm enunţul aşa cum l'a trimis propunătorul problemei.

Cu acest prilej recomandăm ca rezolvarea problemelor să nu se facă *«de comun acord»* pentrucă atunci nu se atinge scopul urmărit de revistă, iar subscriitorii *«acordurilor comune»* vor avea decepţiile pe care le încearcă adesea ori prezumţioşii.

4°. S'au primit 2 soluţii care găsiau 2 progresii din cauză că în calcule au luat $l_2 = 32$ în loc de — 32.

GH. B.

EXERCIŢII

22. Fie a, b, c rădăcinile ecuaţiei:

$$x^3 + mx^2 + px + q + 1 = 0.$$

Să se construiască ecuaţia în X ale cărei rădăcini să fie

$$\frac{abc+1}{ab}, \quad \frac{abc+1}{bc} \quad \text{şi} \quad \frac{abc+1}{ca}$$

şi să se rezolve ambele ecuaţii pentru $m = 2$ şi $p = q = 1$.

GH. VASILIU.

R. Scriind relaţiile între coeficienţi şi rădăcini :

$$\Sigma a = -m \ , \ \Sigma ab = p \text{ şi } abc = -q - 1$$

avem că :

$$\Sigma X_1 = \Sigma \frac{abc+1}{ab} = -\frac{mq}{q+1}$$

$$\Sigma X_1X_2 = \Sigma \frac{abc+1}{ab} \cdot \frac{abc+1}{bc} = \frac{q^2p}{(q+1)^2}$$

şi în fine

$$X_1X_2X_3 = -\frac{q^3}{(q+1)^2}$$

deci ecuaţia căutată este :

$$X^3 + \frac{mq}{q+1} X^2 + \frac{pq^2}{(q+1)^2} X + \frac{q^2}{(q+1)^2} = 0.$$

Pentru $m = 2$ şi $p = q = 1$, ecuaţiile devin :

$$x^3 + 2x^2 + x + 2 = 0$$

$$4X^3 + 4X^2 + X + 1 = 0$$

şi care se pot scrie sub forma :

$$(x^2 + 1)(x + 2) = 0 \text{ şi } (X + 1)(4X^2 + 1) = 0$$

cu rădăcinile :

$x_{1,2} = \pm i$ şi $x_3 = -2$ prima iar a doua $X_{1,2} = \pm \frac{i}{2}$ şi $X_3 = -1$.

PROBLEME PROPUSE

4391. In ce sisteme de numeraţie numărul *nnn* e patrat perfect ?

V. THÉBAULT.

4392. Să se găsească numărul N de 2 cifre ştiind că numărul de 6 cifre, ce se obţine scriind după 2N pe N şi apoi pe 2N, este patrat perfect.

COL. GH. BUICLIU.

4393. Se dau două unghiuri egale $(\widehat{D, D'})$ şi $(\widehat{\Delta, \Delta'})$.

Dintr'un punct fix dat se duce o secantă mobilă care tae laturile unghiurilor date respectiv în punctele M, M' şi N, N'.

Să se demonstreze că punctele P şi P', care împart într'un acelaş raport segmentele $\overline{MN}$, $\overline{M'N'}$, se găsesc — când secanta mobilă variază — pe două drepte cari formează între ele un unghiu egal cu unghiurile date.

AL. A. ROŞU.

4394. Se consideră într'un plan trei direcţii fixe Ox, Oy, Oz şi un punct fix M. O dreaptă Δ dusă prin M întâlneşte pe Ox în punctul A. Paralela dusă prin A la Oz întâlneşte pe Oy în B, iar cercul circumscris triunghiului OAB întâlneşte din nou pe Δ în C.

Să se arate că dacă dreapta Δ se roteşte în jurul punctului M:

1°. Punctul C se mişcă pe un cerc fix.

2°. Dreapta BC trece printr'un punct fix.

N. BOTEA.

4395. Fie N, P, Q trei puncte şi A'B'C' triunghiul pedal al punctului M — toate situate în planul triunghiului de referinţă ABC.

Paralelele dreptelor NA', NB', NC' duse prin P şi Q întâlnesc laturile corespunzătoare ale triunghiului de referinţă formând triunghiurile Δ_p, Δ_q.

Să se arate că dreptele, care unesc vârfurile triunghiului ABC cu intersecţiile laturilor corespunzătoare ale triunghiurilor Δ_p, Δ_q, sunt paralele dacă N este centrul de omologie al complimentarului triunghiului A'B'C' cu triunghiul de referinţă.

C. IONESCU-BUJOR.

4396. Se dă un cerc O în interiorul căruia pe diametrul AB se ia un punct C, iar pe AC şi BC ca diametre se descriu două cercuri E şi F; perpendiculara în C pe AB tae pe O în M şi N iar NE şi MF tae cercurile E, F şi O pe rând în N_1, N_2, N_3, M_1, M_2 şi M_3.

1) Să se arate că dreptele M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3 sunt concurente.

2) Se cere locul geometric al punctelor $P \equiv (NE, MF)$ şi $Q \equiv (MN_3, NM_3)$ când C variază.

3) Să se determine poziţia punctului C pentru care triunghiul PQC este dreptunghic şi să i se calculeze suprafaţa.

GH. VASILIU.

4397. Să se găsească două ecuaţii de gradul II cu o rădăcină comună, care să fie semisuma rădăcinilor necomune.

I. IONESCU.

4398. Să se arate că dacă a, b, c, α, β, γ sunt şase numere reale, ultimile trei fiind legate prin relaţia

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

atunci ecuaţia

$$(ab + bc + ca)\, x^2 - 2\,(a + b + c)\, x - 2\,(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha - 1) = 0$$

are rădăcinile reale.

GH. TH. GHEORGHIU.

4399. Să se studieze variaţiunea funcţiunii

$$y = \frac{A \sin x \, \sin 2x}{\cos x \, \sin 2x - B}$$

şi să se construiască curba representativă.

ION S. ANTONIU.

4400. Intre patru puncte A, B, C, D, pe o dreaptă avem relaţia

$$\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} + \frac{1}{BC} + \frac{1}{BD} = 0.$$

Ce se poate spune despre poziţia relativă a acestor patru puncte?

MIRON NICOLESCU.

4401. Să se calculeze suma seriei

$$S_{p,m}(r) = K_p^m + K_p^1 K_p^{m+1} x^2 + \ldots + K_p^i K_p^{m+i} x^{2i} + \ldots$$

K_p^r reprezentând numărul combinărilor cu repetiţie à p obiecte luate câte r. Pentru ce valori ale lui x suma aceasta există?

Numărul K_p^r este dat de formula

$$K_p^r = \frac{p\,(p+1)\ldots(p+r-1)}{1\,.\,2\ldots r}.$$

M. GHERMĂNESCU.

4402. Se dau două drepte fixe D şi Δ, precum şi punctul fix A exterior lor.

Fie M şi N două puncte mobile respectiv pe D şi Δ astfel ca $\sphericalangle MAN = 90^0$. Să se determine suprafaţa născută de dreapta MN.

M. NICOLAU.

Rectificare. Problema 4386 a apărut din eroare semnată N. BOTEA. Autorul acestei probleme este D-l GH. TH. GHEORGHIU.

Începând cu N-rul 7/XXXIX „*Gazeta Matematică*" va apare în 48 pagini, prețul abonamentului rămânând însă același.

Dela apariția ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Boiangiu I. Gh. (4173); *Budeanu C.* (4383); *Constantinescu Gh. Gh.* (825, 2003, 3588); *Dobrescu P.* (4375, 87, P); *Mavrodin D.* (2569, 4055); *Mazilu C. P.* (4371); *Negrea A. M. Leonte* (4329); *Popescu I. Gh. Colonel* (P); *Stoicescu T.* (4312, 28, 75, 78); *Thébault V.* (A, N, P); *Țițeica Ilie Ioan* (4196).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât și cele de propus de **geometrie,** *a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.*

Manuscrisele se vor scrie **pe o singură parte a foii și nu se vor tratà mai multe chestiuni diferite pe aceiași foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipì sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Folle vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exercițiile, recreațiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA", trebue să fie originale, iar nu luate din cărți sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

«Gazeta Matematică» vinde ani completi broşaţi cu preţul de 400 lei volumul, afară de volumele: X, XVII, XVIII, XIX, XX şi XXI care se vând cu preţul de 500 lei volumul.

Volumele: I, XV şi XXV sunt epuizate.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **N. Abramescu,** *Lecţiunile de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediţia IV revăzută şi adăogită,* 1924 (Epuizată).

3. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de mecanică şi geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

4. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă şi cosmografie* (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu,** *Tratat de geometrie analitică,* Fascicola I *Ediţia II revăzută şi adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—
Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).
Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).
Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150,—

6. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10,—

7. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. Lei 180,—

8. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

9. **G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de geometrie* Lei 150,—

La aceste preţuri se vor adăogă taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II) Lei 150,—

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamaţiunile şi cererile pentru cărţi din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete numai D-lui: Inginer **Al. D. Bunescu,** Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, B-dul Elisabeta 29, Bucureşti I.

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii şi orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie şi expediţie, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Călugei 23, Bucureşti 4.

BIBLIOTECA CENTRALĂ
SIBIIU

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXXIX

NUMĂRUL 12. — AUGUST 1934

SUMARUL

1. Relations d'aires dans le triangle . . . . . *V. Thébault*
2. Ecuaţiile algebrice a căror rădăcini au acelaş modul . . . . . *Th. Angheluţă*
3. Note matematice: 62 — 71.
4. Chestiuni de examen.
5. Bibliografie.
6. Cereri: 240.
7. Probleme rezolvate: 3571, 3697, 4140, 4160, 4216, 4334, 4371.
8. Exerciţii: 23.
9. Probleme propuse: 4403 — 4414.
10. Tabla de Materii.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1934

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: Colonel **Gh. Buicliu** din Ministerul Apărării Naţionale; **I. Buşilă**, Inginer Inspector General, Ministerul Lucrărilor Publice; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice" se vor trimite D-lui Inginer-Şef GH. ILIESCU, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret, Bucureşti 6.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29 Bucureşti 1) în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 691, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 270, 71, 97, 99, 310, 33, 67, 84, 86, 99, 412, 50, 553, 650, 79, 711, 29, 64, 876, 906, 14, 29, 59, 87, 2004, 17, 70, 74, 111, 70, 338, 405, 30, 39, 66, 77, 502, 03, 56, 77, 87, 607, 38, 55, 65, 84, 709, 13, 17, 35, 69, 80, 814, 65, 86, 909, 12, 26, 36, 47, 3045, 69, 81, 127, 61, 69, 208, 30, 55, 60, 98, 300, 04, 10, 16, 18, 50, 405, 12, 24, 25, 72, 89, 93, 522, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 27, 73, 608, 27, 32, 47, 57, 65, 81, 82, 84, 99, 700, 03, 33, 36, 93, 804, 08, 29, 36, 44, 53, 64, 80, 96, 909, 13, 15, 16, 18, 20, 33, 44, 83, 4010, 13, 30, 34, 45, 53, 59, 62, 68, 70, 73, 85, 102, 03, 11, 12, 18, 19, 23, 32, 48, 50, 51, 63, 67, 69, 92, 203, 06, 09, 10, 13, 30, 36, 40, 49, 52, 75, 77, 80, 81, 83, 87, 88, 89, 90, 300, 01, 03, 15, 19, 20, 32, 33, 37, 40, 41, 42, 44, 52, 56, 57, 58, 60, 62, 63, 64, 65, 66, 68, 70, 73, 76, 77, 80, 81, 82, 84, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 98, 99, 400, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii 1 — XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procură dela *„Gazeta Matematică"* („Monitorul Oficial". B-dul Elisabeta, 29. Bucureşti 1), cu preţul de 12 lei.

RELATIONS D'AIRES DANS LE TRIANGLE

1. Si

$$BA_1 : A_1C = l : l_1 , CB_1 : B_1A = m : m_1 , AC_1 : C_1B = n : n_1$$

$$BA_2 : A_2C = -l : l_1 , CB_2 : B_2A = -m : m_1 , AC_2 : C_2B = -n : n_2,$$

sont, en grandeur et en signe, les rapports dans lesquels trois points (A_1, B_1, C_1), (A_2, B_2, C_2) partagent les côtés $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ d'un triangle ABC, le rapports des aires S_1, S des triangles $A_1B_1C_1$, ABC puis celui des aires S_2, S des triangles $A_2B_2C_2$, ABC sont égaux à [1])

$$\frac{S_1}{S} = \frac{lmn + l_1m_1n_1}{(l+l_1)(m+m_1)(n+n_1)} , \frac{S_2}{S} = \frac{lmn - l_1m_1n_1}{(l-l_1)(m-m_1)(n-n_1)} . \quad (1)$$

Si S_a , S_b , S_c et S'_a , S'_b , S'_c désignent les aires des triangles $A_1B_2C_2$, $B_1C_2A_2$, $C_1A_2B_2$ et $A_2B_1C_1$, $B_2C_1A_1$, $C_2A_1B_1$, ou a aussi

$$\frac{S_a}{S} = \frac{lmn + l_1m_1n_1}{(l+l_1)(m-m_1)(n-n_1)} , \frac{S_b}{S} = \frac{lmn + l_1m_1n_1}{(l-l_1)(m+m_1)(n-n_1)} ,$$

$$\frac{S_c}{S} = \frac{lmn + l_1m_1n_1}{(l-l_1)(m-m_1)(n+n_1)} ; \quad (2)$$

$$\frac{S'_a}{S} = \frac{lmn - l_1m_1n_1}{(l-l_1)(m+m_1)(n+n_1)} , \frac{S'_b}{S} = \frac{lmn - l_1m_1n_1}{(l+l_1)(m-m_1)(n+n_1)} ,$$

$$\frac{S'_c}{S} = \frac{lmn - l_1m_1n_1}{(l+l_1)(m+m_1)(n-n_1)} . \quad (3)$$

2. En effectuant les produits situés aux dénominateurs de ces rapports et en réduisant, on obtient d'abord

$$S\left|\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_a} + \frac{1}{S_b} + \frac{1}{S_c}\right| = 4, \quad (4)$$

puis, supposant $lmn - l_1m_1n_1 \neq 0$,

$$S\left|\frac{1}{S_2} + \frac{1}{S'_a} + \frac{1}{S'_b} + \frac{1}{S'_c}\right| = 4, \quad (5)$$

---

1) GENTY, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1880 p. 528.

et alors,

$$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_a}+\frac{1}{S_b}+\frac{1}{S_c}=\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S'_a}+\frac{1}{S'_b}+\frac{1}{S'_c}\cdot \qquad (6)$$

3. Posons

$$l : l_1 = c^n : b^n\ ,\ m : m_1 = a^n : c^n\ ,\ n : n_1 = b^n : a^n\ .$$

D'après les théorèmes de CEVA et de MENELAÜS, les droites AA_1, BB_1, CC_1 sont concourantes et les points A_2, B_2, C_2 sont colinéaires. On a les relations suivantes:

$$S_1=2S\left|\frac{a^n b^n c^n}{(b^n+c^n)(c^n+a^n)(a^n+b^n)}\right|,\ S_a=2S\left|\frac{a^n b^n c^n}{(b^n+c^n)(c^n-a^n)(a^n-b^n)}\right|, \qquad (7)$$

$$S_b=2S\left|\frac{a^n b^n c^n}{(b^n-c^n)(c^n+a^n)(a^n-b^n)}\right|,\ S_c=2S\left|\frac{a^n b^n c^n}{(b^n-c^n)(c^n-a^n)(a^n+b^n)}\right|,$$

puis, comme précédemment,

$$S\left|\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_a}+\frac{1}{S_b}+\frac{1}{S_c}\right|=4. \qquad (8)$$

Lorsque $n=1$, on retrouve les expressions des aires des triangles dont les sommets sont trois des pieds (A_1, B_1, C_1), (A_2, B_2, C_2) des bissectrices intérieures et extérieures d'un triangle [1]),

$$S_1=2S\left|\frac{abc}{(b+c)(c+a)(a+b)}\right|,\ S_a=2S\left|\frac{abc}{(b+c)(c-a)(a-b)}\right|, \qquad (9)$$

$$S_b=2S\left|\frac{abc}{(b-c)(c+a)(a-b)}\right|,\ S_c=2S\left|\frac{abc}{(b-c)(c-a)(a+b)}\right|.$$

Quand $n=2$, on retrouve l'expression de l'aire du triangle dont les sommets sont les pieds des symédianes [2]),

$$S_1=2S\left|\frac{a^2b^2c^2}{(b^2+c^2)(c^2+a^2)(a^2+b^2)}\right|, \qquad (10)$$

1) DOSTOR, *Nouvelles Annales,* 1880 p. 473.
2) CHUPIN, *Journal de* VUIBERT, XXXVIII p. 97.

et celles des aires des triangles dont les sommets sont l'un des pieds des symédianes et les conjugués harmoniques des deux autres sur les côtés correspondants du triangle fondamental :

$$S_a = 2S\left|\frac{a^2b^2c^2}{(b^2+c^2)(c^2-a^2)(a^2-b^2)}\right|, S_b = 2S\left|\frac{a^2b^2c^2}{(b^2-c^2)(c^2+a^2)(a^2-b^2)}\right|,$$

$$S_c = 2S\left|\frac{a^2b^2c^2}{(b^2-c^2)(c^2-a^2)(a^2+b^2)}\right|. \qquad (11)$$

4. Si les droites AA_1, BB_1, CC_1 se rencontrent en un point P de coordonnées barycentriques a^n, b^n, c^n, on a

$$AP = AA_1 \cdot \frac{b^n+c^n}{a^n+b^n+c^n}, BP = BB_1 \cdot \frac{c^n+a^n}{a^n+b^n+c^n}, CP = CC_1 \cdot \frac{a^n+b^n}{a^n+b^n+c^n},$$

et

$$PA_1 = AA_4 \cdot \frac{a^n}{a^n+b^n+c^n}, PB_1 = BB_1 \cdot \frac{b^n}{a^n+b^n+c^n}, PC_1 = CC_1 \cdot \frac{c^n}{a^n+b^n+c^n},$$

d'où l'on tire

$$\frac{AP \cdot BP \cdot CP}{PA_1 \cdot PB_1 \cdot PC_1} = \frac{(b^n+c^n)(c^n+a^n)(a^n+b^n)}{a^n b^n c^n} = \frac{2S}{S_1}, \qquad (12)$$

et des expressions analogues pour les points P_a, P_b, P_c de coordonnées barycentriques $(a^n, -b^n, -c^n), \ldots$

La comparaison des relations (8) et (12) donne la suivante pour les céviennes des points P, P_a, P_b, P_c :

$$\sum \frac{AP \cdot BP \cdot CP}{PA_1 \cdot PB_1 \cdot PC_1} = 8.$$

NB. Les formules de GENTY constituent une généralisation du théorème de MENELAÜS et de sa réciproque.

Dans l'hypothèse où $lmn = -l_1m_1n_1$, les relations (3) prouvent que les points (A_2, B_1, C_1), sont collinéaires ainsi que les points (B_2, C_1, A_1), (C_2, A_1, B_1).

V. THÉBAULT
Le Mans (France).

ECUAȚIILE ALGEBRICE A CĂROR RĂDĂCINI AU ACELAȘ MODUL

1. *In acest articol vom considera întâi o clasă de ecuații algebrice cu rădăcinile de modul egal cu unitatea. Vom da apoi condițiile necesare și suficiente pentruca o ecuație algebrică să aibă rădăcinile cu acelaș modul. O astfel de ecuație generalizează din acest punct de vedere ecuațiile binome.*

Să considerăm tabloul cu n^2 elemente

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

și să notăm după cum se obișnuește prin $\bar{\alpha}_{ik}$ numărul imaginar conjugat cu α_{ik}. Vom pune pentru prescurtare

$$\bar{\alpha}_{ik} = \beta_{ik}.$$

Să presupunem că elementele tabloului (1) satisfac următoarele $\frac{n(n+1)}{2}$ egalități,

$$(2) \qquad \sum_{h=1}^{n} \alpha_{ih}\,\beta_{kh} = \begin{cases} 1 & \text{pentru } i = k \\ 0 & \text{« } \quad i \neq k \end{cases}$$

i și k luând valorile $1, 2, \dots, n$.

În cazul particular când elementele tabloului (1) sunt reale, condițiile (2) exprimă că numerile α_{ik} formează o substituție ortogonală.

Cu elementele tabloului (1) să formăm următoarea ecuație algebrică

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} x+\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & x+\alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & x+\alpha_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Teoremă. *Ecuația (3) are rădăcinile cu modul unu dacă numerile α_{ik} satisfac condițiile (2).*

O primă demonstrație a acestei teoreme va fi bazată pe proprietățile ecuațiilor lineare.

În acest scop să considerăm sistemul de ecuații

$$(4)\quad \begin{cases} (\lambda + \alpha_{11})\, x_1 + \alpha_{21}\, x_2 + \ldots + \alpha_{n1}\, x_n = 0 \\ \alpha_{12}\, x_1 + (\lambda + \alpha_{22})\, x_2 + \ldots + \alpha_{n2}\, x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{1n}\, x_1 + \alpha_{2n}\, x_2 + \ldots + (\lambda + \alpha_{nn})\, x_n = 0, \end{cases}$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ fiind necunoscutele iar λ o rădăcină a ecuației (3). Așa fiind există o soluție a sistemului (4) diferită de zero pe care o însemnăm prin $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Să considerăm tabloul format cu elementele β_{ik}, imaginarele conjugate ale elementelor α_{ik},

$$(5)\quad \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \ldots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \ldots & \beta_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \ldots & \beta_{nn} \end{vmatrix}.$$

Să transformăm sistemul (4) în altul echivalent procedând în modul următor.

Înmulțim prima ecuație a sistemului (4) cu β_{11}, a 2-a cu β_{12}... a n^a cu β_{1n} și adunăm rezultatele; apoi procedăm la fel înmulțind prin elementele liniilor a 2-a, ... a n^a a tabloului (5). Obținem astfel sistemul

$$\begin{cases} (1 + \lambda\, \beta_{11})\, x_1 + \lambda\, \beta_{12}\, x_2 + \ldots + \lambda\, \beta_{1n}\, x_n = 0 \\ \lambda\, \beta_{21}\, x_1 + (1 + \lambda\, \beta_{22})\, x_2 + \ldots + \lambda\, \beta_{2n}\, x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda\, \beta_{n1}\, x_1 + \lambda\, \beta_{n2}\, x_2 + \ldots + (1 + \lambda\, \beta_{nn})\, x_n = 0. \end{cases}$$

Trecând la numerile imaginar conjugate și împărțind prin $\bar{\lambda}$ sistemul precedent ne dă sistemul

$$(6)\quad \begin{cases} \left(\frac{1}{\bar{\lambda}} + \alpha_{11}\right)\bar{x}_1 + \alpha_{12}\bar{x}_2 + \ldots + \alpha_{1n}\bar{x}_n = 0 \\ \alpha_{21}\bar{x}_1 + \left(\frac{1}{\bar{\lambda}} + \alpha_{22}\right)\bar{x}_2 + \ldots + \alpha_{2n}\bar{x}_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n1}\bar{x}_1 + \alpha_{n2}\bar{x}_2 + \ldots + \left(\frac{1}{\bar{\lambda}} + \alpha_{nn}\right)\bar{x}_n = 0. \end{cases}$$

Înmulțind ecuațiile sistemului (4) respectiv prin $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ și adunând rezultatele obținem egalitatea

$$\left(\lambda - \frac{1}{\bar{\lambda}}\right)(x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \ldots + x_n\bar{x}_n) = 0,$$

dacă ținem seamă și de sistemul (6).

Factorul $x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \ldots + x_n\bar{x}_n$ nu poate fi nul căci λ însemnând o soluție a ecuației (3) numerile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nu sunt toate nule.

Rezultă că trebue să avem egalitatea

$$\lambda = \frac{1}{\bar{\lambda}},$$

care dovedește teorema enunțată. Prin urmare ecuația (3) nu poate avea alte rădăcini reale decât ± 1.

Să dăm o altă demonstrație a teoremei de mai sus. Pentru aceasta avem nevoie de ecuația în s sub forma dată de HERMITE [1]) și pe care ținem s'o reamintim.

Ecuația în s este dată de determinantul

$$(7)\quad \begin{vmatrix} s + a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & s + a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & s + a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

în care elementele a_{ik} sunt reale și formează un determinant simetric adică avem

$$a_{ik} = a_{ki} \qquad \text{pentru } i, k = 1, 2, \ldots, n.$$

1) CHARLES HERMITE : Oeuvres t. I pag. 479.

În aceste condițiuni se știe că ecuația (7) are rădăcinile reale. Prima demonstrație a acestei teoreme se datorește lui CAUCHY. HERMITE a generalizat ecuația (7) presupunând elementele a_{ik} complexe și înlocuind condiția de simetrie prin condițiile

$$a_{ik} = \bar{a}_{ki} \quad , \quad \text{pentru } i, k = 1, 2, \ldots, n,$$

$\bar{a}_{ki}$ fiind numărul imaginar conjugat cu a_{ki}.

Se vede că aceste condițiuni impun ca elementele $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ din diagonala principală să fie reale. *Și cu aceste condițiuni ecuația (7) are rădăcinile reale.*

Să trecem acuma la a doua demonstrație a teoremei noastre. Pentru aceasta să înmulțim primul membru al ecuației (3) prin determinantul

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} x+\beta_{11} & \beta_{12} & \ldots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & x+\beta_{22} & \ldots & \beta_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \ldots & x+\beta_{nn} \end{vmatrix}.$$

Dacă ținem seamă de relațiile (2) și divizând produsul prin x^n se obține ecuația

$$(9) \qquad \begin{vmatrix} y+\alpha_{11}+\beta_{11} & \alpha_{12}+\beta_{21} & \ldots & \alpha_{1n}+\beta_{n1} \\ \alpha_{21}+\beta_{12} & y+\alpha_{22}+\beta_{22} & \ldots & \alpha_{2n}+\beta_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1}+\beta_{1n} & \alpha_{n2}+\beta_{2n} & \ldots & y+\alpha_{nn}+\beta_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

în care am notat

$$x + \frac{1}{x} = y.$$

Această ecuație este ecuația în s generalizată de HERMITE.

Prin urmare dacă ecuația (3) are rădăcina x *atunci trebue ca* $x + \frac{1}{x}$ *să fie real.*

Să înmulţim ecuaţia (3) prin determinantul obţinut din determinantul (8) schimbând pe x în $-x$. Obţinem astfel ecuaţia

$$\begin{vmatrix} u + \beta_{11} - \alpha_{11} & \beta_{21} - \alpha_{12} \ldots \beta_{n1} - \alpha_{1n} \\ \beta_{12} - \alpha_{21} & u + \beta_{22} - \alpha_{22} \ldots \beta_{n2} - \alpha_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta_{1n} - \alpha_{n1} & \beta_{2n} - \alpha_{n2} \ldots u + \beta_{nn} - \alpha_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

unde s'a pus

$$x - \frac{1}{x} = u.$$

Ecuaţia în u devine o ecuaţie în s a lui HERMITE dacă dividem fiecare linie a determinantului prin numărul imaginar i. *Prin urmare dacă* x *este o rădăcină a ecuaţiei (3) atunci* $x - \frac{1}{x}$ *este un număr de forma* ai *în care* a *este real.*

Din condiţiile găsite rezultă că rădăcinile ecuaţiei (3) au modulele egale cu unitatea. In adevăr fie

$$x = u + iv$$

o rădăcină a ecuaţiei (3). Din prima condiţie expresia

$$x + \frac{1}{x} = u + iv + \frac{u - iv}{u^2 + v^2}$$

fiind reală rezultă

$$v\,(u^2 + v^2 - 1) = 0.$$

Însă v nu poate fi nul căci atunci $x - \frac{1}{x}$ ar fi real şi prin urmare trebue să avem

$$u^2 + v^2 = 1.$$

Cazul particular al teoremei de mai sus când numerile α_{ik} sunt reale şi formează o substituţie ortogonală a fost enunţat de BRIOSCHI [1]) probând că ecuaţia are rădăcini imaginare afară de ± 1. De curând D. A. COLUCCI [2]) a complectat arătând că ecuaţia lui BRIOSCHI are rădăcinile cu modulul unitatea [3]).

---

1) BRIOSCHI: Journal de Liouville t. XIX.
2) A. COLUCCI: Bolletino della Unione Matematica Italiana.
Se poate vedea de asemenea:
E. PASCAL: I determinanti pag. 243 (Manuali Hoepli).
3) O altă generalizare a ecuaţiei (3) a fost comunicată de noi la Seminarul de Matematici din Cluj.

2. Ne propunem să dăm în rândurile ce urmează condițiile necesare și suficiente pentruca o ecuație algebrică să aibă rădăcinile cu modulele egale.

Fără să restrângem generalitatea putem presupune că modulul comun este unitatea. Această clasă de ecuații constitue din acest punct de vedere o generalizare a ecuației binome.

Pentru a găsi aceste condiții să considerăm mai întâi cazul când ecuația are coeficienți reali.

Fie dar ecuația cu coeficienți reali

$$(10) \qquad a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

care prin ipoteză are rădăcinile cu modulul unitatea. Dacă x este o rădăcină a acestei ecuații atunci și $\bar{x}$ conjugatul imaginar a lui x este o rădăcină și în virtutea ipotezei avem egalitatea

$$\frac{1}{x} = \bar{x}$$

și deci și $\frac{1}{x}$ este o rădăcină a ecuației (10). *Prin urmare ecuația (10) trebue să fie reciprocă.*

Dacă punem

$$x + \frac{1}{x} = y$$

și se formează ecuația în y a ecuației (10) rezultă că rădăcinile y sunt reale și cuprinse în intervalul (2, — 2) căci având

$$x = \cos\alpha + i \sin\alpha$$

avem

$$y = 2 \cos\alpha.$$

A doua condiție ce trebue să împlinească ecuația (10) este ca ecuația în y *să aibă rădăcinile reale și cuprinse în intervalul* (2, — 2).

Se vede lesne apoi că aceste condiții necesare sunt și suficiente.

Ca exemplu să considerăm ecuația

$$x^{2n} + x^{2n-1} + \ldots + x + 1 = 0.$$

Din cele de mai sus rezultă că ecuația în y a acestei ecuații are toate rădăcinile reale și cuprinse în intervalul (— 2, 2). Se vede cum această teoremă cunoscută de altfel este o consecință a criteriilor de mai sus.

Ne rămâne să considerăm o ecuaţie algebrică cu coeficienţi oarecari.

Fie ecuaţia

$$(11) \qquad a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

despre care presupunem că are rădăcinile cu modulul unitatea.

Din ecuaţia (11) să formăm ecuaţia cu coeficienţi reali

$$A_0 x^{2n} + A_1 x^{2n-1} + \ldots + A_{2n} = (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n)$$
$$(\bar{a}_0 x^n + \bar{a}_1 x^{n-1} + \ldots + \bar{a}_n) = 0.$$

Această ecuaţie pe lângă rădăcinile ecuaţiei (11) are şi conjugatele acestor rădăcini. Prin urmare cu această ecuaţie suntem în cazul ecuaţiei (10).

Ca exemplu să considerăm ecuaţia (3). Pentru a o reduce la o ecuaţie cu coeficienţi reali am înmulţit-o prin determinantul (8) şi am obţinut ecuaţia (9) în y. Prin urmare această ecuaţie are rădăcinile reale şi cuprinse în intervalul (— 2, 2).

TH. ANGHELUŢĂ.

NOTE MATEMATICE

62. *Points remarquables du triangle.* **1.** Soient un triangle ABC, (I), (O) les cercles inscrit et circonscrit de rayons r, R ; D, E, F les contacts du cercle (I) sur BC, CA, AB.

Si G_1 est le centre de gravité du triangle DEF, la résultante $\overline{V}$ des trois vecteurs $\overline{ID}$, $\overline{IE}$, $\overline{IF}$ est représentée par le vecteur $3\,\overline{IG_1}$. Ce vecteur est porté par la droite Δ de direction OI et l'on sait que

$$\frac{\overline{IG_1}}{IO} = -\frac{r}{3R}\ (1).$$

L'extrémité V *de la résultante de ces vecteurs* $\overline{ID}$, $\overline{IE}$, $\overline{IF}$ *coïncide donc avec l'orthocentre du triangle* DEF.

2. Si l'on adopte pour sens positif sur la droite Δ le sens

1) V. THÉBAULT, *Education mathématique*, XXIII — 33.

de O vers I et si S_1 désigne le centre de similitude interne des cercles (O) et (I), on obtient

$$\frac{R}{R+r} = \frac{OI}{OV} = \frac{OS_1}{OI}$$

d'où

$$\overline{OI}^2 = OV \cdot OS_1.$$

Autrement dit, *la distance des centres des cercles circonscrit et inscrit à un triangle* ABC *est moyenne proportionnelle entre les distances du centre du cercle circonscrit au centre de similitude interne des cercles* (O), (I) *et à l'orthocentre du triangle* DEF.

Si Ω désigne le centre du cercle circonscrit au triangle $I_a I_b I_c$ des centres des cercles exinscrits à ABC, Ω est le symétrique du point I par rapport au centre O.

Par suite, *la division* (Ω, S_1, I, V), *sur la droite* Δ *est harmonique.*

N. B. Par analogie, les cercles exinscrits (I_a), (I_b), (I_c) donnent lieu à des propriétés similaires.

V. THÉBAULT
Le Mans (France).

63. *Cuadratura cercului.* (Vezi pag. 210, 259 şi 304). La Primăria Capitalei s'a mai primit o scrisoare cu data de 13 Mai din Niedersheim, dela D-l F. K... prin care spune că a citit în *„Clever Kreisblatt"* că CRISTOVICI a lăsat 40 milioane lei pentru rezolvarea problemei cuadraturii. Autorul crede că a rezolvat chestiunea şi ca probă dă o figură cu un cerc şi un patrat pus peste el care zice că au aceeaşi arie. Cine nu crede să verifice! Numai că figura e făcută cu creionul şi că grosimea liniilor trece de 1 mm! Autorul în generozitatea lui oferă 20 milioane Primarului Capitalei dacă îi va înlesni luarea Premiului! Adaogă apoi textual:

„Es kommt selten in der Welt vor, dass nun durch solch geringe Mühe sowiel Geld verdienen kann!"

Mai adaog că autorul scrisorii din 12 Decemvrie trecut a mai revenit asupra cererii sale!

I. IONESCU.

64. *Semnul* ∞. Acest semn era întrebuinţat uneori, la scrierea cu cifre romane, în locul lui M, pentru a nota 1000.

Astfel ∞ însemna 1000; $\infty\,\infty$, 2000; $\infty\,\infty\,\infty$ 3000; $\infty\,\infty\,\infty\,\infty$ 4000; V∞, 5000; VI∞, 6000; ...; X∞ 10000; ...; L∞ 50000, ...; C∞ 100000; ...; CC∞, 200000, etc.

I. IONESCU.

65. *Cazuri de ale problemei 3031.* Păstrând notaţiile date la soluţia problemei 3031 dela pagina 409, Vol XXXIX, ne propunem să rezolvăm următoarele cazuri analoage cu acelea rezolvate în acea problemă:

a) Când avem

$$N_1N_4 = N_2N_3 \quad \text{şi} \quad N_1 + N_4 = N_2 + N_3.$$

Din aceste ecuaţii se deduce imediat

$$N_{1,4} = \frac{N_2 + N_3 \pm \sqrt{(N_2 + N_3)^2 - 4N_2N_3}}{2}$$

$$\therefore \qquad N_1 = N_2 \quad \text{şi} \quad N_4 = N_3.$$

b) In ce caz

$$N_1N_4 = N_2 + N_3 \quad \text{şi} \quad N_1 + N_4 = N_2 - N_3.$$

Prin adunare şi scădere se scoate

$$N_2 = \frac{N_1N_4 + N_1 + N_4}{2} \quad \text{şi} \quad N_3 = \frac{N_1N_4 - N_1 - N_4}{2}.$$

Deci se iau pentru N_1, N_4 două numere perechi oare care.

COL. GH. BUICLIU.

66. *Asupra problemei 1729.*

Soluţiunea acestei probleme este publicată în culegerea de probleme de Analiză Matematică a însuşi propunătorului acestei probleme.

G. G. CONSTANTINESCU.

67. *Asupra problemei 2609.*

Soluţia dată acestei probleme în G. M. XXXIX, p. 458 — 60 este *complet eronată.* In adevăr, în primul rând e uşor de văzut că $y = z + 2$ *nu* este o integrală a ecuaţiei diferenţiale

$$(1) \qquad zy'' + 2y' - y = 0,$$

la care ajunge rezolvitorul şi care e satisfăcută de funcţiunea ce reprezintă suma seriei

$$(2) \qquad y = 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2 . 3} + \ldots + \frac{z^n}{(n!)^2 (n+1)} + \ldots,$$

la care conduce enunţul problemei. In al doilea rând e uşor de văzut că $x = 1$ sau $z = -2$ *nu* este un *zero* al funcţiunii (2), căci putem scrie făcând $z = -2$ în (2)

$$y = (1-1) + \left(\frac{2^2}{2^2 . 3} - \frac{2^3}{2^2 . 3^2 . 4} \right) + \ldots$$

$$\ldots + \left[\frac{2^{2n}}{(2n)!^2 (2n+1)} - \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!^2 (2n+2)} + \ldots, \right.$$

unde parantezele sunt toate pozitive, afară de prima care e nulă.

Formula obţinută pentru integrala generală a ecuaţiei diferenţiale (1) este aşadar greşită şi, ceva mai mult, *imposibilă*. In adevăr, ecuaţia (1) este de tip BESSEL şi nu admite polinoame ca integrale particulare, iar suma seriei (2) este un caz particular ($\gamma = 2$) al *funcţiunei* lui BESSEL

$$J(\gamma, z) = 1 + \frac{z}{1 . \gamma} + \frac{z^2}{1 . 2 . \gamma(\gamma+1)} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{z^n}{1 . 2 \ldots n \gamma (\gamma+1) \ldots (\gamma+n-1)} + \ldots$$

care este o transcendentă nouă, ce nu se poate exprima cu ajutorul funcţiunilor elementare cunoscute şi ale cărei zerori nu se pot afla aşa de simplu, cu atât mai puţin cu exactitatea cu care a crezut că le găseşte rezolvitorul problemei de mai sus.

M. G.

68. *Asupra problemei No. 4207.*

Neegalitatea dată se mai poate scrie:

$$\left(1 + \frac{1}{m-n}\right)^n > \frac{m}{m-n}.$$

Cum $\frac{1}{m-n} < 1$ atunci, oricari ar fi n întreg ori fracţionar,

avem:

$$\left(1+\frac{1}{m-n}\right)^n = 1+\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{m-n}+\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\left(\frac{1}{m-n}\right)^2+\ldots$$

$$= 1+\frac{n}{m-n}+R$$

unde $R>0$.

Inlocuind mai sus găsim:

$$R>0$$

c. c. e. d. d.

MAIOR I. LINTEŞ.

69. *Asupra problemei No. 4334.* Una din figurile corespondenţilor cari au rezolvat această problemă m'a făcut să-mi pun întrebarea dacă centrul O al cercului circumscris triunghiului UBC poate să se găsească pe cercul loc geometric al punctului P şi la această întrebare voiu răspunde acum. Aceasta se va întâmpla când distanţa centrelor va fi egală cu raza R_1 adică când vom avea: $R_1 = OO'$, referindu-ne la notaţiunile şi la figura soluţiunii a III-a a problemei 4334. Aplicând triunghiului $OO_1O'_1$ teorema lui STEWART, în care OO' este distanţa centrelor iar restul elementelor cunoscute, ţinând cont de valoarea cunoscută a lui R_1, cât şi de faptul că: $BC : 2R = \sin A$, găsim condiţiunea ce-o căutăm:

$$\sin A = \pm\frac{m}{2n}\sqrt{\frac{m}{n}\cdot\frac{2n-m}{m-n}} = \pm\frac{t}{2}\sqrt{\frac{t(2-t)}{t-1}}.$$

Punând condiţia de variaţie a sinusului obţinem ecuaţia:

$$t^4-2t^3-4t-4 = (t^2-2t+2)(t^2-2)$$

care ne dă rădăcinile reale: $t = \pm\sqrt{2}$.

Soluţiunile problemei vor fi în intervalele:

t	$2 \leftarrow \sqrt{2}$		$0 \leftarrow -\sqrt{2}$
$\sin A$	$0 \rightarrow 1$		$0 \rightarrow 1$

La orice raport $\frac{m}{n}$ cuprins în intervale corespunde un anumit unghiu A definind poziţia lui BC, pentru care centrul O se va găsi pe cercul O'. Pentru cazul particular $A = 90^0$ vom face şi verificarea. Scriem distanţa centrelor:

$$\overline{OO'}^2 = \frac{n^2}{m^2}\left[R^2-\frac{n}{m}\left(1-\frac{n}{m}\right)\overline{BC}^2\right] \qquad (1)$$

în care înlocuim $\frac{n}{m} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ şi BC=2R, corespunzătoare lui A=90°. Rezultatul îl egalăm cu valoarea lui R_1 în care am făcut aceleaşi înlocuiri. Verificarea se reduce astfel la aceea a egalităţii:

$$\sqrt{\frac{3\sqrt{2}-4}{2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

care este adevărată.

2°. Cercetând, pe aceeaşi cale, şi cazul când centrul O' se va găsi pe cercul O găsim intervalul posibil:

$$\begin{array}{c|c} t & -2 \to -1 \\ \hline \sin A & 1 \to 0 \end{array}$$

cu alte cuvinte numai pentru rapoartele negative cuprinse între -1 şi -2. Verificarea aceluiaşi caz particular ($A = 90^0$) ne duce la identitatea:

$$\frac{1}{4}\left[1+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)4\right] = 1.$$

3°. Egalând acum cu zero egalitatea (1) ceeace revine a ne întreba dacă cercurile O şi O' pot fi concentrice găsim soluţia unică: $A = 90^0$, $\frac{m}{n} = 2$, $BC = 2R$ adică dăm peste o problemă elementară şi cunoscută, cazul cel mai particular al problemei 4334.

LT. C-DOR GH. NICULESCU.

70. *Asupra problemei 4221.*

Soluţia dată acestei probleme în G. M. XXXIX, pag. 73 este prea lungă şi cu drept cuvânt D-l COL. GH. BUICLIU a reluat chestiunea în Nota 20 (Id. pag. 171).

In afară de soluţiunea dată de D-l COL. GH. BUICLIU în R. M. T. Vol. VII, pag. 96 acestei probleme, observ că i se poate da una foarte simplă, după cum urmează:

Ecuaţia în numere întregi

$$(1) \qquad \frac{1}{k}+\frac{1}{k'}+\frac{1}{k''} = 1$$

se mai poate scrie

$$(2) \qquad \frac{k'k''}{k'+k''} = \frac{k}{k-1} \leqslant 2 \ , \ k \geqslant 2.$$

Insemnând aceste rapoarte cu λ, avem

$$1 < \lambda \leqslant 2 \tag{3}$$

iar (2) arată că k' şi k'' sunt rădăcinile ecuaţiei

$$u^2 - su + \lambda s = 0 \qquad s = k' + k''$$

care trebuind să fie întregi, cer

$$s^2 - 4\lambda s = m^2 \ , \ (m \text{ întreg})$$

care la rându-i, cere

$$4\lambda^2 + m^2 = t^2 \ , \ (t \text{ întreg}).$$

Dar m şi t fiind întregi, trebue ca 2λ să fie întreg deci, după (3), $2\lambda = 3, 4$, care dau respectiv

$$\begin{cases} m = 4 \ , \ t = 5 \ , \ s = 8 \ , \ k = 3 \ , \ k' = 2 \ , \ k'' = 6 ; \\ m = 0 \ , \ t = 3 \ , \ s = 6 \ , \ k = 3 \ , \ k' = 3 \ , \ k'' = 3 ; \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = 3 \ , \ t = 5 \ , \ s = 9 \ , \ k = 2 \ , \ k' = 6 \ , \ k'' = 3 ; \\ m = 0 \ , \ t = 4 \ , \ s = 8 \ , \ k = 2 \ , \ k' = 4 \ , \ k'' = 4 ; \end{cases}$$

de unde apoi, se obţine uşor toate soluţiile problemei 4221.

M. G.

71. *Asupra problemei 3922.*

In această problemă se cereau patratele de forma *abccca*. Soluţia dată acestei probleme la pag. 330 (G. M. XXXIX) este în adevăr *simplă,* dar este departe de a fi *matematică,* de oarece reduce raţionamentul la *zero,* totul constând în căutări în table!

Problemele cu patrate s'au cam banalizat astăzi tocmai din cauza modului cum sunt soluţionate, asemănător celui incriminat. De fapt ele constituesc, pentru cine vrea să le ia în serios, un excelent exerciţiu de raţionament, care nu este totdeauna din cele mai simple (A se vedea în curând soluţia problemelor 4301, 4313).

Voi da în cele ce urmează soluţia *matematică* a problemei 3922, examinând unul singur din cazurile posibile.

Fie $\alpha\beta\gamma$ un număr de trei cifre. Patratul său este

$$N^2 = 10000\,\alpha^2 + 2000\,\alpha\beta + 100\,(\beta^2 + 2\alpha\gamma) + 20\beta\gamma + \gamma^2 = abccca. \tag{1}$$

Pe de altă parte, a poate fi 1, 4, 5, 6, 9. N^2 începând cu aceleaşi cifre, vom avea, excluzând cazul banal $a = 0$,

(2) $a = 1 \quad 316 < \alpha\beta\gamma < 448$

(3) $a = 4 \quad 632 < \alpha\beta\gamma < 706$

(4) $a = 5 \quad 705 < \alpha\beta\gamma < 775$

(5) $a = 6 \quad 774 < \alpha\beta\gamma < 837$

(6) $a = 9 \quad 948 < \alpha\beta\gamma < 999.$

Se vede în primul rând că avem întotdeauna $a \geqslant 3$. Să examinăm pe rând cazurile $a = 1, 4, 5, 6, 9$.

1^0. $a = 1$. γ poate fi 1 sau 9, iar (1) devine

(a) $N^2 = 10000\,\alpha^2 + 2000\,\alpha\beta + 100\,(\beta^2 + 2\alpha) + 20\beta + 1$

(b) $N^2 = 10000\,\alpha^2 + 2000\,\alpha\beta + 100\,(\beta^2 + 18\alpha) + 180\beta + 81.$

(a) Cifra zecilor lui N^2 este 2β dacă $\beta < 5$ sau $2\beta - 10$ dacă $\beta \geqslant 5$.

In primul caz $\beta^2 + 2\alpha$ se termină cu 2β, adică diferenţa lor e 10 m.

$$\beta^2 + 2\alpha - 2\beta = (\beta - 1)^2 + 2\alpha - 1 = 10m$$

Insă, după (2), $\alpha = 3$, deci $\beta = 6$, inacceptabil căci $\beta < 5$ sau $\alpha = 4$ pentru care p nu există.

Dacă $\beta \geqslant 5$, trebue ca $\beta^2 + 2\alpha + 1$ să se termine cu aceeaşi cifră ca $2\beta - 10$, adică

$$\beta^2 + 2\alpha + 1 - 2\beta = (\beta - 1)^2 + 2\alpha = 10m.$$

Când $\alpha = 3$, $\beta = 9$, însă $N = 391$ nu e soluţie. Când $\alpha = 4$, nu avem soluţie pentru β, deci nici pentru N.

(b) Cifra zecilor lui N^2 este ultima cifră a lui $(18\beta + 8)$, care trebue să fie ultimă cifră şi în $\beta^2 + 18\alpha + E\left(\frac{18\beta + 8}{10}\right)$. Dând lui β valorile 0, 1, 2, .. 9 găsim că aceste două expresii se termină cu aceeaşi cifră numai dacă $\beta = 5$, $\alpha = 3$, adică $N = 359$, care este chiar o soluţie a problemei.

In acelaşi mod examinăm celelalte valori ale lui a.

M. G.

CHESTIUNI DE EXAMEN

UNIVERSITATEA DIN CLUJ, FACULTATEA DE ŞTIINŢE

Secţiunea de Matematici

(Sesiunea Iunie 1934)

ALGEBRA ELEMENTARĂ (a. I)

Algebră

I. Se dă polinomul

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Să se arate că se pot determina trei numere α, p, q aşa încât identitatea următoare

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = (x + \alpha)^4 + p\,(x + \alpha)^2 + q$$

să fie satisfăcută dacă există relaţia

$$a^3 - 4ab + 8c = 0.$$

Aplicaţie. Să se rezolve ecuaţia

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 2 = 0.$$

Să se studieze variaţia polinomului

$$y = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 2$$

şi să se facă reprezentarea grafică.

II. Intr'o piramidă triunghiulară regulată, SABC se dă muchea $SA = a$ şi suprafaţa totală egală cu $\frac{\sqrt{3}}{4}\,k$. 1) Să se determine latura triunghiului de bază. 2) Să se discute ecuaţia găsită, k fiind un parametru. Din discuţie să se deducă maximul artei totale când latura triunghiului variază. 3) Să se reprezinte grafic variaţia suprafeţei totale şi să se compare rezultatele. 4) Să se calculeze raza cercului circunscris triunghiului ABC pentru valoarea maximă a suprafeţei totale şi să se dea o interpretare geometrică variaţiei suprafeţei piramidei.

III. 1) Să se arate că dacă un polinom se divide cu $(x - 1)^m$ atunci derivata acestui polinom se divide cu $(x - 1)^{m-1}$, m fiind un număr întreg şi pozitiv.

Aplicaţie. Să se determine a şi b astfel ca polinomul

$$P(x) = a + bx + x^2 + x^3 + \ldots + x^n.$$

să se dividă cu $(x-1)^2$. 2) Să se arate că dacă a şi b sunt astfel determinaţi, polinomul se pune sub forma

$$P(x) = \frac{n(n-1)(1-x)^2 - 2(n-1)x(1-x) + 2x^2(1-x^{n-1})}{1-x}.$$

3) Să se determine câtul pentru $n = 4$ şi $n = 5$.

(O chestiune obligatorie la alegerea candidatului).

Trigonometria

I. Intr'un triunghiu ABC se dă $A = \frac{2\pi}{3}$, $c = AB = 1$. Din A se duce înălţimea AD şi perpendiculara AE pe AB. Se dă lungimea segmentului $DE = m$. Să se arate cum se rezolvă triunghiul şi să se discute problema după valorile lui m.

II. Să se arate că într'un triunghiu sferic dreptunghic ($A = 90^0$) avem relaţia

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(a+c)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(a-c) = \operatorname{tg}^2\frac{b}{2}.$$

Folosindu-ne de formula aceasta, să se rezolve triunghiul sferic dreptunghic în care se cunoaşte

$$a + c = 84^0\ 34'\ 17''$$
$$b = 38^0\ 28'\ 40''.$$

MATEMATICI ELEMENTARE (a. I)

Aritmetica

I. Produsul a trei numere consecutive, din care numărul din mijloc e o putere a şeasa exactă, e divizibil cu 2520.

II. Să se calculeze cu trei zecimale exacte expresiunea:

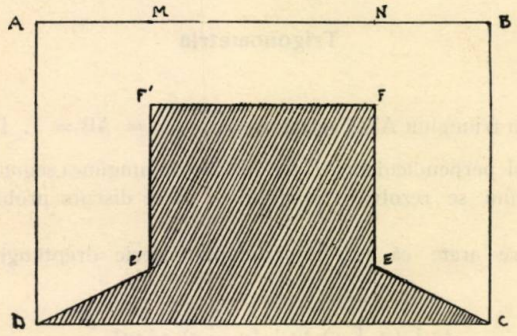
$$E = \sqrt{\pi + \sqrt{\frac{400{,}283131\ldots - \frac{53}{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}}}{\sqrt{0{,}01} + \frac{7}{8} + \sqrt{1 + 1{,}77\ldots}}}}.$$

Mecanica

Pe o placă omogenă şi grea care are forma unui dreptunghiu ABCD se face desenul din figura alăturată şi se suprimă partea haşurată. Se obţine astfel porţiunea din placă limitată de planul ABCEFF' E' D. Punctele E şi F

se proectează în N pe AB iar punctele E' şi F' se proectează în M pe AB. Porţiunea de placă rămasă se atârnă cu ajutorul a două cârlige infinit mici plasate în M şi N în două cuie situate într'un perete vertical pe o aceeaş orizontală.

1. Se cere să se determine presiunile plăcii pe cele două cuie. Se dă AB = 12 cm, AM = 3 cm, BN = 4 cm, MF' = NF = 2 cm, AD = BC = 8 cm, greutatea unui m^2 de placă = 12 gr.



2. Se suprimă cârligul din N, placa se va roti în jurul punctului M şi va lua o poziţie de echilibru.

Să se calculeze unghiul pe care-l face în poziţia de echilibru latura AB cu verticala lui M.

GEOMETRIE ELEMENTARĂ (a. I)

Cercul înscris (I) unui triunghiu ABC atinge laturile BC, CA, AB în A', B', C'. Medianele A, B, C ale triunghiului ABC taie respectiv în D, E, F dreptele B'C', C'A', A'B'.

1. Paralela din B la B'C' taie pe A în N şi pe AC în M. Să se arate că avem

$$\frac{DC'}{DB'} = \frac{NB}{NM} \quad \text{şi} \quad AM = AB.$$

2. Să se scrie relaţia care exprimă că triunghiul BCM este tăiat de transversala AN şi să se deducă

$$\frac{NB}{NM} = \frac{-b}{c}.$$

3. Să se arate apoi că dreptele A'D, B'E, C'F sunt concurente în triunghiul A'B'C'.

4. Fie P intersecţia dreptei B'C' cu paralela din A la BC. Să se arate că AP este conjugata armonică a medianei A în raport cu AB şi AC.

5. Să se arate că D este polul dreptei AP în raport cu cercul înscris (I).

6. Să se probeze că DA' trece prin centrul I al cercului (I) şi prin urmare că dreptele DA', EB', F'C sunt concurente în centrul I al cercului înscris (I).

MATEMATICI ELEMENTARE

(a. I Secțiunile Fizico-Chimie, Chimie și Geografie cu Matematici)

Algebra

1. Să se studieze variația trinomului $y = -4x^2 + 8x - \frac{5}{2}$ și să se deseneze curba reprezentativă în planul coordonatelor x și y.

2. Să se scrie ecuația dreptelor care trece prin punctele

$$\left(0, \frac{3}{2}\right) \text{ și } \left(3, -\frac{9}{2}\right).$$

3. Să se determine coordonatele punctelor de intersecție ale curbei obținute la problema 1° cu dreapta din problema 2°.

4. Din contopirea a trei aliaje de Au cu titlurile 0,928; 0,824 și 0,784 s'a obținut un nou aliaj cu titlul 0,841. Din primul aliaj component s'au întrebuințat exact 2 kg., iar din celelalte două componente s'au luat cantități proporționale cu numerile 5 și 3. Să se determine în gr. aceste cantități. Să se generalizeze problema și să se discute diversele cazuri.

Trigonometria

1. Două unghiuri x și y mai mici ca 90 sunt date de ecuațiile

$$\sin x \cos y = 0{,}345$$
$$\cos x \sin y = 0{,}543.$$

Să se calculeze numărul E definit cu formula

$$E = 2754{,}3 \cdot \frac{\sin 3x + \cos 4y}{\sqrt{\operatorname{tg} 2y + \operatorname{tg} x}}.$$

2. Să se rezolve triunghiul ABC, cunoscând AM = 1000 și știind că mediana AM face cu laturile AC și AB unghiurile x și y definite mai sus.

Mecanica

Aceeaș problemă ca și pentru secția matematică.

MATEMATICI GENERALE (a. II)

Proba teoretică

I. Să se desvolte în serie întreagă în x funcția $(1 - e^{-x})^2$ determinându-se totodată termenul general, restul seriei și intervalul de convergență.

II. Să se găsească curba a cărei subtangentă este egală cu expresiunea $y + 3x$; se notează că x și y reprezintă coordonatele punctului de contact al curbei cu tangenta corespunzătoare. Să se indice soluția particulară care trece prin punctul (2, 1) al planului.

III. Să se calculeze volumul spaţiului comun următoarelor două suprafeţe cilindrice

$$x^2 + y^2 - 2x = 0 \quad , \quad z^2 - 8x = 0.$$

Proba practică

Să se calculeze cu trei zecimale exacte valoarea integralei

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \, dx}{4\cos x + 3\sin x + 5}.$$

GEOMETRIA ANALITICĂ (a. II)

Proba teoretică

Se dau două axe perpendiculare Ox şi Oy şi punctul A $(a, 0)$ şi B $(2, 1)$.

1. Să se scrie ecuaţia generală a iperbolelor trecând prin punctul A, tangente în origină la dreapta OB şi având pe Oy ca direcţie asimtotică.

2. Să se găsească şi să se construiască locul centrelor acestor iperbole.

3. Să se scrie ecuaţia asimptotei neparalele cu Oy a uneia din iperbolele considerate.

4. Să se arate că prin fiecare punct al planului trec două asimptote de felul acesta. Să se caute locul punctelor unde aceste asimtote sunt perpendiculare şi locul punctelor unde aceste două asimptote sunt confundate.

Proba practică

Prin O se duce dreapta de parametrii directori 1, 2, 2 şi pe ea se ia punctul M la distanţa 3 de origină. Se consideră dreapta D_1 dusă prin M paralel cu dreapta

$$x + y + z = 0 \quad , \quad y - z = 0.$$

Fie K simetricul lui M în raport cu planul xOy. Se consideră dreapta D_2 dusă din K perpendicular pe planul

$$x - 2y + z = 0.$$

Să se afle:

1. Ecuaţiile perpendicularei comune dreptelor D_1 şi D_2.
2. Cea mai mică distanţă între dreptele D_1 şi D_2.

GEOMETRIA DESCRIPTIVĂ (a. II)

Intersecţia unui con cu un cilindru

Cadrul are dimensiunile orizontală şi verticală de 270 mm. şi 420 mm. Linia de pământ este paralelă cu marginea orizontală, la distanţa de 180 mm. de sus în jos. Conul are baza în planul orizontal, cercul O, cu centrul în O (45, 77, 0) şi raza 42 mm., iar vârful S (220, 35, 160). Cilindrul are bază în

planul orizontal, cercul O_1, cu centrul O_1 (170, 122, 0) şi raza 40 mm. Generatoarele cilindrului în proecţie orizontală sunt paralele cu tangenta la dreapta dusă din punctul (175, 0, 0) la cercul O_1, iar generatoarele în vertical fac cu linia de pământ unghiul α, astfel că $\operatorname{tg}\alpha = -3$.

ALGEBRA SUPERIOARĂ (a. II)

Proba teoretică

I. Fie $1 + u_1 x + u_n x^n + \ldots + u_i x^n$ câtul dintre $1 - x$ şi $1 - 2ux + x^2$, ordonat după puterile crescătoare ale lui x.

1. Să se calculeze coeficienţii u_1, u_2, u_3.

2. Din identitatea împărţirii să se deducă relaţia de recurenţă

$$u_n - 2u_{n-1} + u_{n-2} = 0.$$

Să se arate că $u_n = P_n(u)$ este un polinom de gradul n în u şi că termenul de gradul cel mai înalt a lui $P_n(u)$ este $2^n u^n$.

3. Să se arate că $P_n(1) = 1$, $P_n(-1) = (-1)^n (2n + 1$.

4. Să se arate apoi că ecuaţia în u, $P_n(u) = 0$ are toate rădăcinile reale şi cuprinse în intervalul $(-1,1)$.

II. Se consideră seria cu termeni pozitivi

$$(1) \qquad u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

1. Să se arate că dacă seria (1) este convergentă şi seria cu termenul general $v_n = \dfrac{u_n}{1 + u_n}$ poate fi convergentă şi în acelaş timp seria (1) divergentă.

2. Să se arate, luând cazul particular $u_n = n^\alpha$, că seria cu termenul general $w_n = \dfrac{u_n}{n + u_n}$ poate fi convergentă şi în acelaş timp seria (1) divergentă.

3. Să se arate că dacă şirul $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ este mărginit, seria cu termenul general $z_n = \dfrac{u_n}{n^2 + u_n}$ este convergentă.

III. Să se discute, după valorile parametrului real α, numărul şi semnul rădăcinilor reale ale ecuaţiei

$$x^2 + L(1 + x^2) - 6 \operatorname{arc\,tg} x + \alpha = 0$$

logaritmii fiind luaţi în baza e, iar $\operatorname{arc\,tg} x$ este arcul cuprins între $-\dfrac{\pi}{2}$ şi $\dfrac{\pi}{2}$.

Proba practică

1. Să se formeze ecuaţia algebrică ale cărei rădăcini x_1, x_2, x_3 satisfac sistemul

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 5$$
$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 4.$$

2. Să se separe rădăcinile acestei ecuații.

3. Să se calculeze cu o eroare mai mică decât 0,001 cea mai mică rădăcină pozitivă a acestei din urmă ecuații.

ANALIZA MATEMATICĂ p. I (a. III)

Proba teoretică

Să se găsească învelitoarea familiei de plane, depinzând de parametrii r și

$$x\cos\theta + y\sin\theta - z\sqrt{\frac{r-p}{p}} + r - 2p = 0$$

unde p e o constantă fixă.

2. Să se determine liniile de curbură și liniile asimptotice, apoi curbura totală a suprafeței. Care e natura punctelor suprafeței? Ce relație există între razele principale de curbură într'un punct oarecare?

3. Scriind ecuațiile unei linii asimptotice cu ajutorul parametrului, să se calculeze sub ce unghiu tae aceasta meridianele suprafeței. Apoi să se calculeze lungimea arcului măsurat pe curba asimptotică dela o origină aleasă convenabil până într'un punct oarecare al ei.

Proba practică

Să se calculeze integrala

$$A = \int \frac{2x^2 - 2x \quad 16}{(x^2 - 2x + 9)^2} dx \ .$$

Să se calculeze, cu ajutorul lui A și integrala

$$B = \int \frac{(x^2 + 3)(2x^2 - 2x - 16)}{(x+1)^3 (x^2 - 2x + 9)^2} dx.$$

MECANICA RAȚIONALĂ p. I (a. III)

Proba teoretică

1. Un punct mobil M descrie curba (Γ) numită tractrice situată în unghiul xOy. Se notează cu A proecția lui M pe Ox și cu B intersecția tangentei în M la curba cu Ox, se știe că dealungul tractricei segmentul MB este de lungime constantă. Se notează $MB = a$ și se alege ca parametru $AMB = \lambda$. Se va demonstra că coordonatele punctului în funcție de λ sunt

$$x = a\left[\text{L tg}\left(\frac{\lambda}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\lambda\right], \quad y = a\cos\lambda$$

valoarea lui λ pentru cazul când M este în M pe Oy fiind egală cu zero.

1. Un punct mobil M descrie tractricea astfel ca mărimea vitezei punctului M să fie egală cu AB; să se determine λ în funcţie de timp, la momentul iniţial $t = 0$, M fiind în M pe Oy. Prin origină se duce vectorul OP echipolent cu viteza lui M. Să se construiască locul geometric al punctului P (odograful) arătându-se arcul descris de P când M descrie tractricea.

2. Să se arate că vectorul acceleraţie este simetricul vectorului MA în raport cu MB. Să se calculeze raza de curbură R prin consideraţiuni cinematice.

3. Prin O se duce vectorul OQ echipolent cu vectorul acceleraţie. Să se scrie în coordonate polare ecuaţia curbei descrise de Q şi să se deseneze această curbă. Se va arăta arcul descris de Q când M descrie curba (Γ).

II. Un punct material greu M de massă m este obligat să se mişte pe curba Γ; la momentul iniţial $t = 0$, M este în M pe Oy şi are viteza nulă, să se determine Γ în funcţie de timp şi să se calculeze componentele reacţiunei curbei pe cele două axe Ox, Oy în funcţie de λ.

Proba practică

Într'un vertical se consideră o parabolă de parametru p, axa verticală Ox, se mai consideră un echer format de două bare de lungime a şi $2a$ omogene şi de grosime neglijabilă. Se cere să se plaseze echerul pe parabolă astfel ca laturile echerului să fie tangente la parabolă. Se va admite că mişcarea echerului pe parabolă se face fără frecare.

1. Se vor calcula coordonatele punctului A corespunzător poziţiei de echilibru în raport cu axele Ox şi Oy (Ox axa parabolei Oy tangenta la vârf).

2. Se vor calcula presiunile echerului în cele două puncte de contact.

3. Se va căuta condiţia pe care trebue să o îndeplinească parametrul parabolei pentru ca problema să fie posibilă.

ASTRONOMIE (a. III)

Proba teoretică

Să se calculeze α_1, ascensiunea dreaptă a unei stele S_1 cu declinaţia

$$\delta_1 = +24^\circ\ 17'\ 38''$$

cunoscându-se că în momentul răsăritului adevărat a stelei S_2 cu coordonatele ecuatoriale

$$\alpha_2 = 3^h\ 43^m\ 57^s,3 \qquad \delta_2 = +18^\circ\ 24'\ 37''$$

steaua S_1 are distanţa zenitală (corectată de refracţie)

$$z_1 = 38^\circ\ 36'\ 14''.$$

Coordonatele adevărate α_1, δ_1 fiind cunoscute să se calculeze coordonatele ecuatorale aparente α'_1, δ'_1 fiind refracţia atmosferică exprimată prin formula

$$R\ \mathrm{tg}z\ ,\quad R = 60''\ ,\ 2.$$

Latitudinea locului de observaţie este

$$\varphi = +43^0\ 28'\ 33''.$$

Proba practică

Mica planetă Zrelina are următoarele elemente raportate la eliptică

$$\Omega = 198^0\ 1'\ 37''\ ,\ \omega = 53^0\ 51'\ 36'\ ,\ i = 34^0\ 32'\ 53''$$

$$\pi = 251^0\ 53'\ 13''\ (\pi = \Omega + \omega).$$

Să se calculeze elementele analoage Ω' , i' , ω' , π' raportate la ecuator. Inclinarea eclipticei pe ecuator este

$$\varepsilon = 23^0\ 26'\ 57''.$$

Notaţia întrebuinţată are însemnătatea următoare :

Ω = longitudinea nodului ascendent

i = înclinarea orbitei planetei pe ecliptică

ω = argumentul latitudinei periastrului. (Unghiul format de razele vectoare ale nodului ascendent şi ale periastrului).

π = longitudinea periastrului în orbită.

ANALIZA MATEMATICĂ p. II (a. IV)

Proba teoretică

Se consideră ecuaţia diferenţială

$$(x^3 - x^2 + 7x + 9)\,y'' - 4\,(x^2 - x + 4)\,y' + 6\,(x - 1)\,y = 2x^2 - 2x - 16.$$

1. Să se integreze, ştiind că ecuaţia omogenă admite ca integrală un polinom.

2. Să se determine curba integrală care trece prin origină şi e tangentă acolo axei Ox. Să se construiască această curbă.

3. Se roteşte împrejurul axei Ox porţiunea din curbă cuprinsă între $x = -\frac{8}{3}$ şi $x = 0$. Să se calculeze volumul mărginit de suprafaţa născută.

Proba practică

Să se calculeze volumul cuprins între conul

$$2x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

şi paraboloidul

$$2x^2 + y^2 + z = 1$$

în semiplanul în care $z \geqslant 0$.

MECANICA RAŢIONALĂ p. II (a. IV)

Proba teoretică

O parabolă care la momentul iniţial are în raport cu axele fixe Oxy ecuaţia $x^2 = 2py$, se roteşte în mod uniform în jurul punctului O, fără să se deformeze, cu viteza unghiulară ω.

Un punct material M de massă egală cu 1 este obligat să se mişte fără frecare pe această parabolă. El este atras de punctul O cu forţa $\vec{F} = -k\omega^2 \overrightarrow{OM}$.

1. Să se găsească ecuaţia mişcării punctului M şi să se discute mişcarea, condiţiile iniţiale fiind arbitrare. Se înţelege că şi parametrul poate avea diferite valori.

2. Să se integreze complet în cazul $k = 1$ şi să se exprime în acest caz reacţiunea curbei, în funcţie de parametrul care fixează poziţia punctului pe parabolă.

Proba practică

O placă foarte subţire şi omogenă având forma unui triunghiu isoscel se poate roti în jurul punctului fix O. Se presupune că raportul dintre baza triunghiului AB şi înălţimea OI este $\sqrt{6}$. Se cere să se studieze mişcarea acestei plăci ştiind că asupra ei nu se exercită nici o forţă şi că la momentul iniţial placa este animată de o rotaţie de 2ω în jurul unei axe, care se proectează pe placă după dreapta OI şi care face cu placa un unghiu de 30^0. Să se calculeze unghiurile lui EULER în funcţie de timp şi să se determine reacţiunea puntului fix.

GEOMETRIA INFINITEZIMALĂ (a. IV)

I. Să se găsească înfăşurătoarea unui cerc variabil al cărui centru descrie o curbă dată (C) şi punctul de contact al dreptei AB ce uneşte punctele de tangenţă ale cercului (C).

II. Se dau trei axe perpendiculare, origina O fiind centrul foii axa Oy coincide cu linia de pământ şi este îndreptată după axa mică a foii. Unitatea de lungime este centimetrul. O suprafaţă strâmbă (Σ) are ca directoare : 1) dreapta (D, D') $x - y = 4,\ z = 6$; 2) dreapta (Δ, Δ') $x + y = 4,\ z = 2$; cercul orizontal de rază 2 cu centrul în (O, O') $x = 4,\ y = 0,\ z = 4$.

1. Să se indice o metodă pentru construcţia unei generatoare.

2. Să se arate că conul director al suprafeţei este de rotaţie.

3. Să se afle planul tangent într'un punct al unei generatoare.

4. Să se arate că linia de strictiune este contorul aparent orizontal şi este o ipocicloidă cu patru puncte de întoarcere.

Să se anexeze o legendă.

TEORIA FUNCŢIUNILOR (a. IV)

Proba teoretică

Se consideră funcţia

$$f(z) = \operatorname{tg} \frac{1}{iz} .$$

1. Să se indice care sunt punctele singulare ale funcţiei $f(z)$.

2. Fie ecuaţia

$$\operatorname{tg} \frac{1}{iz} = ie^{i\alpha}$$

unde α este o cantitate reală cuprinsă între O şi π ($0 \leqslant \alpha < \pi$). Să se arate că rădăcinile acestei ecuaţii în care α are o valoare fixă, sunt situate pe un cerc tangent la axa Oy în origină. Care este locul geometric al unei rădăcini oarecare când α variază ?

3. Să se calculeze valoarea integralei

$$\int_{\Gamma} \operatorname{tg} \frac{1}{iz}\, dz$$

luată în lungul cercului Γ cu centrul în punctul $+i$ şi de rază egală cu $\frac{5}{2\pi}$.

Proba practică

1. Să se calculeze, cu ajutorul teoriei reziduurilor, valoarea integralei definite

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos n\varphi\, d\varphi}{(1 - 2r\cos\varphi + r^2)^2}$$

unde n este un număr întreg, iar r un număr pozitiv mai mic decât 1.

2. Să se desvolte în serie trigonometrică funcţia

$$\frac{1}{(1 - 2r\cos\varphi + r^2)^2}.$$

BIBLIOGRAFIE

Bulletin Mathématique de la Société Roumaine des Sciences. Tome 36 (1) Bucureşti 1934. Sur les couples de congruences stratifiables par familles de surfaces réglées, par AL. PANTAZI. Sur une classe de polynomes à un paramètre généralisant les polinomes de *Legendre,* par N. CIORANESCO. Zur Bewegungstheorie der Septuoren, von D. BARBILIAN. Sur le prolongement des fonctions convexes d'ordre supérieur, par T. POPOVICIU.

Boletin Matematico. Anul VII. No. 3. Mai 1934. Buenos Aires. O generalizare a teoremei lui PITAGORA, de A. E. S. BERRA. Compliment asupra numerelor raţionale generalizate, de O. GONZALES.

Idem. No. 4. Iunie 1934. Numerele complexe: pluricomparaţiune, de B. I. BAIDAFF. Compliment asupra numerelor raţionale generalizate, de O. GONZALES.

Boletin Matematico Elemental. No. 4. Iunie 1934. Buenos Aires. Procedare pentru calculul rădăcinii patrate, de B. I. B.

Boletin Matematico. Suplimento informativo. Anul II. No. 6. Iunie 1934. Buenos Aires.

Journal des Mathématiques Élémentaires publié par H. VUIBERT. Anul 58. No. 19. Iulie 1934. Produs scalar şi produs vectorial, de F. SALLES.

Idem. No. 20. Iulie 1934. Câteva probleme de geometria compasului, de General THÉVENIN.

Mathesis. Tomul XVLIII. No. 6. Iulie 1934. Gembloux. Asupra puterilor impare, de G. LAMBERT. Diferenţiarea unei funcţiuni $F(x, y, z)$ pe o suprafaţă $S \equiv f(x, y, z) = 0$, de AD. M. Asupra numerelor pitagorice, de V. THÉBAULT. Asupra geometriei triunghiului, de J. LEEMANS.

The Mathematical Gazette. Vol. XVIII. No. 229. Iulie 1934. Londra. Rezultatele relativităţii fără teoria tensorilor, de R. A. M. KEAZNEY. Unele dificultăţi la desemnele saracenice, de E. HAMBURY HANKIN. Conceptul de funcţiune în matematica şcolară, de H. R. HAMLEY. Tratarea grafică a ecuaţiilor algebrice, de H. PEAT. *Duncan Mclaren Youn Somerville,* de F. F. MILES.

Buletinul „Societăţii de Matematici" *a Liceului «Tasse Dumitrescu» din Mizil.* Anul IV. 1933 — 1934. Buzău.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XIV. No. 5. Iulie 1934. Timişoara. Sur quelques propriétés du triangle, par V. THÉBAULT. Asupra ecuaţiei reciproce de gradul IV, de G. D. SIMIONESCU.

J. B. TOURRIOL. *Optique géométrique.* Paris. Gauthier-Villars, Editeur. Paris 1934.

In un volum de 300 pagini, autorul a publicat un curs de optică pentru clasele de matematici speciale din Franţa, cu unele adaose necesare pentru cei ce au nevoie de cunoştinţe mai numeroase pentru priceperea şi utilizarea aparatelor optice. Expunerea este elementară pentru a fi urmărită de liceeni.

Cartea cuprinde următoarele capitole: I. Principiile fundamentale. II. Stigmatism şi aplanetism. III. Oglinzi plane. IV. Suprafeţe stigmatice prin reflexiune. V. Oglinzi sferice. (Aproximaţia lui GAUSS). VI. Sisteme dioptrice; generalităţi. VII. Dioptru plan. VIII. Dioptru sferic. IX. Sisteme centrate. (Aproximaţia lui GAUSS). X. Lentile sferice, groase şi subţiri. XI. Determinarea sistemelor optice (Focometria). XII. Aeraţia sistemelor usuale, caustice, focale. Oglinzi sferice. XIII. Dioptru plan. XIV. Dioptru sferic. XVI. Instrumente optice. Generalităţi. XVII. Microscopuri. XVIII. Telescopuri. XIX. Obiectiv fotografic.

Intr'un *Apendice* sunt tratate diverse chestiuni şi anume: Măsura indicilor de refracţie, măsura iuţelii luminii, şi o colecţiune de probleme de optică date pela concursuri.

E o carte bună nu numai pentru şcoală, dar şi pentru ingineri şi fiziciani.

I. I.

N. G. BOTEA. *Une propriété de réciprocité.* (Extras din *Comptes rendus de la 57-e Session de l'Association pour l'avancement des sciences*). Paris 1933.

M. DEWECK. *Sur le problème du relèvent topographique.* (Supliment la *Mathesis*). (Extras din *Bulletin Belge des Sciences militaires*). 1934.

V. THÉBAULT. Triangle bordé de triangles isoscèles semblables. (Extras din *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*). (Supliment la *Mathesis*). Bruxelles 1934.

CERERI

240. Aşi dori să am date biografice despre GHEORGHE ROŞIU, profesor suplinitor de Geometria Analitică între 11/I 1868 şi 8/X 1871 la Facultatea de ştiinţe din Iaşi.

P. CAZANACLI.

Răspuns. Dela D-l Inginer inspector general VASILE ROŞIU, Directoru Serviciului Hidraulic, singurul fiu în viaţă al lui GHEORGHE I. ROŞIU, am obţinut următoarele date :

GHEORGHE ROŞIU s'a născut la 1839 în Horodniceni, din actualul Judeţ Fălticeni. In urma examenului din 6 Iulie 1859, a obţinut *«Atestatul Gimnazial»* No. 8572 din 9 August 1860, având la toate materiile menţiunea *«Eminentia»* iar la Limba franceză menţiunea *«Prima»*. Ministerul Instrucţiunii Publice şi al Cultelor i-a dat o bursă cu care a fost trimis la Torino, împreună cu alţi cinci români. Opinia publică de acolo a fost foarte mişcată de sosirea tinerilor români. In *Gazeta di Torino* s'a scris atunci :

«Au sosit în Turin 6 români . . . De când Traian conduse colonia romană în Dacia, relaţiunea între două popoare surori fură întrerupte. Azi se începe alianţa intelectuală între Italia şi România, care în curs de atâtea secole a opus la frontierele sale milioane de cadavre năvălitorilor otomani şi care chinuită când de Turci, când de Slavi, când de Nemţi, a păstrat în limbă numele marei origine latine, caracterul şi aspiraţiunile Italiei . . . »

Iar ziarul *Opinione* spunea între altele :

«Dacă Occidentul îşi ţinteşte ochii asupra României şi aşteaptă dela ea mult, apoi aceasta din urmă se uită spre Italia, iar Italia se uită la dânsa, şi cu vârful sabiei lui Marte, îi arată viitorul. Momentele sunt aproape când rasa latină se va elibera de jugul strein. Inteligenţa îi arată drumul, ea precedă mişcările ei, şi opiniunile merg totdeauna înaintea acţiunii».

GHEORGHE ROŞIU a urmat matematicile la Universitatea din Torino şi la 20 Decemvrie 1864 ia *«Diploma di Licenza in Matematiche pure»*, cu No. 896. El a urmat în anul 1863 şi *«Scuola di Applicazione per gli ingegneri»*.

Intors in ţară a fost numit profesor la Şcoala Fiilor de Militari din Iaşi, contribuind mult la formarea viitorilor ofiţeri. A mai făcut cursuri şi la Liceul naţional şi la Facultatea de Ştiinţe. A fost un bun autor de cărţi didactice pentru matematice. El este unul din întemeietorii *Revistei «Recreaţii Ştiinţifice»* din Iaşi, în anul 1883.

I. IONESCU.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 3571. *Să se demonstreze că în orice triunghiu avem relaţia:*

$$\cos 3B \cos(C - A) \sec^2 B - \cos 3C \cos(A - B) \sec^2 C =$$
$$2 \sin A \sin(B - C)(1 - 3 \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C).$$

GH. TH. GHEORGHIU.

Soluţie dată de D-l GH. M. CĂLIN. Pentru a stabili relaţia din enunţ plecăm dela relaţia:

$$\sin 3B \sin(C - A) \operatorname{cosec}^2 B + \sin 3C \sin(A - B) \operatorname{cosec}^2 C =$$
$$2 \sin A \sin(C - B)(1 - 3 \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C)$$

stabilită în problema 3460, (vol. XXXII, pag. 234), în care facem:

$$(1) \qquad B = 90^0 - B', \quad C = 90^0 - C', \quad A = 180^0 - A'.$$

Ţinând seamă de relaţiile ce există între liniile trigonometrice ale arcelor complimentare şi suplimentare, găsim tocmai relaţia din enunţ. Mai rămâne de arătat că unghiurile A', B' şi C' pot fi unghiurile unui triunghiu, adică suma lor fac 180^0. Ţinând seamă că unghiurile A, B şi C sunt unghiurile unui triunghiu, cu ajutorul lui (1) avem:

$$A' + B' + C' = 360^0 - (A + B + C) = 180^0.$$

Observaţie. D-nii: I. I. ROMAN, T. V. DIACONESCU, V. GR. DĂNCIULESCU, HR. DĂSCĂLESCU, M. I. FLOAREŞ, M. B. MARINAŞ, A. V. ROŞCULEŢ, GH. C. SPRINCEANĂ, I. N. VÂLCEANU, I. VASILIEV, A. C. GHEORGHIU, U. M. FLORESCU, I. O. ZAHARIA, N. PAVEL, I. Z. PANŢU, I. C. ISTINIE-BREZUICA, TH. G. COCEA, C. COŞNIŢĂ, N. N. MIHĂILEANU, D. IOVĂNESCU, GH. GH. VASILIU, T. G. BACIU, GR. I. GRUBENMANN, P. I. GHIŞOIU şi I. FOCA au dat soluţii analoage soluţiei dată problemei 3460.

GH. TH. GH.

PROBLEMA 3697. *Să se stabilească identitatea.*

$$\sum_{k=0}^{k=n} 2^{k+1} C_n^k \cos\left(2x + \frac{k\pi}{2}\right) \cos\left[x + \frac{(2n - 2k - 1)\pi}{4}\right]$$
$$= 3^n \cos\left[3x + \frac{(2n-1)\pi}{4}\right] + \cos\left[x + \frac{(2n+1)\pi}{4}\right].$$

VIRGIL COŞNIŢĂ.

Soluţiune dată de D-nii: CEZAR COŞNIŢĂ, GH. T. GHEORGHIU, M. MARGULIUS, EUGEN I. DUMITRESCU (Buzău), HRISTACHE DĂSCĂLESCU şi P. I. GHIŞOIU.

Observăm că avem

$$\cos\left(2x+\frac{1}{2}k\pi\right)\cos\left[x+\frac{(2n-2k-1)\pi}{4}\right]=\frac{1}{2}\left[\cos\left(3x+\frac{2n-1}{4}\pi\right)+\cos\left(x+\frac{4k-2n+1}{4}\pi\right)\right].$$

Deasemenea avem

$$\cos\left(x+\frac{4k-2n+1}{4}\pi\right)=\cos\left(x-\frac{2n-1}{4}\pi+k\pi\right)=(-1)^k\cos\left(x-\frac{2n-1}{4}\pi\right).$$

Faţă de acestea, prima parte a identităţei se poate scrie:

$$\sum_{k=0}^{k=n}2^k C_n^k\cos\left(3x+\frac{2n-1}{4}\pi\right)+\sum_{k=0}^{k=n}2^k(-1)^k C_n^k\cos\left(x-\frac{2n-1}{4}\pi\right) \quad (1)$$

Considerăm acum desvoltarea cunoscută

$$(1+x)^n=1+xC_n^1+x^2C_n^2+x^3C_n^3+\ldots+x^nC_n^n,$$

în care făcând succesiv $x=2$ şi $x=-2$, se obţin identităţile

$$1+2C_n^1+2^2C_n^2+\ldots+2^nC_n^n=3^n$$

$$1-2C_n^1+2^2C_n^2+\ldots+(-1)^n2^nC_n^n=(-1)^n.$$

Inlocuind în prima parte a identităţei pusă sub forma (1), după ce am dat lui k valori dela zero la n, avem succesiv

$$(1+2C_n^1+\ldots+2^nC_n^n)\cos\left(3x+\frac{2n-1}{4}\pi\right)+(1-2C_n^1+2^2C_n^2-\ldots+(-1)^n2^nC_n^n\cos\left(x-\frac{2n-1}{4}\pi\right)=3^n\cos\left(3x+\frac{2n-1}{4}\pi\right)$$

$$+(-1)^n\cos\left(x-\frac{2n-1}{4}\pi\right)=3^n\cos\left(3x+\frac{2n-1}{4}\pi\right)$$

$$+\cos\left[x-\frac{2n-1}{4}\pi+n\pi\right]=3^n\cos\left[3x+\frac{(2n-1)\pi}{4}\right]+\cos\left[x+\frac{(2n+1)\pi}{4}\right].$$

Identitatea din enunţ este astfel stabilită.

Observare. D-l GH. T. GHEORGHIU indică o identitate mai generală

$$\sum_{k=0}^{k=n} \alpha^n C_n^k \cos\left(2x + \frac{1}{2} k\pi\right) \cos\left(x + \frac{2n-2k-1}{4}\pi\right)$$

$$= (\alpha+1)^n \cos\left(3x + \frac{2n-1}{4}\pi\right) + (\alpha-1)^n \cos\left(x + \frac{2n+1}{4}\pi\right).$$

COL. G. I. L.

PROBLEMA 4140. *Să se arate că între elementele unui triunghiu avem relaţia*

$$a^2 \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C + b^2 \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A + c^2 \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B = 4r(R+r).$$

IOAN GH. POPA.

Soluţie :

Utilizând relaţiile

(1) $r = 4R\sin\tfrac{1}{2}A \sin\tfrac{1}{2}B \sin\tfrac{1}{2}C$; $r_a = 4R\sin\tfrac{1}{2}A \cos\tfrac{1}{2}B \cos\tfrac{1}{2}C$, etc...

sau

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B = \frac{r_b}{p}, \text{ etc.... şi } r_a r_b r_c = p^2 r;$$

ori

$$(2) \qquad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}, \text{ etc....}$$

ori

$$(3) \qquad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B = \frac{r}{p-b}, \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C = \frac{r}{p-c}, \text{ etc....}$$

se deduce respectiv

$$(1') \qquad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C = \frac{r}{r_a}, \text{ etc....}$$

$$(2') \qquad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C = \frac{p-a}{p}, \text{ etc....}$$

$$(3') \qquad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C = \frac{r^2}{(p-b)(p-c)}, \text{ etc....}$$

iar relaţia din enunţ devine sub forma

$$r\left(\frac{a^2}{r_a} + \frac{b^2}{r_b} + \frac{c^2}{r_c}\right) = 4r(R+r)$$

sau $$\frac{r}{s}[a^2(p-a)+b^2(p-b)+c^2(p-c)]=4r(R+r)$$

ori $$\frac{1}{p}\Sigma a^2(p-a)=4r(R+r)$$

a căror demonstrație se face ușor transformând partea întâia, fie folosindu-se relațiile

$$\Sigma a^2=2(p^2-r^2-4Rr) \quad \text{și} \quad \Sigma a^3=2p(p^2-3r^2-6Rr)$$

(G. M. XXIX. p. 112)

sau desvoltându-se și aranjând convenabil, se ajunge la relația

$$\frac{r}{s}[abc+4(p-a)(p-b)(p-c)]=4r(R+r)$$

ce se verifică lesne, ținând seama că $abc=4RS$, iar

$$(p-a)(p-b)(p-c)=\frac{s^2}{p}\cdot$$

Au rezolvat problema:

Domnii: EM. MEREUȚĂ, ȘT. E. OLTEANU, SUB-LT. TH. N. PANAITE, I. C. PAREPEANU, C. PÂRVULESCU, utilizând relațiile (1) și (1′).

Domnii: I. D. CÂRSTOIU, C. I. CHIRIAC, CEZAR IVĂNESCU, M. MĂNESCU, D. D. MAVRODIN, M. I. POPESCU-STĂNEȘTI, I. N. SAGER, folosind relațiile (2) și (2′).

Domnul V. I. GODEANU, folosind relațiile (3) și (3′).

Alte soluții s'au primit dela Domnii: N. ARTAKI-ACIK, M. LEONTE NEGREA și N. ZANE.

Domnul M. MARGULIUS a *stabilit* relația din enunț pornind dela relația $s=pr$, pusă sub forma $Rp+s=p(R+r)$ și utilizând relațiile

$$p+\frac{s}{R}=\Sigma a\cos^2\tfrac{1}{2}A \; ; \; \frac{r}{p}=\pi\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}A.$$

Deasemenea D-l HARALAMBIE IONESCU-BISS a *stabilit* relația din enunț utilizând relațiile

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}$$

și $$S=2R^2\sin A\sin B\sin C \; ; \; 4\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C=\frac{p}{R}\cdot$$

In ultimul timp s'a primit o soluție de la D-l V. F. CEAUȘESCU (Lic. Militar Iași).

COL. G. I. LIT.

PROBLEMA 4160. *Se ştie că recordul internaţional de lansare cu paraşuta a fost bătut în America de Românca* SMARANDA BRĂESCU *asvârlindu-se dela 7315 m (24.000 picioare).*

Se cere să se calculeze timpul de cădere până la sol, ştiind că viteza de cădere a unei paraşute variază invers proporţional cu rădăcina pătrată a densităţii aerului. Se va admite că la sol viteza de cădere e 5m/sec (condiţia cerută în caietele de sarcini este 5,5 m/sec. la nivelul mării), iar densitatea aerului în funcţie de altitudine e dată de formula:

$$\delta = (1 - 0{,}0000226 \cdot z)$$

din condiţiile „atmosferei standard" z fiind altitudinea. Se va neglija timpul iniţial de cădere până la deschiderea paraşutei (circa 3").

MAIOR I. LINTEŞ.

Punem în general $\delta = 1 - az$.

$$\text{Viteza} = \frac{dz}{dt} = -\frac{k}{\sqrt{1 - az}}$$

am pus minus în membrul al doilea, din cauză că dz e negativ

$$-kdt = \sqrt{1 - az} \cdot dz.$$

Prin integraţiune:

$$-kt_1 = \int_{z_1}^{0} \sqrt{1 - az} \cdot dz$$

sau:

$$-kt_1 = \int_{z_1}^{0} \frac{1 - az}{\sqrt{1 - az}} \cdot dz = \int_{z_1}^{0} \frac{dz}{\sqrt{1 - az}} - a \int_{z_1}^{0} \frac{zdz}{\sqrt{1 - az}}.$$

Dar:

$$\int_{z_1}^{0} \frac{dz}{\sqrt{1 - az}} = -\frac{2}{a} \left\{ \sqrt{1 - az} \right\}_{z_1}^{0}$$

$$\int_{z_1}^{0} \frac{z \cdot dz}{\sqrt{1 - az}} = -\left\{ z \cdot \frac{2}{a} \sqrt{1 - az} \right\}_{z_1}^{0} + \frac{2}{a} \int_{z_1}^{0} \sqrt{1 - az} \cdot dz.$$

Insemnând cu I integrala noastră, avem :

$$-kt_1 = I = -\frac{2}{a}\left\{\sqrt{1-az}\right\}_{z_1}^{0} + \left\{2z\,.\,\sqrt{1-az}\right\}_{z_1}^{0} - 2I$$

$$I = \frac{2}{3a}\left\{\sqrt{1-az}\,(az-1)\right\}_{z_1}^{0}\cdot$$

(1) $$\boxed{t_1 = \frac{2}{3ak}\left\{\sqrt{1-az}\,(az-1)\right\}_{0}^{z_1}}$$

$$t_1 = \frac{2}{3ak}\left\{-\sqrt{1-az_1}\,(1-az_1)+1\right\}$$

$$t_1 = \frac{2}{3ak}\cdot\left[1-(1-az_1)\,.\,\sqrt{1-az_1}\right]\cdot$$

In cazul nostru $k = 5^{m}/_{sec}$; $a = 0{,}0000226$ $z_1 = 7315$m.

$$t_1 = \frac{2\times 10000000}{3\times 5\times 226}\left[1-\left(1-\frac{7315\times 226}{10000000}\right)\sqrt{1-\frac{7315\times 226}{10000000}}\right]$$

$$\begin{cases} t_1 = 1404 \text{ secunde} \\ t_1 = 23 \text{ minute şi } 24 \text{ secunde.} \end{cases}$$

IANCU N. SAGER
Prof. de Matematică.

Notă. In publicarea enunţului problemei s'a strecurat o eroare, căci după „atmosfera standard" avem :

$$\vartheta = (1-0{,}0000226)^{4{,}255}.$$

In aceste condiţiuni :

$$t = \frac{1}{5}\int_0^z (1-0{,}0000226\,.\,z)^{2{,}1275}\,.\,dz$$

$$= \frac{1-(0{,}08368)^{3{,}1275}}{0.0003533}\,.$$

Adică :

$$t = 20'6''.$$

MAIOR I. LINTEŞ.

PROBLEMA 4216. *Un tetraedru este echifacial dacă cercurile circumscrise, sau cercurile înscrise feţelor sunt egale.*

V. THÉBAULT.

Soluţie dată de D-l N. N. MIHĂILEANU (st. Bucureşti). Vom desface tetraedru, fie aceasta ABC, iar A', B', C' poziţiile rabătute ale celui de al patrulea vârf [AB' = AC' ; BC' = BA' ; CB' = CA'].

1°. Trebue să construim vârfurile A', B', C' astfel ca cercurile ABC, BCA', ... să fie egale sau, ceeace e tot una, să înscriem în cercurile CARNOT, simetricele cercului circumscris faţă de latură, triunghiurile BCA', CAB', BAC' satisfăcând condiţiunei AB' = AC',...

O soluţie este evident dată de vârfurile triunghiului *complimentar*. Alta nu mai există, căci fie $A_1B_1C_1$ această poziţie. Luând:

$$AB' = AC' < AB_1 = AC_1$$

avem

$$BA' > BA_1 \text{ şi } CA' > CA_1,$$

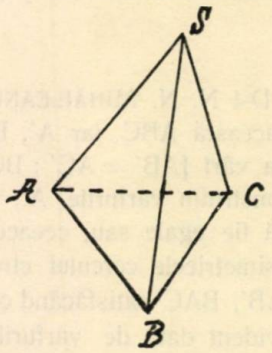
ca atare punctele A'' şi A''' obţinute luând în jurul lui A_1 pe cercul CARNOT relativ la BC, BA'' = BA', CA''' = CA' se află între A_1 şi C, A_1 şi B şi nu pot coincide.

Invers când se ia AB' = AC' > $AB_1 = AC_1$. Deci o singură soluţie, dată de vârfurile triunghiului complimentar. Mai există o soluţie limită, improprie, dată de ortocentru H al triunghiului

$$ABC\ [A' = B' = C' = H].$$

2°. Dacă se consideră cercul înscris triunghiului ABC, se vede de asemenea că o soluţie este dată de vârfurile triunghiului *anticomplimentar* care corespunde unui tetraedru echifacial şi altă soluţie nu mai e. Dacă se ia în mod arbitrar I_a un cerc tangent laturei BC egal cu cercul înscris, deşi poate avea o infinitate de astfel de poziţii, soluţia însă e restrânsă de două condiţii: dacă A' este intersecţia tangentelor din B şi C la cercul arbitrar I_a C', trebue să se afle pe cercul (B, BA') astfel ca cercul I_c înscris în triunghiul AC'B să fie egal cu I_a şi apoi luând B' la intersecţia cercurilor (A, AC'), (C, CA') cercul înscris triunghiului CAB' trebuie să fie egal cu I_a ceeace e în general incompatibil cu situaţia lui. Rămâne deci o singură soluţie.

Observaţie. Problema se mai poate soluţiona astfel:
Fie SABC un tetraedru



şi să presupunem problema rezolvată, adică fiecare din feţe este inscrisă într'un cerc de rază R.

Avem:

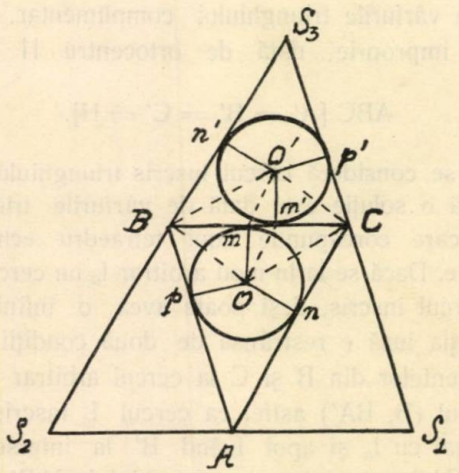
$$\sphericalangle SBC = \sphericalangle SAC \; ; \; \sphericalangle SBA = \sphericalangle SCA \; ; \; \sphericalangle ABC = \sphericalangle ASC$$

adică:

$$\sphericalangle SBC + \sphericalangle SBA + \sphericalangle ABC = 180^0.$$

Acelaşi rezultat îl găsim pentru oricare din vârfurile tetraedrului, de unde putem trage concluzia că:

Dacă feţele unui tetraedru sunt înscrise în cercuri egale, atunci suma unghiurilor din jurul unui vârf este egală cu 180°.



Rabătând acum în planul feţei ABC, feţele SAB, SBC, ... ale unui astfel de tetraedru, conform propoziţiunii de mai sus trebue ca: S_1AS_2, S_2BS_3 şi S_3CS_1 să fie în linie dreaptă.

Mai observăm că :

$$\sphericalangle ASB = \sphericalangle ACB \; ; \; \sphericalangle BSC = \sphericalangle BAC \; ; \; \sphericalangle CSA = \sphericalangle ABC$$

deci în figura rabătută triunghiurile $S_1S_2S_3$ şi ABC sunt asemenea.

($S_1S_2S_3$ este un triunghiu căci şi $\sphericalangle ASB + \sphericalangle BSC + \sphericalangle CSA = 180^0$).

Rezultă :

$$S_1S_2 \parallel BC \; ; \; S_2S_3 \parallel AC \; ; \; S_1S_3 \parallel AB.$$

Ori în asemenea condiţiuni ştim că $S_1S_2S_3$ este triunghiul complimentar şi că toate feţele :

$$ABC \; ; \; S_1AC \; ; \; S_2AB \text{ şi } S_3CB$$

sunt egale. Mai mult şi condiţiunile problemei :

$$S_1A = S_2A \; ; \; S_2B = S_3B \; ; \; S_1C = S_3C$$

sunt îndeplinite. c. c. t. d.

Altă soluţie.

Presupunem ca şi mai sus că feţele tetraedrului SABC sunt înscrise în cercuri egale şi să arătăm că şi feţele sunt egale. Vom arăta acest lucru direct pe tetraedru fără a mai fi nevoie de rabateri. Să arătăm — de exemplu că feţele BSC şi BAC sunt egale. Avem BC, latură comună, apoi $\sphericalangle BSC = \sphericalangle BAC$ şi atunci în aceste două triunghiuri mai putem scrie :

$$\sphericalangle SBC + \sphericalangle SCB = \sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB. \qquad (I)$$

In jurul vârfurilor B şi C avem respectiv :

$$\sphericalangle SBA + \sphericalangle SBC + \sphericalangle ABC = 180^0$$

$$\sphericalangle SCB + \sphericalangle SCA + \sphericalangle ACB = 180^0.$$

Cum însă :

$$\sphericalangle SCA + \sphericalangle SBA$$

putem scrie :

$$\sphericalangle SBC + \sphericalangle ABC = \sphericalangle SCB + \sphericalangle ACB. \qquad (II)$$

Adunând (I) cu (II) găsim :

$$2 \sphericalangle SBC = 2 \sphericalangle ACB.$$

Feţele BSC şi BAC sunt deci egale şi la fel putem arăta că orice faţă este egală cu o alta. c. c. t. d.

Pentru cercul înscris, procedând la fel, adică presupunând problema rezolvată, se dovedeşte uşor că dacă cercurile înscrise sunt egale şi feţele sunt egale.

Reamintim. Fie feţele CAB şi S_3CB, cari au înscrise câte un cerc egal, de rază r. In triunghiul ABC fie : m, n şi p punctele de contact cu laturile BC, CA şi AB iar m', n', p' punctele de contact cu laturile CB, BS_3, S_3C ale triunghiului S_3CB. Insemnăm cu O şi O' centrele celor două cercuri. Figura Om O'm' este un paralelogram. Atunci OO' taie pe BC la mijloc de unde

rezultă $mB = m'C$ ceeace antrenează: $Bp = Cp'$ şi cum şi figura BOCO' este un paralelogram rezultă încă $Bp \parallel Cp'$. La fel se arată că $Cn \parallel Bn'$ şi atunci rezultă:

$$CA = \parallel BS_3 \text{ şi } AB = \parallel CS_3,$$

adică cele două feţe sunt egale.

LT. C-DOR GH. N.

PROBLEMA 4334. *Se dă triunghiul* ABC *înscris în cercul* O *şi pe laturile* AB *şi* AC *se iau respectiv punctele* M *şi* N *de natură a avea:*

$$AB : AM = AC : AN = m : n.$$

Pe dreapta MN *se ia punctul* P *astfel ca să avem.*

$$MN : MP = m : n.$$

Se cere locul geometric al lui P *când* BC *e fixă iar* A *descrie cercul* O.

I. I. PETRESCU.

Soluţia I-a dată de D-l VINTILĂ GRIGORESCU.

Dreapta MN fiind paralelă la BC prin construcţie putem scrie:

$$\frac{MN}{BC} = \frac{n}{m} = \text{const}$$

de unde rezultă că şi MN = const. căci BC este dată fixă. Sprijinindu-ne tot pe enunţ mai deducem:

$$PN = \text{const. şi } PM = \text{const.}$$

Ducând deci din P paralele la AB şi AC, punctele P_1 şi P_2 unde aceste paralele taie pe BC vor fi nişte puncte fixe oricare ar fi poziţia lui A pe cerc. Observăm acum că unghiul P_1PP_2 este totdeauna egal cu unghiul A, aceste unghiuri având laturile paralele şi cum $\sphericalangle$ A este constant şi $\sphericalangle$ P_1PP_2 este constant.

Se deduce de aci locul geometric al lui P, care este un cerc ce trece prin punctele fixe P_1 şi P_2, capabil de unghiul dat BAC.

Să aflăm raza cercului loc geometric, pe care s'o notăm cu R_p.

Avem:

$$R_p = \frac{P_1P_2}{2\sin A} = \frac{BC - MN}{2\sin A} = \frac{BC - BC\frac{n}{m}}{2\sin A}$$

$$R_p = \frac{BC}{2\sin A}\left(1 - \frac{n}{m}\right) = R\left(1 - \frac{n}{m}\right)$$

însemnând ca de obicei cu R, raza cercului circumscris triunghiului ABC.

Discuție. Când $\frac{n}{m} = 1$, adică M se confundă cu B, avem $R_p = 0$; iar P_1 și P_2 se confundă în C.

Când $\frac{n}{m} = 0$, adică M se confundă cu A, avem $R_p = R$ și P_1 și P_2 se confundă cu B și C.

Când $0 < \frac{n}{m} < 1$, adică când M este între A și B, R_p este pozitiv și mai mic decât R, iar P_1 și P_2 se găsesc între B și C.

Pentru $\frac{n}{m} < 0$, R_p este mai mare ca R, iar P_1 și P_2 sunt intercalați de segmentul BC.

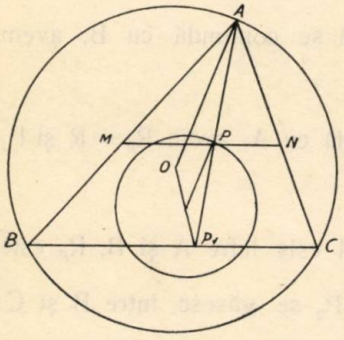
Pentru $\frac{n}{m} > 1$, R_p devine negativ, adică centrul cercului loc geometric este în afara triunghiului ABC ; P_1 și P_2 sunt în afara și de aceeași parte a segmentului BC.

Au dat această soluție, fără a da valoarea lui R_p și fără a o completa cu discuția D-nii: P. DOBRESCU (cl. VI); M. MĂNAC și M. NĂSTASE (cl. V), toți elevi ai Lic. militar „N. Filipescu"; PANAIT C. MAZILU (Anul prep. Școala Politehnică Buc.) și I. ȘABAC (cl. VI Lic. militar „N. Filipescu").

Observații. 1°. Unghiul COB este dublul unghiului CAB. La fel $\sphericalangle P_1O_pP_2$ este dublul unghiului P_1PP_2. (Am însemnat cu O_p, centrul cercului loc geometric). Cum avem $\sphericalangle CAB = \sphericalangle P_1PP_2$ vom avea și $\sphericalangle COB = \sphericalangle P_1O_pP_2$. Deducem: $CO \parallel P_2O_p$ și $BO \parallel P_1O_p$. Cu alte cuvinte paralelele duse din P_1 și P_2 respectiv la BO și CO se'ntâlnesc în O_p. După ce am găsit centrul pentru a afla și valoarea razei R_p, considerăm aceleași triunghiuri asemenea: BOC și $P_1O_pP_2$ în cari laturile BO și P_1O_p joacă respectiv rolul de R și R_p. Raportul lor va fi același cu raportul $BC : P_1P_2$, care s'a calculat și găsit egal cu: $1 - \frac{n}{m}$.

2°. Când $\frac{n}{m} = \frac{1}{2}$, P va fi la mijlocul lui MN şi deci P_1 şi P_2 respectiv egal depărtaţi de B şi C. Centrele O_p şi O se vor găsi pe perpendiculara ridicată de pe mijlocul lui BC. Raportul mediatoarelor va fi acelaşi: $1 - \frac{n}{m}$. Triunghiul P_1OP_2 devine un triunghiu isoscel.

Soluţia II-a dată de D-nii: D. I. LEBĂDĂ (cl. VI Lic. Militar Iaşi); D. D. MEHEDINŢI (Lic. Militar Tg.-Mureş) şi VILHELM CSEKE (st. mat. Cluj).



Urmărind figura să'nsemnăm cu P_1 punctul unde AP taie pe BC. Cum MN este paralelă prin construcţie la BC vom avea:

$$BC : BP_1 = MN : MP = m : n.$$

Dar BC este constantă, rezultă că şi BP_1 este constant deci P_1 este un punct fix pe BC, oricare ar fi poziţia lui A pe cercul O.

Din asemănarea triunghiurilor ABP_1 şi AMP scoatem:

$$AB : AM = AP_1 : AP = m : n. \qquad (1)$$

Construim triunghiul AOP_1 în care OP_1 este fixă iar AO constantă şi egală cu raza R a cercului dat O. Paralela dusă din P la AO taie pe OP_1 în ω.

Ţinând seamă de (1), în triunghiurile asemenea AOP_1 şi $P\omega P_1$ putem scrie:

$$\frac{m}{n} = \frac{AP_1}{AP} = \frac{OP_1}{O\omega} = \frac{R}{R - \omega P}.$$

Egalitatea acestor rapoarte ne arată pe de-oparte că ω este un punct fix pe OP_1, iar pe de alta că ωP este o cantitate constantă.

Locul lui P rezultă. Idem valoarea lui $R_p = \omega P$.

Au dat această soluţie, fără a găsi poziţia lui ω şi fără a da valoarea lui R_p — deci fără a mai construi triunghiul AOP_1, afirmând numai că locul lui P este un cerc omotetic cu cercul O, D-nii: CONST. N. GAVRILESCU; GH. I. HARBUZ (cl. VI); I. V. MIHALACHE, toţi dela Lic. militar Iaşi; O. P. PETRESCU (Lic. internat Iaşi) şi GH. RUSU (Lic. militar Iaşi). Soluţia II-a a fost lipsită de orice discuţie.

Observaţii. Ţinând seamă de soluţia I-a cât şi de observaţiile acelei soluţiuni deducem:

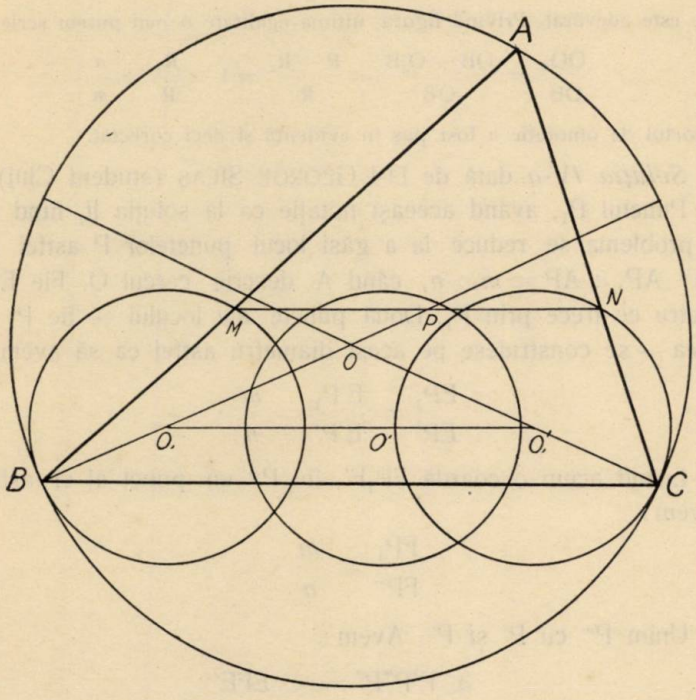
1°. Paralela dusă din P la AB şi cu paralela dusă din ω la OB se taie în acelaş punct pe BC pe unde trece şi cercul ω. Idem pentru paralelele duse din P şi ω respectiv la AC şi OC.

2°. Paralela dusă din N la AB va intersecta pe BC în P_1.

3°. Fie K şi L punctele unde P_1B şi P_1C taie cercul ω. Avem:

$$P_1K : P_1L = P_1B : P_1C = n : (m - n).$$

Soluţia III-a dată de D-l SUB.-LT. CONST. N. AVRAM (Ecole d'Application du Génie, Versailles).



Punctul M fiind omoteticul lui A în raport cu B (raportul de omotetie fiind $1 - \frac{n}{m}$), când A descrie cercul O de rază R, M va descrie cercul O_1 de rază $R_1 = R\left(1 - \frac{n}{m}\right)$, tangent cercului O în B. La fel punctul N descrie cercul O'_1 de rază $R_1 = R\left(1 = \frac{n}{m}\right)$, tangent

cercului O în C. Se observă cu uşurinţă că $O_1O'_1$ este paralelă cu BC şi atunci va fi şi cu MN. Se mai arată că $MN = O_1O_1'$, apoi că $MP = \text{const}$. Deci când M descrie cercul O_1, P va descrie cercul O' de aceeaşi rază şi cu centrul situat pe $O_1O'_1$ încât:

$$O_1O'_1 : O_1O' = m : n.$$

Observaţie: D-l SUB.-LT. C. AVRAM, în soluţia D-sale găseşte că raportul de omotetie este $\frac{n}{m}$. Ori tot D-sa, în soluţie, scrie:

$$O_1O'_1 : BC = OO_1 : OB = n : m$$

ceeace este adevărat. Privind figura, ultima egalitate o mai putem scrie:

$$\frac{OO_1}{OB} = \frac{OB - O_1B}{OB} = \frac{R - R_1}{R} = 1 - \frac{R_1}{R} = \frac{n}{m}$$

şi raportul de omotetie a fost pus în evidenţă şi deci corectat.

Soluţia IV-a dată de D-l GEORGE SILAŞ (student Cluj).

Punctul P_1, având aceeaşi notaţie ca la soluţia II, fiind fix pe BC, problema se reduce la a găsi locul punctelor P astfel ca să avem: $AP_1 : AP = m : n$, când A descrie cercul O. Fie EE' un diametru ce trece prin P_1. Două puncte ale locului — fie P' şi P'' acestea — se construiesc pe acest diametru astfel ca să avem:

$$\frac{EP_1}{EP'} = \frac{E'P_1}{E'P''} = \frac{m}{n}. \qquad (1)$$

Luând acum o coardă FP_1F', fie P''' un punct al ei astfel ca să avem:

$$\frac{FP_1}{FP'''} = \frac{m}{n}. \qquad (2)$$

Unim P''' cu P' şi P''. Avem:

$$\sphericalangle P'P'''P'' = \sphericalangle EFE'$$

căci au laturile paralele cum indică relaţiile (1) şi (2). Dar cum $\sphericalangle EFE' = 90^0$, locul lui P''', care este locul cerut, e cercul descris pe P'P'' ca diametru.

Notă. Dela D-nii EM. MEREUŢĂ (student Buc.) şi SUB.-LT. A. BĂDESCU (Ecole d'Application d'Artilerie, Fontainebleau) s'a primit câte o soluţie analitică, iar dela un corespondent o soluţie greşită.

LT. C-DOR GH. N.

PROBLEMA 4371. *Să se arate că nu există nici un patrat perfect care să fie scris numai cu cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6 luate câte o singură dată. Se mai pot găsi alte grupe de şase cifre consecutive care să conducă la aceeaşi imposibilitate?*

I. IONESCU.

Un patrat perfect nu poate conţine factori primi decât la puteri perechi, deci nu poate fi divizibil prin 3 fără a fi şi prin 9. Apoi un număr nu-şi schimbă divizibilitatea prin 3 sau 9, oricare ar fi ordinea cifrelor lui, căci această divizibilitate depinde numai de suma cifrelor. Insă $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 = \mathfrak{M}3 \neq \mathfrak{M}9$. Deci nu există patrat perfect scris cu primele şase cifre semnificative, oricare ar fi ordinea acelor şase cifre.

Grupele de şase cifre consecutive care mai sunt posibile, sunt: 012345, 234567, 345678, 456789. Suma cifrelor lor este respectiv 15, 27, 33, 39. Numai $27 = \mathfrak{M}9$. Deci numai cu grupa de cifre 2, 3, 4, 5, 6, 7 am putea avea patrate perfecte. Dintre aceste cifre numai 4, 5, 6 pot termina patrate. Rădăcina trebue să fie $\mathfrak{M}3$, terminată cu 2, 8, 4, 6, 5. Deci suma primelor două cifre s şi z ale rădăcinii nu ar putea fi decât $\mathfrak{M}3 - 2$ dacă ultima cifră u este 2, 5 sau 8; $\mathfrak{M}3 - 1$ dacă este 4 şi $\mathfrak{M}3$ dacă este 6.

Cele mai mari şi mai mici numere ce se pot forma cu cifrele 2, 3, 4, 5, 6, 7 fiind 765432 şi 234567, rădăcina căutată nu poate fi coprinsă decât între rădăcinile acestora, adică între 484 şi 875. In aceste condiţiuni singurele soluţiuni posibile ar trebui căutate printre următoarele 62 de numere:

$u = 2, 5, 8$. $sz = 49, 52, 55, 58, 61, 64, 67, 70, 73, 76, 82, 85.$

$u = 4.$ $\quad sz = 50, 53, 56, 59, 62, 65, 68, 71, 74, 77, 80, 83, 86.$

$u = 6.$ $\quad sz = 48, 51, 54, 57, 60, 63, 66, 69, 72, 75, 78, 81, 84.$

Ridicăm acum la patrat numerele szu şi eliminăm pe cele ce vădit au la patrat cifrele 0, 1, 8, 9 şi pe cele ce au de două ori o aceeaşi cifră. Mai rămân de cercetat 33 numere, ale căror patrate se găsesc uşor în tabele de patrate. Nici unul din ele nu sunt alcătuite numai din cifrele 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Conchidem dar: *Nu există patrate de şase cifre care să fie scrise numai cu cifre diferite consecutive.*

PANAIT C. MAZILU.

EXERCIŢII

23. Dacă x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinele ecuaţiei: $x^3 + px + q = 0$ să se demonstreze că:

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{\sqrt{x_1^2 x_2^2 + x_2^2 x_3^2 + x_3^2 x_1^2}} = \text{const.}$$

GH. VASILIU.

R. Scriind primele două relaţiuni dintre coeficienţii şi rădăcinele ecuaţiei date:

$$(1)\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad \text{şi} \quad (2)\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = p$$

şi ridicând pe (1) la patrat ţinând seama de (2) apoi ridicând pe (2) la patrat ţinând seama de (1) găsim valoarea fracţiei egală cu 2.

PROBLEME PROPUSE

4403. Se cere patratul *abcdef* ştiind că *cabfde* e tot pătrat.

V. THÉBAULT.

4404. Să se găsească numerele de două sau trei cifre, astfel încât răsturnatele pătratelor lor să fie egale cu pătratele răsturnatelor. Să se generalizeze.

MIRON NICULESCU.

4405. Fie $\varphi_1(N)$ indicatorul lui N, $\varphi_2(N)$ indicatorul lui $\varphi_1(N)$, ... şi în general $\varphi_i(N)$ indicatorul de ordinul i al lui N. Să se arate, că dacă

$$\varphi_8(N) < 100,$$

$\varphi_{11}(N)$ este sau nul sau o putere a lui 2.

T. POPOVICIU.

4406. Fie ABCD un patrulater circumscris cercului cu centrul în O şi A', B', C', D' puncte situate pe EF, a treia diagonală a patrulaterului, astfel ca AA', BB', CC', DD' să fie văzute din O sub unghiuri drepte.

Două diagonale ale patrulaterului, format din dreptele pe care se află aceste segmente, trec prin punctele E, F.

C. IONESCU-BUJOR.

4407. Se dau trei triunghiuri oarecare $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$. Centrele de greutate ale acestor triunghiuri formează un triunghiu al cărui centru de greutate este centrul greutate al triunghiului format de centrele de greutate ale triunghiurilor $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$.

AL. A. ROȘU.

4408. Paralelele duse prin vârfurile B, C, ale triunghiului ABC, la bisectoarea interioară a unghiului A intersectează respectiv laturile CA, BA în punctele B_a, C_a. Axul radical al cercurilor ABC, AB_aC_a intersectează pe BC în punctul A_1. Analog se obțin punctele B_1, C_1.

Să se arate că punctele A_1, B_1, C_1 sunt în linie dreaptă.

THEODOR G. COCEA.

4409. Se consideră trei cercuri O_1, O_2, O_3 în acelaș plan. Cercurile O_1 și O_2 se întâlnesc în punctele A și B, iar cercurile O_2 și O_3 se întâlnesc în punctele C și D.

Dreapta AD întâlnește din nou cercul O_1 în A' și cercul O_3 în D', iar dreapta BC întâlnește din nou cercul O_1 în B' și cercul O_3 în C'. Să se arate că:

1°. Patrulaterul A'B'C'D' este înscris într'un cerc O_4.

2°. Centrele cercurilor O_1, O_2, O_3, O_4 formează un paralelogram.

N. BOTEA.

4410. Se consideră ecuația:

$$x^2 + \alpha x + 1 = 0 \tag{1}$$

și se notează cu: $P_n = x_1^n + x_2^n$, x_1 și x_2 fiind rădăcinile ecuației (1).

1. Să se studieze natura rădăcinilor acestei ecuații.

2. Folosind faptul că x_1 și x_2 sunt rădăcinile ecuației (1) să se arate că avem

$$P_{n+1} + \alpha P_n + P_{n-1} = 0. \tag{2}$$

3. Să se calculeze cu ajutorul relației (2) expresia:

$$E = P_4 + aP_3 + bP_2 + cP_1 + dP_0.$$

4. Presupunând că: $4a = c$ și $d = b - \frac{1}{2}$, să se găsească valorile lui α pentru cari: $E = 0$.

5. Să se demonstreze formula:

$$P_0 + P_1 + P_2 + \ldots + P_n = 1 - \frac{\alpha+1}{\alpha+2} P_{n+1} - \frac{1}{\alpha+2} P_{n+2}.$$

Ce devine această formulă pentru $\alpha = -2$?

GH. TH. GHEORGHIU

4411. Să se calculeze sumele:

$$E_1 = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(\alpha + 2h) + \operatorname{tg}(\alpha + 3h) + \ldots + \operatorname{tg}(\alpha + nh)$$

$$E_2 = \operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}(\alpha + 2h) + \operatorname{cotg}(\alpha + 3h) + \ldots + \operatorname{cotg}(\alpha + nh).$$

GH. VASILIU.

4412. Pentru ce arc diferența a două linii trigonometrice ale lui poate fi 2.

ION IONESCU.

4413. Să se construiască exact un triunghiu dreptunghiu având o ipotenuză dată și știind că o catetă este medie aritmetică a celorlalte două laturi ale triunghiului.

Aceeași problemă, pentru cazul când cateta este medie geometrică a celorlalte două laturi.

O. N. ȚINO.

4414. Să se studieze natura seriei

$$S = \Sigma \frac{x^n y^n (y^{n+1} - x^{n+1})}{(x^n + y^n)(x^{n+1} + y^{n+1})(x^{n+2} + y^{n+2})}$$

și să i se afle suma în caz de convergență.

M. GHERMĂNESCU.

TABLA DE MATERII

A. ARTICOLE

Aritmetica

		Pag.
Ioan B. Florescu	Asupra rezolvării în numere întregi a unei ecuaţii omogene de gradul II cu n necunoscute . .	167
V. Thébault	Curiosités arithmétiques	204
Miron Nicolescu	Despre şirul lui Fibonacci	299

Algebra

Th. Angheluţă	Ecuaţiile algebrice a căror rădăcini au acelaş modul	484

Geometria

V Thébault	Sur les points de Feuerbach	41
V. Thébault	Sur le tétraèdre trirectangle	86
Marius Margulius	Două teoreme de geometrie	90
R. Goormaghtigh	Sur une transformation géométrique	121
V. Thébault	Sur l'isopôle d'une droite par rapport à un triangle	248
D. V. Ionescu	Centrul de greutate la triunghiu şi tetraedru .	251
V. Thébault	Sur le cercle des neuf points du triangle . . .	339
Alexandru Niculescu	Asupra câtorva teoreme din Geometria triunghiului	343
I. Nicolau-Dobridor	Generalizarea unei probleme de concurs . . .	345
Col. Gh. Buicliu	Soluţia geometrică a problemei 2699 din Mathesis	393
V. Thébault	Géométrie du tétraèdre	434
N. N. Mihăileanu	Asupra cubicei lui Darboux	438
V. Thébault	Relations d'aires dans le triangle	481

Trigonometrie

N. N. Mihăileanu	Relaţii trigonometrice într'un triunghiu în legătură cu punctele lui Feuerbach 123,	295

Mecanică

		Pag.
Maior I. Linteş	Asupra repartiţiei eforturilor în suprafaţă . . .	207

Istoria matematicilor

I. Ionescu	Cărţi vechi de matematică 44, 163, 201,	386

Diverse

I. Ionescu	Congresul matematicienilor greci	16
G. Ţiţeica	Paul Painlevé	161
I. Ionescu	Vasile Cristescu 241,	289
I. Ionescu	Congresul interbalcanic al matematicianlor . .	385

Chestiuni referitoare la Societatea „Gazeta Matematică"

***	Lista membrilor Societăţii „Gazeta Matematică"	5
***	Membri decedaţi	15
Al. Bunescu, Col. Gh. Buicliu şi C. Orăşanu	Concursul „Gazetei Matematice"	17
Ioan Buşilă, Gh. Iliescu	Premiile şi alte dispoziţiuni ale fondurilor „Gazetei Matematice" pentru cursul anului 1933-1934	19
Col. Gh. Buicliu, Ing. C. Orăşeanu şi Col. G. Potopeanu	Raportul comisiunii pentru acordarea premiului „General Sc. Panaitescu" pe anul 1932-1933	47
Delegaţia Societăţii	Localul Societăţii „Gazeta Matematică"	81
Delegaţia Societăţii	Premiul „Vasile Conta"	93
N. Botea, Col. Gh. Buicliu şi Al. A. Roşu	Premiul „Inginer Al. Roşu"	128
Delegaţia Societăţii	Concursul „Gazetei Matematice"	208
N. Botea, Al. A. Roşu, O. Ţino	Premiul „Inginer Al. Roşu"	257
N. Botea, Col. Liteanu şi Lt. C-dor Gh. Niculescu	Acordarea premiului „V. Cristescu"	257
G. Ţiţeica	Rezultatul Concursului „Gazetei Matematice" din anul 1934	337
Col. Gh. Buicliu, Al. D. Bunescu şi I. Buşilă	Premiile „Gazetei Matematice" pentru concursul ţinut în Aprilie 1934	433

B. NOTE MATEMATICE

1. *I. I.*	Asupra problemei 3872	22
2. *I. I.*	Asupra problemei 4231	22
3. *I. B. F.*	Asupra problemelor 4072 şi 4141	23
4. *V. Thébault*	Triangle bordé de carrés	48
5. *Maior I. Linteş*	Viteza maximă pe care o poate atinge un avion cu elice	49

		Pag.
6. *M. G.*	Asupra problemei 4116	51
7. *I. I.*	Asupra problemei 4217	52
8. *I. I.*	Valoarea lui π după Biblie	52
9. *V. Thébault*	Curiosités arithmétiques	93
10. *I. Ionescu*	Nomenclatura matematică	94
11. *D. B.*	Caracterizarea proiectivă a podarei	94
12. *I. I.*	Unităţi aritmetice	129
13. *I. I.*	O lună de zile	130
14. *I. I.*	Primii licenţiaţi în matematici dela Facultăţile de Ştiinţe din România	130
15. *Col. Gh. Buicliu*	Reciprocitatea unor relaţiuni	131
16. *Gh. Th. Gheorghiu*	Asupra problemei 3490	132
17. *Maria Neumann*	Asupra problemei 4217	133
18. *Maior I. Linteş*	Instabilitatea la torsiune a aripilor libere a unui avion	133
19. *Maior I. Linteş*	Asupra influenţei vibraţiunilor	135
20. *Col. Gh. Buicliu*	O chestiune de prioritate şi o soluţie aritmetică a problemei 4221	171
21. *M. Mănescu*	Curiozităţi aritmetice	173
22. *I. I.*	Asupra unei chestiuni reprodusă de Mathesis	210
23. *I. Ionescu*	Cuadratura cercului	210
24. *Căp. Gh. Nicolescu*	O geometrie românească de acum 80 ani	212
25. *Gh. D. Simionescu*	Asupra problemei 4229	213
26. *Marius Margulius*	O problemă de geometrie	214
27. *Maria Neumann*	Asupra problemei 4204	214
28. *V. Thébault*	Sur une propriété relative aux nombres entiers consécutifs	258
29. *I. Ionescu*	O veche Societate matematică	258
30. *I. Ionescu*	Cuadratura cercului	259
31. *Cezar Coşniţă*	Asupra problemei 2773	261
32. *Al. A. R.*	Asupra exerciţiului 55 Vol. XXXVI	261
33. *Maior I. Linteş*	Deformaţiunea traectoriei unui proectil, datorită formelor solului peste care trece	262
34. *V. Thébault*	Sur les nombres de Pythagore	303
35. ***	Comunicare a Societăţii Matematice din Grecia	304
36. *I. Ionescu*	Cuadratura cercului	304
37. *Col. Gh. Buicliu*	Numere divizibile prin suma cifrelor lor	306
38. *I. I.*	Asupra problemei 4284	348
39. *Col. G. I. L.*	Asupra unor exerciţii	348
40. *M. G.*	Asupra problemei 4133	349
41. *Tiberiu Popoviciu*	Asupra unei probleme din „Culegere de Probleme de Algebră“	351
42. *I. B. Florescu*	Asupra notei 17 (G. M. Vol. XXXVI pag. 134)	353
43. *Ioan Gh. Popa*	Câteva relaţiuni între elementele triunghiului	354

			Pag.
44.	*Maior I. Linteş*	Deformaţia traectoriei unui proectil, sub acţiunea unui vânt lateral.	355
45.	*Maior I. Linteş*	Determinarea încărcăturei minime la o gură de foc	355
46.	*V. Thébault*	Nombres remarquables	399
47.	*V. Thébault*	Sur le triangle podaire	400
48.	*Ion Ionescu*	Sărbătorirea D-lui Matei M. Drăghiceanu . . .	402
49.	*I. I.*	Geometria descriptivă aplicată	403
50.	*I. I.*	Asupra problemei 4217	404
51.	*I. N. Sager*	Asupra problemei 4260	405
52.	*Ad. Gheorghiu*	Un loc geometric	405
53.	*V. Thébault*	Sur certains carrés parfaits	443
54.	*I. I.*	Variaţiuni neproporţionale	444
55.	*Col. Gh. Buicliu*	O complectare	445
56.	*Gh. V.*	Asupra problemei 4324	445
57.	*I. S. A.*	Asupra problemei Nr. 4327	445
58.	*Colonel G. I. Liteanu*	Asupra problemei 4179	445
59.	*Haralamb P. Ionescu-Biss*	O soluţie directă a problemei 3894, G. M. XXXVIII, 393	446
60.	*Maior I. Linteş*	Influenţa reciprocă a masselor oscilante . . .	446
61.	*N. N. Mihăileanu*	Asupra elicei	448
62.	*V. Thébault*	Points remarquables du triangle	490
63.	*I. Ionescu*	Cuadratura cercului	491
64.	*I. Ionescu*	Semnul ∞	492
65.	*Col. Gh. Buicliu*	Cazuri de ale problemei 3031	492
66.	*G. G. Constantinescu*	Asupra problemei 1729	492
67.	*M. G.*	Asupra problemei 2609	492
68.	*Maior I. Linteş*	Asupra problemei 4207	493
69.	*Lt. C-dor Gh. Niculescu*	Asupra problemei 4334	494
70.	*M. G.*	Asupra problemei 4221	495
71.	*M. G.*	Asupra problemei 3922	496

C. CHESTIUNI DE EXAMEN

Şcoala Politehnică «Regele Carol II» din Bucureşti	Examen general: Iunie 1933 Geometrie analitică	53
	Examen sesiunea Ianuarie 1933. Geometrie analitică, Matematici aplicate, Matematici generale	215
	Examenul de admitere în ciclul I. 15 Septemvrie 1933, Algebra, Geometrie analitică, Geometrie descriptivă, Mecanică, Fizică, Chimie . . .	449
	Examen de admitere în anul preparator 27 Octombrie 1933, Algebra, Geometria, Trigonometria, Aritmetica, Compoziţie ştiinţifică .	453
Liceul Militar «N. Filipescu»	Examen de intrare. August 1933	55

		Pag.
Universitatea din Cluj Facultatea de Ştiinţe	Sesiunea Iunie 1933: Algebra elementară, Mecanica, Geometrie, Matematici elementare, Matematici generale, Algebra superioară, Geometria analitică, Geometria descriptivă, Analiza matematică, Astronomie, Mecanică raţională, Teoria funcţiilor, Geometrie infinitezimală •	135
	Sesiunea Iunie 1934: Algebra elementară, Matematici elementare, Geometrie elementară, Matematici generale, Geometrie analitică, Geometrie descriptivă, Algebră superioară, Analiză matematică, Mecanică raţională, Astronomie, Geometrie infinitezimală, Teoria funcţiilor ·	498
Universitatea din Bucureşti Facultatea de Ştiinţe Secţia Matematici	Sesiunea Iunie 1932: Algebra superioară, Geometria analitică, Astronomia, Mecanica, Analiza, Teoria funcţiilor · · · · · · · · · · · ·	263
	Sesiunea Iunie 1933: Matematici elementare, Geometrie superioară · · · · · · · · · · · ·	357
Gazeta Matematică	Concursul din anul 1934. Aritmetica, Geometria plană, Geometria în spaţiu, Geometria descriptivă, Geometria analitică, Algebra elementară, Algebra superioară, Trigonometria, Mecanica, Cosmografia · · · · · · · · · · · ·	309

D. BIBLIOGRAFII

J. Poirée	L'arithmétique à la portée de tous. Nombres entiers. Fractions. Calculs approchés Paris Gauthier-Villars et C-ie Editeurs 1932 · ·	55
J. Poirée	L'algébre, la Trigonométrie à la portée de tous Tome I, Calcul algébrique et équations. Tome II, Etude de la variations des fonctions. Paris Gauthier-Villars et C-ie Editeurs 1933 · ·	56
J. Poirée	La Géométrie à la portée de tous Auch. Imprimerie Cocharaux 1931 · · · · · · · · · ·	56
Mihail St. Botez	Sur les surfaces conoïdes. — Monographie. Imprimeria Judeţului Neamţ 1933 · · · · · ·	57
R. Esteve & H. Mitault	Cours d'algébre. Paris 1933. Tome I. Le calcul algébrique; Tome II. Le premier degré; Tome III. Le second degré. Complements d'Algébre	97
Alex. Veronnet	Cours d'algébre de mathématiques spéciales et de mathématiques générales. Paris 1933 · ·	97
M. D. Hangan	Prescripţiunile comisiunii germane petru beton armat 1932. Bucureşti 1933 · · · · · · · ·	98
Asociaţia inginerilor diplomaţi ai Şcoalei Politehnice din Bucureşti	Primul congres al Asociaţiei 29—30 Noemvrie 1931. Dare de seamă. Bucureşti 1933 · · ·	98

		Pag.
Paul Montel	Leçons sur les fonctions univalentes ou multivalentes. Paris, Gauthier-Villars 1933	99
Ad. Mineur	Arithmétique. Fractions. Les fractions décimales et les nombres décimaux. Les nombres irrationnels. Les problémes et le système métrique. Bruxelles. 1933. Librairie classique J. Van Dijl 38 et 38-a Rue des Etudiants	144
P. Sergescu	Spiritul cel nou în legea învăţământului universtar. Bucureşti 1932	145
Marcel Georgescu	Asupra necesităţii studiului istoriei tehnice în Şcolile Politehnice. Bucureşti 1933	147
Pierre Copel	Eléments d'optique géométrique à l'usage des candidats des grandes écoles. Paris Gauthier-Villars 1933	176
Gh. Zapan	Memoriu de titluri şi lucrări. Bucureşti 1933.	177
N. Ciorănescu	Notiţă de titluri şi lucrări. Cernăuţi 1933	177
Ad. Mineur	Trigonométrie. Bruxelles 1932. Librairie classique J. van Dijl 38 et 38-a Rue des Etudiants	220
J. Favard	Leçons sur les fonctions presque périodiques Paris. Gauthier-Villars 1933	221
Vladimir Bernstein	Leçons sur les progés récents de la théorie des séries de Dirichlet, Paris Gauthier-Villars 1933	221
J. Ser	Les calcules formels des séries de factorielles Paris. Grauthier-Villars 1933	221
Ad. Mineur	Géométrie analytique plane I. Le point, la droite et la circonférence. Librairie classique J. Van Dijl. Rue des étudiants 38 et 38-a Bruxelles 1930	266
Ad. Mineur	Géométrie analytique plane II. Les coniques: Théorie générale Bruxelles	319
R. N. Racliş	Notiţă de titluri, lucrări ştiinţifice, lucrări didactice. 31 Decemvrie 1933 Bucureşti	320
M. Ghermănescu	Memoriu de titluri şi lucrări. Ianuarie 1934 Bucureşti	320
Gabriel Sudan	Curs de Algebră superioară şi Teoria numerelor Litografiat sub îngrijirea D-lui Gh. Th. Gheorghiu. Ed. Facultăţii de Ştiinţe din Bucureşti 1932 — 1933	320
Ernest Abason	Elemente de Mecanică, cu o prefaţă de D. Pompeiu. Bucureşti 1933	320
Şcoala Politehnică din Timişoara	Anuarul Anii XI, XII, XIII. Timişoara 1934	360
Henri Galburn	Théorie mathématique de l'assurance maladie. Paris 1934. Gauthier-Villars Editeur	407
Ad. Mineur	Géométrie analytique plane III. Les coniques: Théories particuliéres. Théories des foyers et Théories diverses. Bruxelles	407

		Pag.
Universidad Nacional de La Plata	Anuario para el ano 1933. La Plata 1933	457
Maior Linteş	Noutăţi în construcţia gurilor de foc Timişoara 1934	457
Gh. Em. Filipescu	Statica şi Rezistenţa. Bucureşti. Imprimeria Naţională 1934 (Ediţie provizorie cu primele 560 pagini)	457
J. B. Tourriol	Optique géométrique. Paris Gauthier-Villars. Editeur. Paris 1934	509

Reviste

Mathesis 24, 25, 96, 174, 219, 318, 359, 456, 509
Revista Matematică din Timişoara 25, 55, 97, 145, 176, 220, 266, 319, 359, 408, 456, 509
Boletin Matematico 25, 55, 96, 144, 175, 220, 319, 359, 407, 456, 457, 508, 509
Bulletin of the American Mathematical Society 25, 96, 144, 174, 219, 318, 359, 408, 456
Sphinx 25, 55, 144, 175, 319, 359, 409
Boletin Matematico Elemental 55, 144, 174, 175, 220, 408, 456, 508
Bulletin de la Section Scientifique de l'Académie Roumaine . . . 96, 144, 319
The Mathematical Gazette 96, 174, 266, 408, 509
Journal de Mathématiques élémentaires 96, 144, 175, 220, 266, 319, 359, 407, 457, 509
Bulletin de Mathématiques et Physiques pures et appliquées de l'Ecole Polytechnique „Roi Carol II" 144, 176
Anales de la Sociedad Cientifica Argentina 174, 219, 359, 457
Bulletin Mathématique de la Société Roumaine des Sciences 175, 508
Societatea Licenţiaţilor în Matematici dela Universitatea din Cluj: Chestiuni de examen propuse la secţia matematică a Facultăţii din Cluj . . 176
Natura 178, 360 409
Boletin del Seminario Matematico 220, 457
Societatea Română de Ştiinţe, Secţia matematică, Buletinul Şedinţelor . . 220
Bulletin de la Société Mathématique de Grèce 266
Revista ştiinţifică „V. Adamachi" 266
Buletinul Societăţii Politehnice 319
Buletinul Asociaţiei Inginerilor C. F. R. 319
Ştiinţă şi Progres 360, 407, 457
Matematica 408
Buletinul Societăţii de Matematici a Liceului „Tasse Dumitrescu" din Mizil 509

Extrase şi Suplimente

J. Leemans	Sur quelques intégrales définies obtenues par l'application des propriétés des intégrales euleriennes. (Supliment la Mathesis).	25

		Pag.
V. Thébault	Quadrilatère bordé de carrés. (Supliment la Mathesis). · · · · · · · · · · · · · · · ·	25
E. Arghiriadi	Sur le mouvement d'une figure plane semblablement variable. (Supliment la Mathesis) ·	25
R. Racliş	Le terme reste de la série de Taylor généralisée (Ex. din Actele Congresului internaţional al Matematicianilor ţinut la Zürich în 1932) ·	56
R. Racliş	Trois théorèmes sur la série de Taylor. (Ex. din Actele Congresului internaţional al Matematicianilor dela Zürich în 1932). · · · · · ·	57
Cl. Servais	Sur la géométrie du tétraèdre. Bruxelles 1933 (Supliment la Mathesis) · · · · · · · · ·	98
V. Thébault	Géométrie et mécanique. Triangle bordé de carrés. Sur les points de Feuerbach. Bruxelles 1933. (Supliment la Mathesis) · · · · · · · · ·	98
Caïus Iacob	Sur un problème mixte dans l'anneau circulaire. (Ex. din Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris). Paris 1933	98
Caïus Iacob	Sur quelques problèmes concernant l'écoulement des fluides parfaits compressibles. (Ex. din Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris). Paris 1933 · · · ·	98
Caïus Iacob	Sur quelques problèmes mixtes dans une couronne circulaire. (Ex. din Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris). Paris 1933 · · · · · · · · · · · · · · ·	98
N. Donici	Al patrulea Congres al Uniunii Astronomice Internaţionale ţinut la Cambridge (Massachusetts). (Ex. din Memoriile Secţiunii Ştiinţifice ale Academiei Române). Bucureşti 1933	98
M. Biernacki	Sur les zéros des fonctions holomorphes. (Ex. din Mathematica). Cluj 1930 · · · · · · ·	145
P. Sergescu	Quelques points de la théorie des équations algébriques. (Ex. din Actele Congresului internaţional al Matematicienilor ţinut la Zürich în 1932). Zürich 1932 · · · · · · · · · ·	145
P. Sergescu	Quelques propriétés des polynomes. (Ex. din Comptes rendus des séances de la Société des sciences et de lettres de Varsovie XXIV. 1931, Classe III). Varşovia 1932 · · · · · ·	145
P. Sergescu	Histoire des sciences mathématiques et physiques en Roumanie. (Ex. din Bulletin du Comité international des sciences historiques). Paris 1932 · · · · · · · · · · · · · ·	145
P. Sergescu	Istoria calculului numeric (Ex. din „Cuget clar")	145

		Pag.
P. Sergescu	Les sciences mathématiques (Ex. din Tableau du XX siècle en France). Paris. Les Editions Denoël et Stelile. Rue Amée 19	145
P. Sergescu	O schiță de istorie a științelor matematice. (Ex. din „Cuget clar"). Văleni de Munte 1933	146
Miron Nicolesco	Sur les fonctions mesurables. (Ex. din Bulletin des sciences mathématiques). Paris 1933	146
Miron Nicolesco	Fonction de Green d'ordre p. (Ex. din Buletinul Facultății de Științe din Cernăuți). Cernăuți 1932	146
Miron Nicolesco	Remarques sur un théorème de moyenne de M. Luigi Amoroso. (Ex. din Bulletin de la classe des sciences de l'Académie royale de Belgique). Bruxelles 1932	146
Miron Nicolesco	Sur une classe d'équations fonctionelles. (Ex. din Bulletin des sciences mathématiques). Paris 1932	146
Miron Nicolesco	Sur la décomposition des polynomes différentiels en facteurs de premier ordre. (Ex. din Matematische Zeitschrift), Berlin 1932	146
Miron Nicolesco	Sur les fonctions de *n* variables, harmoniques d'ordre p. (Ex. din Bulletin de la société mathématique de France). Paris	146
Miron Nicolesco	Sur quelques propriétés élementaires de la mesure au sens de Jordan. (Ex. din Buletinul Facultății de Științe din Cernăuți). Cernăuți 1932	146
Miron Nicolesco	Sur quelques points de géométrie finie directe. (Ex. din Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences de Paris). Paris 1933	146
Miron Nicolesco	Extension d'un théorème de M. F. Riesz aux fonctions harmoniques d'ordre p. (Ex. din Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris). Paris 1932	146
Miron Nicolesco	Sur quelques points de géométrie fine directe. (Ex. din Bulletin de la classe des sciences de l'Académie de Belgique). Bruxelles 1933	146
Miron Nicolesco	Sur le problème de Riquier. (Ex. din Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences de Paris). Paris 1932	146
Miron Nicolesco	Sur les harmoniques et sous-harmoniques d'ordre p. (Ex. din Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences de Paris). Paris 1931	146

Pag.

G. Vranceanu Sur l'indépendance des secondes formes fondamentales d'une Vm (Ex. din Buletinul Societăţii de Ştiinţe din Cernăuţi). Cernăuţi 1929 146

G. Vranceanu Conexions affines liées aux systèmes de Pfaff. (Ex. din Buletinul Facultăţii de Ştiinţe din Cernăuţi). Cernăuţi 1932 146

G. Vranceanu Studio geometrico dei sistemi anolonomi. (Ex. din Annali di Matematica). Bologna 1929 . 146

G. Vranceanu Sulla stabilita del rotolamento di un disco. (Ex. din Rendinconti della R. Accademia nazzionale dei Lincei). Roma 1924 147

G. Vranceanu Sopra le ecuazioni del moto di un sistema anolonomo. (Ex. din Rendinconti della R. Accademia nazzionale dei Lincei). Roma 1926 . . 147

G. Vranceanu Sur la stabilité trigonométrique de l'équilibre dans la dynamique. (Ex. din Rendinconti della R. Accademia nazzionale dei Lincei). Roma 1927 147

G. Vranceanu Sopra le ecuazioni del problema dei due corpi di masse variabili. (Ex. din Rendinconti della R. Accademia nazzionale dei Lincei). Roma 1928 147

G. Vranceanu Sulle condizioni di rigidità di una Vm in un S_1 $S_{.1}$ (Ex. din Rendinconti della R. Accademia nazzionale dei Lincei). Roma 1930 147

G. Vranceanu Sopra i sistemi anolonomi a legami dipendenti dal tempo. (Ex. din Rendinconti della R. Accademia nazzionale dei Lincei). Roma 1931 147

G. Vranceanu Sopra l'interpretazione geometrica dei sistemi mecanici. (Ex. din Rendinconti della R. Accademia nazzionale dei Lincei). Roma 1933 . . 147

G. Vranceanu Sur les espaces de Riemann ayant leurs coefficients de rotation constants. (Ex. din Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris). Paris 1929 147

G. Vranceanu Sur quelques théorèmes relatifs aux variétés non holonomes et aux systèmes de formes de Pfaff. (Ex. din Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris). Paris 1931 147

G. Vranceanu Sur le nombre des différentielles d'un systéme de Pfaff. (Ex. din Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris). Paris 1933 147

		Pag.
G. Vranceanu	Sur le groupe d'Applicabilité des variétés non holonomes. (Ex. din Comptes rendus des seances de l'Académie des sciences de Paris). Paris 1930	147
N. Abramesco	Sur les courbes de convergence des séries de polynomes à une variable complexe et leur aplication à la detérmination des fonctions holomorphes dans des domains donnés. (Ex. din Atti di Matematica pura ed applicata). Bologna 1933	177
Gh. Zapan	Uebbarkeit verschiedener Aufgaben. (Ex. din Psychotechnischen Zeitschrift) München 1932	177
Gh. Zapan	Beziehung zwischen den Unterrichtsfächern in den höhere Schulen und Folgerungen für die Schulorganisation. (Ex. din Psychotechnischen Zeitschrift). Berlin 1933	177
N. Cioranesco	Sur les équations fonctionelles du cosinus et du sinus circulaires et hyperboliques. (Ex. din l'Enseignement mathématique). Paris et Genève 1932	177
N. Cioranesco	Sur une nouvelle généralisation des polynomes de Legendre. (Ex. din Acta Mathematica). Upsala 1932	177
N. G. Botea	Le théorème des accroissements finis et les fonctions holomorphes. (Ex. din Bulletin mathématique de la Société roumaine des sciences). Bucureşti 1933	177
N, G. Botea	Sur la configuration formée par deux triangles et deux points. (Ex. din Mathesis). Gembloux 1933	177
N. G. Botea	Deux théorèmes sur le triangle, (Ex. din Comptes rendus du Congrès de l'Association française pour l'avancement des sciences). 1932 . . .	177
N. G. Botea	Sur une classe d'équations aux dérivées partielles. (Ex. din Buletinul Facultăţii de Ştiinţe din Cernăuţi). Cernăuţi 1932	178
N. G. Botea	Proprietăţi ale triunghiului. (Ex din Gazeta Matematică). Bucureşti 1933	178
M. Ghermanesco	Equations différentielles et équations aux différences finies. (Ex. din Bulletin mathématique de la Société Roumaine des sciences). Bucureşti 1933	220
M. Ghermanesco	Sur les équations aux différences finies à plusieurs variables. (Ex. din Bulletin de la classe des sciences de l'Académie royale de Belgique). Bruxelles 1933	220

		Pag.
M. Ghermanesco	Sur les équations à différences finies. (Ex. din Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences de Paris). Paris 1933	220
V. Thébault & R. Goormaghtigh	Sur les cercles remarquables du triangle. (Supl. la Mathesis). 1933	221
V. Thébault	Géométrie de l'ortopole. (Supliment la Mathesis). 1933	221
M. Ghermanesco	Sur les équations aux différences finies. (Ex. din Acta Mathematica) Stockholm	267
***	Statutele Asociaţiei Inginerilor C. F. R. (Supliment la Buletinul Asociaţiei Inginerilor C. F. R.)	319
R. J. H. Germai	Application de la méthode des résidus à la généralisation de la formule de Lagrange. (Supliment la Mathesis). Louvain 1934	320
M. Ghermanesco	Sur un théorème de M. de la Vallée Poussin. (Ex. din Bulletin de la classe des sciences de l'Académie royale de Belgique). Bruxelles	320
M. Ghermanesco	Sur l'équation $\Delta^n u=0$ (Ex. din Mathematica). Cluj	320
Saba S. Ştefănescu	Théorie du plan conducteur pour l'émetteur alternatif de longueur finie. (Ex. din Beiträge zur angewandter Geophysik). Berlin	320
Teodorescu C. C.	Rélation entre la résistance et l'allongement. (Ex. din Bulletin scientifique de l'Ecole polytechnique de Timişoara). Timişoara 1934	360
N. Abramesco	Sur le cercle d'univalence d'une fonction holomorphe $f(x)$ et sur la plus petite distance entre deux zéros d'une équation $f(x)=A$. (Ex. din Rendinconti del Circolo matematico di Palermo). Palermo 1934	408
V. Thébault	Triangle bordé de carrés. (Ex. din Annales de la Société scientifique de Bruxelles). Supliment la Mathesis. Bruxelles 1933	457
Lucien Godeaux	L'Ecole de Géométrie de l'Université de Liège. (Ex. din Bulletin de l'Académie royale de Belgique). Supliment la Mathesis, Bruxelles 1934	457
Comandant I. Linteş	Le calcul de la vitesse minima dans la „Balistique interieure". (Ex. din Bulletin scientifique de l'Ecole polytechnique de Timişoara). Timişoara 1934	457

		Pag.
N. G. Botea	Une propriété de réciprocité (Ex. din Comptes rendus de la 57-e Session de l'Association pour l'avancement des sciences) Paris 1933	509
M. Deweck	Sur le problème du relévent topographique. (Ex. din Bulletin Belge des Sciences militaires) Supliment la Mathesis 1934	510
V. Thébault	Triangle bordé de triangles isoscèles semblables. (Ex. din Annales de la Société scientifique de Bruxelles) Supliment la Mathesis. Bruxelles 1934	510

E. CERERI *)

Nr. Cererii	*Pagina la care a fost:* Propusă	Răspunsul	*Nr. Cererii*	*Pagina la care a fost:* Propusă	Răspunsul
1 . . .	24 (XXI)	?	41 . . .	185 (XXIII)	?
4 . . .	24 „	?	42 . . .	211 „	?
5 . . .	24 „	?	43 . . .	235 „	?
7 . . .	59 „	?	44 . . .	259 „	?
8 . . .	59 „	?	45 . . .	275 „	?
10 . . .	91 „	?	46 . . .	13 (XXIV)	?
11 . . .	144 „	?	49 . . .	57 „	?
12 . . .	145 „	?	50 . . .	70 „	?
13 . . .	145 „	219 (XXI) ?	51 . . .	88 „	?
14 . . .	183 „	?	52 . . .	103 „	?
15 . . .	219 „	?	55 . . .	152 „	?
16 . . .	254 „	?	56 . . .	168 „	?
17 . . .	298 „	264 (XXXVIII) ?	58 . . .	16 (XXV)	?
20 . . .	420 „	?	59 . . .	36 „	?
23 . . .	17 (XXII)	?	60 . . .	58 „	?
24 . . .	75 „	?	61 . . .	58 „	?
25 . . .	137 „	90 (XXVII) 267 (XXXIX)	62 . . .	71 „	?
26 . . .	161 „	?	63 . . .	71 „	?
27 . . .	187 „	?	64 . . .	122 „	?
28 . . .	213 „	?	65 . . .	122 „	?
29 . . .	231 „	?	66 . . .	155 „	?
30 . . .	258 „	?	67 . . .	175 „	?
31 . . .	277 „	?	68 . . .	199 „	?
32 . . .	277 „	259 (XXIII) 39, 186 (XXIV)?	70 . . .	223 „	?
33 . . .	308 „	?	71 . . .	251 „	?
34 . . .	40 (XXIII)	?	73 . . .	45 (XXVI)	?
35 . . .	40 „	?	74 . . .	45 „	?
36 . . .	65 „	?	75 . . .	94 „	?
37 . . .	86 „	211 (XXIII) ?	77 . . .	198 „	?
38 . . .	112 „	?	78 . . .	227 „	?
39 . . .	137 „	?	80 . . .	263 „	?
40 . . .	157 „	?	81 . . .	27 (XXVII)	?
			82 . . .	27 „	160 (XXVII)?
			83 . . .	160 „	?
			84 . . .	197 „	?

*) In această tabelă semnul ? arată că nu s'a primit răspuns sau că se mai aşteaptă răspuns dacă e pus după un răspuns. Litera A arată că răspunsul se trimite autorului.

Nr. Cererii	Pagina la care a fost: Propusă	Răspunsul
85	197 (XXVII)	?
86	240 „	?
87	283 „	?
88	329 „	?
89	361 „	?
91	26 (XXVIII)	?
92	57 „	?
93	57 „	?
94	103 „	?
95	136 „	?
96	136 „	?
97	213 „	?
98	213 „	?
99	256 „	?
100	297 „	?
101	342 „	?
102	458 „	?
103	458 „	?
104	24 (XXIX)	?
105	58 „	?
107	145 „	?
108	226 „	?
109	298 „	?
112	419 „	?
113	454 „	?
115	22 (XXX)	?
116	102 „	?
117	102 „	?
118	140 „	?
119	218 „	?
120	261 „	?
122	306 „	?
123	337 „	?
124	383 „	?
126	423 „	?
128	33 (XXXI)	?
129	55 „	?
130	56 „	?
131	100 „	?
134	184 „	?
142	53 (XXXII)	?
143	102 „	?
144	142 „	?
146	216 „	?
148	296 „	?
149	343 (XXXII)	?
152	19 (XXXIII)	19 (XXXIII)?
153	51 „	?
154	51 „	?
157	146 „	?
158	185 „	?
159	217 „	?
162	295 „	?
163	341 „	?
166	457 „	?
179	385 (XXXIV)	?
181	24 (XXXV)	?
186	216 „	?
193	466 „	?
196	57 (XXXVI)	?
197	102 „	304 (XXXVII) 462 (XXXVIII) 25 (XXXIX)
201	221 „	?
207	414 „	?
208	462 „	?
210	62 (XXXVII)	?
211	98 „	?
212	137 „	?
214	217 „	?
215	260 „	?
219	425 „	?
220	448 „	?
221	24 (XXXVIII)	?
223	94 „	?
226	25 (XXXIX)	99 (XXXIX)
227	57 „	?
228	57 „	A
229	99 „	A
230	147 „	A
231	147 „	148 (XXXIX)
232	148 „	148 (XXXIX)
233	178 „	178 (XXXIX)
234	179 „	A
235	222 „	?
236	323 „	323 (XXXIX)
237	360 „	?
238	409 „	?
239	458 „	?
240	510 „	(XXXIX)

F. DIVERSE

Pag.

1) Activitatea D-lui P. Sergescu pentru cunoaşterea mişcării matematice române 57

2) Şedinta Societăţii române de Ştiinţe, Secţia matematică, dela 23 Octomvrie 1933 100

3) Idem, dela 6 Noemvrie 1933 148

Pag.

4) Şedinţa Societăţii române de Ştiinţe, Secţia matematică, dela 26 Noemvrie 1933, în care au fost sărbătoriţi D-nii Profesori D. Pompeiu şi G. Ţiţeica 148
5) Constituirea Asociaţiunii Profesorilor de Matematici din România . 149
6) Şedinţa Societăţii române de Ştiinţe, Secţia matematică, dela 4 Decemvrie 1933 179
7) Idem, dela 18 Decemvrie 1933 179
8) Idem, dela 8 Ianuarie 1934 222
9) Idem, dela 22 Ianuarie 1934 222
10) Asupra activităţii D-lui P. Sergescu în Franţa 222
11) Donaţiunea Domnişoarei Preduţa D. Bungeţeanu 223
12) Şedinţa Societăţii române de Ştiinţe, Secţia matematică, dela 5 Februarie 1934 267
13) Idem, dela 19 Februarie 1934 268
14) Asupra Congresului Asociaţiunii române pentru înaintarea şi răspândirea ştiinţelor 268
15) Şedinţa Societăţii române de Ştiinţe, Secţia matematică, dela 5 Martie 1934 323
16) Idem, dela 19 Martie 1934 323
17) Idem, dela 16 Aprilie 1934 360
18) Asupra activităţii secţii istorice a Congresului Asociaţiunii române pentru înaintarea ştiinţelor 409
19) Şedinţa Societăţii române de Ştiinţe, Secţia matematică, dela 28 Mai 1934 458
20) Idem, dela 4 Iunie 1934 458

G. PROBLEME PROPUSE

a) Repartizarea problemelor propuse după materii

Aritmetica 4237, 4291, 4292, 4301, 4302, 4303, 4311, 4313, 4321, 4322, 4331, 4332, 4333, 4341, 4342, 4343, 4351, 4361, 4362, 4363, 4371, 4372, 4373, 4381, 4382, 4391, 4392, 4403, 4404, 4405.

Geometria 4293, 4294, 4300, 4304, 4305, 4306, 4314, 4323, 4324, 4325, 4326, 4334, 4335, 4344, 4345, 4352, 4353, 4354, 4355, 4356, 4357, 4364, 4365, 4366, 4374, 4383, 4384, 4393, 4394, 4395, 4396, 4406, 4407, 4408, 4409, 4413.

Algebra 4295, 4299, 4307, 4308, 4310, 4318, 4319, 4329, 4336, 4337, 4346, 4347, 4348, 4349, 4359, 4360, 4367, 4368, 4369, 4370, 4377, 4379, 4385, 4386, 4387, 4397, 4398, 4399, 4400, 4401, 4410, 4414.

Trigonometria 4296, 4297, 4298, 4309, 4279, 4312, 4315, 4316, 4317, 4327. 4328, 4338, 4339, 4375, 4376, 4378, 4388, 4411, 4412,

Geom. Analitică 4320, 4330, 4358, 4389, 4402.

Mecanică 4250, 4290, 4340, 4350, 4380.

Cosmografie 4390.

H. PROBLEME REZOLVATE

b) Indicarea paginei la care a fost propusă sau rezolvată

Nr. problemei	*Pagina la care a fost:* Propusă [1]	Rezolvată [2]
171	76 (II) 198 (XVI)	
485	104 (VI) 198 (XVI)	
585	172 (VI) 238 (XVI)	NR
676	148 (VII)	
691	196 „ 278 (XVI)	NR
766	124 (VIII) 319 (XVI) 372 (XXXI)	NR
825	288 (VIII) 358 (XVI)	NR
887	172 (IX) 358 (XVI)	NR
914	267 (IX)	NR
944	52 (X)	
1000	220 (X) 438 (XVI)	NR
1008	224 (X) 462 (XVI)	NR
1056	100 (XI)	NR
1058	100 „	NR
1092	196 „	
1146	76 (XII)	NR
1156	100 „	
1178	172 „	NR
1180	172 „	
1188	228 „	
1214	296 „	
1236	64 (XIII)	
1270	192 „	NR
1271	192 „	NR
1287	256 „	
1297	288 „	NR
1299	319 „	NR
1307	320 „	
1310	352 „ 372 (XXXI)	NR

Nr. problemei	*Pagina la care a fost:* Propusă [1]	Rezolvată [2]
1333	32 (XIV) 198 (XVIII)	324
1342	64 (XIV)	
1364*)	128 „	179
1367	128 „	NR
1379	160 „	
1384	191 „	NR
1386	192 „	NR
1398	224 „	
1399	224 „ 200 (XVI)	NR
1412	256 (XIV)	NR
1424	228 „	
1450	352 „	NR
1497	128 (XV)	
1533	224 „	
1534	224 „	
1553	228 „	NR
1563	320 „	
1576	352 „	
1577	352 „	
1591	39 (XVI)	
1632	159 „	
1637	160 „	
1650	200 „	NR
1655	239 „	
1676	279 „	
1679	280 „	NR
1690	320 „	
1702	360 „	
1711	399 (XVI) 372 (XXXI)	NR
1729	440 (XVI)	NR
1734	463 „	
1735	464 „	
1753	80 (XVII)	
1764	120 „	NR
1773	160 „	NR
1778	199 „	NR
1790	240 „	

1) Numărul latin din paranteză indică volumul colecției, în care problema este propusă. De ex. 76 (II) înseamnă că problema 171 a fost propusă la pag. 76 vol. II. Problemelor mai vechi nerezolvate încă, sau rectificate, li s'a publicat din nou enunțul. Așa de ex.: probl. 766 a fost publicată (sau rectificată) pe rând în vol. VIII pag. 124, vol. XVI, pag. 319 și vol. XXXI, pag. 372.

2) NR însemnează că problema nu a fost încă rezolvată. Pentru acelea în dreptul cărora nu scrie niciun număr, redacția posedă soluțiuni bune care nu au fost încă publicate.

*) A se vedea soluțiile nesatisfăcătoare dela pag. 102, 221, 302 Vol. XXXVI și pag. 185 Vol. XXXVII.

Nr. problemei	*Pagina la care a fost:* Propusă [1])	Rezolvată [2])
1823	400 (XVII)	
1831	439 „	
1835	440 „	
1840	446 „	
1858	78 (XVIII)	
1876	119 „	NR
1882	120 „	
1892	160 „	
1898	199 „	
1906	200 „	NR
1911	239 „	
1914	239 „ / 280 „	NR
1922	278 „	
1929	279 „	NR
1934	280 „ / 320 „	
1937	318 „	223
1944	319 „	
1945	320 „	
1948	358 „	
1958	359 „	
1959	360 „	NR
1969	399 „	
1976	431 „	
1987	462 „	NR
1991	38 (XIX)	226
2003	40 „	
2004	40 „	NR
2016	79 „	
2017	80 „	NR
2018	80 „	
2024	118 „	
2025	119 „	
2032	120 „	
2035	159 „	
2038	159 „	
2048	198 „	NR
2055	200 „	
2056	200 „	
2058	200 „	
2063	238 „ / 280 „	
2065	239 „	
2070	240 „	NR
2074	278 „	NR
2079	279 „	
2081	279 „	149
2083	280 „	
2091	319 „	
2106	358 „	
2108	359 „	
2110	359 „	
2111	360 „	NR

Nr. problemei	*Pagina la care a fost:* Propusă [1])	Rezolvată [2])
2112	360 (XIX)	
2116	398 „	
2117	398 „	100
2118	399 „	
2129	438 „	
2130	460 „	
2133	439 „	
2144	461 „	
2145	462 „	
2147	462 „	
2170	119 (XX)	NR
2176	120 „	
2187	160 „	
2194	197 „	
2197	198 „	
2217	239 „	
2222	240 „	
2227	279 „	
2235	280 „	
2240	318 „	
2247	320 „	
2248	320 „	
2249	320 „	
2250	320 „	
2263	359 „	
2264	360 „	
2265	360 „	
2266	360 „	
2274	398 „	
2281	400 „	
2284	439 „	
2289	439 „	
2290	439 „	
2295	461 „	
2298	462 „	
2301	462 „	
2302	462 „	NR
2311	40 (XXI)	
2318	79 „ / 160 „	
2329	118 „	
2330	118 „	
2332	119 „	
2337	120 „	
2338	122 „ / 422 (XXXI)	NR
2343	157 (XXI)	
2344	158 „	
2346	158 „	
2353	159 „	
2354	198 „	
2356	199 „	
2357	199 „	
2359	199 „	184

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
2360	199 (XXI)	
2365	200 „	
2370	239 „	
2375	240 „	
2381	278 „	
2386	279 „	150
2390	280 „	
2394	318 „	
2397	319 „	
2398	319 „	
2402	320 „	
2405	320 „ 423 (XXXI)	NR
2408	359 (XXI)	
2421	399 „	
2422	399 „	
2423	399 „	
2430	439 „	NR
2435	440 „	
2436	440 „	
2439	440 „	NR
2440	459 „	185
2456	31 (XXII)	
2458	32 „	
2461	32 „	
2462	62 „	
2466	63 „	NR
2469	63 „	
2477	95 „	NR
2481	96 „	
2489	120 „	
2497	144 „	
2500	144 „	
2502	167 „	NR
2503	167 „ 333 (XXXII)	NR
2510	191 (XXII)	
2529	262 „	
2537	287 „	
2539	288 „	
2545	312 „	
2532	47 „	
2533	47 „	
2556	48 (XXIII)	NR
2560	72 „	
2566	120 „	
2569	120 „	
2573	144 „	
2575	168 „	
2577	168 „	NR
2578	168 „	
2585	215 „	
2586	216 „	
2587	216 „	NR

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
2591	240 (XXIII)	
2593	264 „	
2598	288 „	
2599	288 „	
2602	318 (XXXI)	
2607	31 (XXIV)	NR
2609	32 „ 454 (XXXI)	458
2623	80 (XXIV)	
2631	112 „	
2638	127 „	NR
2640	128 „	
2643	128 „	
2645	143 „	
2647	143 „	
2655	191 „	NR
2660	191 „	
2661	192 „	
2664	24 (XXV)	
2665	24 „	NR
2671	48 „	
2675	63 „	
2682	64 „	
2683	79 „	
2684	80 „	NR
2688	80 „	
2689	80 „	
2692	108 „	
2694	108 „	
2701	141 „	
2706	142 „	
2709	142 „	NR
2713	143 „	NR
2717	143 „	NR
2727	168 „	
2731	191 „	
2735	192 „	NR
2752	264 „	
2758	56 (XXVI)	
2769	79 „	NR
2778	104 „	
2780	104 „	NR
2789	135 „	
2795	159 „	
2803	160 „	
2814	192 „	NR
2818	216 „	
2820	216 „	
2822	216 „	
2827	247 „	
2828	248 „	
2837	279 „	
2850	335 „	
2851	335 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
2860	39 (XXVII)	
2861	40 „	
2865	70 „	NR
2886	104 „	NR
2888	104 „	
2889	104 „	
2895	143 „	
2906	184 „	
2909	221 „	NR
2912	222 „	NR
2913	222 „	
2920	262 „	
2922	262 „	
2926	264 „	NR
2936	343 „	NR
2947	376 „	NR
2953	416 „	
2955	416 „	
2959	448 „	
2960	448 „	
2969	39 (XXVIII)	
2971	39 „	
2972	40 „	
2980	79 „	
2983	79 „	
2985	80 „	
2986	80 „	
2993	119 „	
2996	120 „	
2999	120 „	
3000	120 „	
3003	159 „	
3005	159 „	
3013	199 „	
3019	200 „	
3031	278 „	409
3041	319 „	
3045	319 „	NR
3052	359 „	
3054	360 „	
3059	360 „	
3069	400 „	NR
3070	400 „	
3071	439 „	
3073	439 „	
3075	439 „	
3081	479 „ / 454 (XXXI)	NR
3085	480 (XXVIII)	
3086	480 „	
3090	480 „	
3091	39 (XXIX)	
3095	40 „	
3096	40 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
3108	80 (XXIX)	
3109	80 „	
3114	119 „	
3118	120 „	
3127	159 „	NR
3134	198 „	NR
3150	240 „	
3160	280 „	
3161	318 „	NR
3167	320 „	
3169	320 „	NR
3173	358 „	
3177	359 „	
3178	360 „	
3180	360 „	
3189	400 „	
3198	440 „	
3208	480 „	NR
3209	480 „	
3210	480 „	
3220	40 (XXX)	
3223	79 „	460
3227	80 „	
3228	80 „	
3230	80 „	NR
3232	119 „	
3236	119 „	
3239	120 „	
3245	160 „	
3248	160 „	
3249	160 „	
3250	160 „	461
3251	198 „	NR
3253	199 „	
3255	199 „	NR
3260	200 „	NR
3267	239 „	
3270	240 „	101
3277	280 „	
3279	280 „	
3282	318 „	
3287	320 „	
3288	320 „	
3290	320 „	
3291	358 „	
3296	359 „	
3298	359 „	NR
3299	360 „	
3300	360 „	NR
3304	399 „	NR
3308	400 „	
3309	400 „	
3310	400 „	NR
3311	438 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]
3312	439 (XXX)	
3313	439 „	
3316	439 „	NR
3318	440 „	NR
3319	440 „	
3320	440 „	
3330	480 „	
3332	39 (XXXI)	
3335	158 (XXXVIII)	
3340	40 (XXXI)	
3341	79 „	NR
3343	79 „	
3350	80 „	NR
3354	120 „	
3356	120 „	
3360	120 „	
3365	159 „	
3368	160 „	
3389	240 „	
3390	240 „	
3396	280 „	
3404	318 „	
3405	319 „	NR
3412	358 „	NR
3419	360 „	
3424	399 „	NR
3425	399 „	NR
3429	400 „	
3430	400 „	
3439	440 „	
3445	479 „	
3448	479 „	
3450	480 „	
3456	39 (XXXII) / 119 (XXXIII)	
3457	39 (XXXII)	
3459	40 „	
3461	40 „	462
3467	79 „	
3468	80 „	
3472	80 „	NR
3474	119 „	
3477	119 „	
3488	159 „	
3489	159 „	NR
3493	160 „	NR
3495	199 „	NR
3497	199 „	
3499	199 „	
3503	200 „	
3504	200 „	
3506	239 „	
3509	239 „	
3512	240 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]
3513	240 (XXXII)	
3517	279 „	58
3521	279 „	
3522	280 „	NR
3523	280 „	NR
3524	280 „	NR
3533	320 „	NR
3534	320 „	
3535	359 „	NR
3536	438 „	NR
3542	360 „	NR
3545	398 „	NR
3546	399 „	NR
3547	399 „	
3551	39 (XXXIII)	
3554	400 (XXXII)	
3557	438 „	
3562	440 „	NR
3563	440 „	
3565	479 „	
3571	480 „	511
3572	480 „	NR
3573	480 „	NR
3574	480 „	
3579	40 (XXXIII)	268
3584	79 „	
3588	80 „	
3589	80 „	
3593	119 „	
3597	120 „	
3600	120 „	
3607	159 „	
3608	159 „	NR
3610	160 „	
3620	199 „	
3622	239 „	
3625	239 „	
3627	278 „	NR
3630	240 „	
3632	279 „	NR
3635	279 „	
3636	279 „	
3639	280 „	
3640	280 „	
3644	319 „	
3646	320 „	
3647	320 „	NR
3650	320 „	
3653	359 „	
3655	359 „	326
3657	359 „	NR
3658	360 „	
3659	360 „	
3660	360 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
3664	399 (XXXIII)	
3665	399 „	NR
3675	439 „	
3677	440 „	
3681	478 „	NR
3682	479 „	NR
3684	479 „	NR
3689	480 „	
3692	39 (XXXIV)	
3693	39 „	
3697	40 „	511
3699	40 „	NR
3700	40 „	NR
3702	79 „	
3703	79 „	NR
3705	79 „	
3706	79 „	
3713	119 „	
3714	119 „	
3717	120 „	271
3720	120 „	
3725	160 „	
3732	199 „	
3733	199 (XXXV)	NR
3736	200 (XXXIV)	NR
3739	200 „	464
3749	240 „	
3755	279 „	
3760	280 „	
3762	319 „	
3763	319 „	NR
3764	319 „	
3765	320 „	
3766	320 „	
3768	320 „	
3770	320 „	360
3772	359 „	
3775	360 „	
3776	360 „	
3780	360 „	
3784	399 „	
3785	399 „	464
3787	400 „	
3790	400 „	
3792	439 „	
3793	439 „	NR
3802	479 „	
3804	479 „	NR
3807	480 „	
3808	480 „	NR
3810	480 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
3817	40 (XXXV)	
3819	40 „	
3820	40 „	
3823	79 „	
3824	79 „	
3826*)	79 „	466
3829	80 „	NR
3832	119 „	
3833	119 „	
3836	120 „	NR
3837	120 „	
3839	120 „	
3840	120 „	
3844	159 „	NR
3845	159 „	
3849	160 „	
3853	199 „	NR
3857	200 „	228
3863	239 „	
3864	239 „	NR
3867	240 „	
3873	279 „	
3874	38 (XXXVIII)	
3875	279 (XXXV)	101
3876	279 „	
3878	280 „	
3880	280 „	NR
3883	319 „	
3896	360 „	NR
3898	360 „	102
3900	360 „	
3902	398 „	
3906	399 „	
3908	38 (XXXVIII)	411
3909	400 (XXXV)	NR
3911**)	439 „	
3913	439 „	NR
3914	439 „	327
3915	439 „	NR
3916	439 „	NR
3919	440 „	
3920	440 „	NR
3922	479 „	330
3924	479 „	
3925	480 „	189
3926	480 „	
3928	480 „	
3933	39 (XXXVI)	NR
3934	39 „	
3935	39 „	467
3936	39 „	103

*) O soluție a acestei probleme a fost dată în vol. XXXVII la pag. 456.

**) Începutul soluției acestei probleme a fost dat în vol. XXXVI la pag. 468.

Nr. problemei	*Pagina la care a fost:* Propusă [1])	Rezolvată [2])
3939	40 (XXXVI)	
3943	79 „	26
3944	79 „	NR
3945	79 „	
3948	80 „	
3949	80 „	26
3950	80 „	
3958	119 „	
3961	159 „	
3965	159 „	
3973	199 „	468
3974	199 „	104
3975	200 „	
3976	200 „	
3977	200 „	
3978	200 „	61
3983	238	NR
3984	239 „	105
3985	239 „	
3987	239 „	362
3988	240 „	
3989	240 „	192
3999	280 „	
4000	280 „	
4005	319 „	
4009	320 „	106
4010	320 „	NR
4013	359 „	NR
4021*)	398 „	NR
4022	398 „	
4024	399 „	
4025	399 „	107
4028	400 „	
4029	400 „	
4030	400 „	NR
4031	439 „	
4033	439 „	152
4034	439 „	NR
4035	440 „	
4038	440 „	
4039	440 „	28
4041	38 (XXXVIII)	
4044	479 (XXXVI)	
4045	479 „	NR
4046	480 „	
4053	39 (XXXVII) 120 (XXXVIII)	NR
4055	39 (XXXVII)	
4056	79 „	
4059	40 „	NR
4060	40 „	

Nr. problemei	*Pagina la care a fost:* Propusă [1])	Rezolvată [2])
4061	79 (XXXVII)	
4062	79 „	NR
4063	79 „	274
4066	80 „	
4067	80 „	
4068	80 „	NR
4070	80 „	NR
4073	119 „	NR
4074	119 „	
4075	120 „	
4080	120 „	
4083	159 „	
4084	159 „	
4085	159 „	NR
4088	188 „	
4089	160 „	412
4091	199 „	
4093	199 „	
4096	200 „	
4097	200 „	
4098	200 „	NR
4102	239 „	NR
4103	239 „ 120 (XXXVIII)	NR
4104	239 (XXXVII)	
4105	240 „	
4106	240 „	64
4107	240 „	
4108	240 „	
4111	279 „	NR
4112	279 „	NR
4113	279 „	29
4114	318 „	67
4118	280 „	NR
4119	280 „	331
4120	280 „	
4121	318 „	NR
4123	319 „	NR
4125	319 „	
4126	319 „	
4127	320 „	
4129	320 „	276
4132	359 „	NR
4134	359 „	
4135	359 „	
4137	360 „	69
4140	360 „	513
4146	399 „	
4147	399 „	
4148	400 „	NR
4150	400 „	NR

*) O soluție parțială a acestei probleme a fost publicată în vol. XXXVII pag. 233.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]
4151	438 (XXXVII)	NR
4154	438 „	
4155	439 „	
4156	439 „	
4157	439 „	
4158	440 „	
4159	440 „	31
4160	440 „	515
4161	478 „	NR
4162	478 „	
4163	478 „	NR
4165	479 „	
4166	479 „	
4167	479 „	NR
4168	480 „	
4169	480 „	NR
4170	480 „	
4172	39 (XXXVIII)	
4173	39 „	
4174	39 „	230
4175	39 „	
4177	40 „	
4178	40 „	
4179	40 „	370
4180	40 „	
4181	78 „	
4183	79 „	372
4184	79 „	
4185	79 „	
4186	80 „	
4187	80 „	
4190	80 „	
	120 „	
4191	118 „	
4192	118 „	NR
4194	119 „	
4195	119 „	415
4196	119 „	
4197	120 „	418
4199	120 „	
4200	120 „	
4201	239 „	277
4203	159 „	NR
4205	160 „	
4206	160 „	NR
4207	160 „	113
4208	160 „	374
4210	160 „	NR
4213	198 „	NR
4214	198 „	
4215	199 „	
4216	199 „	517
4218	199 „	
4219	200 „	420

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]
4220	200 (XXXVIII)	376
4221	239 „	73
4223	239 „	279
4224	239 „	
4225	239 „	
4226	240 „	NR
4227	240 „	
4228	240 „	
4229	240 „	32
4230	240 „	NR
4232	279 „	
4233	279 „	472
4234	279 „	
4235	279 „	
4236	280 „	NR
4237	118 (XXXIX)	423
	200 „	
4238	280 (XXXVIII)	
4239	280 „	
4240	280 „	NR
4242	319 „	282
4243	319 „	
4244	319 „	
4245	319 „	
4246	320 „	
4247	320 „	
4248	320 „	
4249	320 „	NR
4250	383 (XXXIX)	
4251	359 (XXXVIII)	
4252	359 „	NR
4253	359 „	230
4254	359 „	
4255	359 „	
4256	359 „	
4257	359 „	
4258	360 „	
4259	360 „	153
4260	360 „	35
4261	399 „	
4262	399 „	36
4263	399 „	332
4264	399 „	424
4265	400 „	115
4266	400 „	
4267	400 „	472
4268	400 „	154
4269	400 „	
4270	400 „	
4271	439 „	NR
4272	439 „	234
4273	439 „	
4274	439 „	
4275	439 „	NR

Nr. problemei	*Pagina la care a fost:* Propusă [1])	Rezolvată [2])
4276	439 (XXXVIII)	
4277	440 „	NR
4278	440 „	
4279	118 (XXXIX)	
4280	440 (XXXVIII)	NR
4281	479 „	NR
4282	479 „	
4283	479 „	NR
4284	479 „	333
4285	479 „	
4286	480 „	
4287	480 „	NR
4288	480 „	NR
4289	480 „	NR
4290	383 (XXXIX)	NR
4291	38 „	426
4292	38 „	117
4293	38 „	378
4294	39 „	
4295	39 „	156
4296	198 „	
4297	40 „	
4298	40 „	
4299	40 „	
4300	40 „	NR
4301	78 „	NR
4302	78 „	
4303	78 „	NR
4304	79 „	
4305	79 „	
4306	79 „	
4307	79 „	
4308	80 „	
4309	80 „	235
4310	80 „	
4311	119 „	236
4312	119 „	
4313	119 „	
4314	119 „	
4315	120 „	NR
4316	120 „	
4317	120 „	
4318	120 „	
4319	120 „	NR
4320	120 „	NR
4321	159 „	284
4322	159 „	NR
4323	159 „	237
4324	159 „	379
4325	159 „	
4326	159 „	
4327	160 „	381
4328	160 „	
4329	160 „	

Nr. problemei	*Pagina la care a fost:* Propusă [1])	Rezolvată [2])
4330	160 (XXXIX)	
4331	198 „	
4332	198 „	NR
4333	198 „	NR
4334	199 „	520
4335	199 „	
4336	199 „	
4337	200 „	NR
4338	200 „	
4339	200 „	
4340	200 „	NR
4341	239 „	NR
4342	239 „	NR
4343	240 „	
4344	240 „	NR
4345	240 „	
4346	240 „ 336 „	475
4347	240 „	
4348	240 „	428
4349	240 „	
4350	240 „	
4351	286 „	
4352	286 „	NR
4353	286 „	
4354	287 „	
4355	287 „	
4356	287 „	NR
4357	288 „	NR
4358	288 „	NR
4359	288 „	NR
4360	334 „	NR
4361	334 „	
4362	334 „	NR
4363	335 „	NR
4364	335 „	NR
4365	335 „	NR
4366	335 „	NR
4367	336 „	
4368	336 „	NR
4369	336 „	
4370	336 „	NR
4371	383 „	525
4372	383 „	
4373	383 „	NR
4374	383 „	NR
4375	383 „	
4376	384 „	NR
4377	384 „	NR
4378	384 „	
5379	384 „	
4380	384 „	NR
4381	430 „	NR
4382	431 „	NR

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
4383	431 (XXXIX)	
4384	431 „	NR
4385	431 „	
4386	431 „	
4387	432 „	
4388	432 „	NR
4389	432 „	NR
4390	432 „	NR
4391	478 „	NR
4392	478 „	NR
4393	478 „	NR
4394	479 „	NR
4395	479 „	NR
4396	479 „	NR
4397	479 „	NR
4398	480 „	NR
4399	480 (XXXIX)	NR
4400	480 „	NR
4401	480 „	NR
4402	480 „	NR
4403	526 „	NR
4404	526 „	NR
4405	526 „	NR
4406	526 „	NR
4407	527 „	NR
4408	527 „	NR
4409	527 „	NR
4410	527 „	NR
4411	528 „	NR
4412	528 „	NR
4413	528 „	NR
4414	528 „	NR

I. EXERCIŢII *)

Aritmetica	8(118), 14(197), 15(197), 18(334), 19(382).
Algebra	3(37), 4(77), 5(77), 9(157), 16(239), 17(286), 22(477). 23(526).
Geometria	20(430), 21(430).
Trigonometria	1(37), 2(37), 7(78), 10(157), 11(157), 12(158).
Geom. Analitică	6(77).
Analiză	13(158).

J. TABLOUL NUMELOR

Abason E. 5, 6, 81, 85, 144, 175, 176, 215, 216, 217, 218, 320, 323, 337.
Abel 220.
Abramescu N. 5, 6, 175, 177, 234, 408, 448, 457.
Acikgheozian N. 276.
Adams R. C. 219.
Alaci V. 5, 6, 178, 220, 289, 319, 408.
Albert A. A. 96, 174, 359
Albert I. 319
Aldea N. N. 29, 61, 62, 101, 103, 106, 113, 190, 274, 276, 279, 361, 371, 375, 376, 411, 414, 467.
Alexandrescu T. I. 15.
Alexandrini O. 15, 246.
Alexandru Ioan I. 404.
Alexiu I 183, 189, 235, 237, 238.
Aliman I. V 61, 189.
Altschiller-Court N. 24, 87, 174.
Aly Paşa 203.
Amărică T. 209, 382, 428, 475.
Amfilochie 267.
Amoroso L. 146.
Ananiescu A, 208, 339
Anastasescu I. M. 154, 378.
Anca I. I. 208, 237, 427.
Angelescu A. 6, 175.
Angelescu C. 178.
Angelescu E. 25.
Angheluţă Th. 5, 6, 113, 120, 175, 319, 490.
Anguita F. 55.
Antonescu N. 101, 103.
Antochi I. C. 209.
Antoniu C. 338.
Antoniu E. 61, 196.
Antoniu S. I. 5, 6, 57, 64, 81, 85, 160, 330, 331, 332, 376, 377, 382, 445, 480.
Anonim 371, 412.
Apollonius 28, 406.
Apostol G. V. 209, 428.
Apostol I. V. 382.
Apostolescu A. G. 188.
Apostolescu Em. 154, 209, 475.
Appell P. 97, 423.
Arago 403.
Arcadian P. N. 228.
Archibald C. R. 219.
Archimede 46.
Arghiriade Em. 6, 25.
Arion C. 402.
Aristophane 210.
Artaki-Acik N. 371, 514.
Atkinson J. E. 408.
Aubert P. 132, 433.

*) Numerele din paranteză indică pagina, iar cele din afară, numărul ce-l poartă exerciţiul

Augustin S. R. 228.
Aurian I. 152, 183.
Avram N. C. 32, 36, 76, 113, 55, 190, 234, 237, 238, 375, 376, 430, 475, 523, 524
Avramescu C. 6.

Babini J. 457.
Baciu G. T. 511.
Bacon 243.
Badea N. I. 285.
Bădescu A. L. 6.
Bădescu E. A. 102, 117, 154, 189, 234, 236, 373, 375, 377, 378, 428, 524.
Bădescu N. 208.
Bădesco R. 144.
Bagdat 402
Baidaff I. B. 6, 96, 144, 220, 404, 405, 408, 456, 508.
Baire 175.
Balaban V. 15, 82, 242, 243, 244, 245.
Banach 318.
Banciu I. 6, 149.
Bănulescu M. 457.
Barbilian D. 6, 95, 175, 179, 323, 345, 362, 369, 508.
Bardan D. 176.
Barisien N. E. 150, 184.
Barnard S 174, 266.
Baropulos Th. 266.
Barzin 175.
Basoco A. M. 219.
Baten D. W. 456
Bell T. E. 96, 219.
Bernoulli 456.
Bernstein A. B 174.
Bernstein V. 221.
Berra S E. A. 508.
Besicovitch 221.
Bessel 493.
Bézout 474.
Bianu B. 176.
Bianu V. 178.
Biernacki M. 145, 408.
Birkhoff G. 96, 174, 318.
Blănaru I. 208.
Bleiweiss P. 189.
Bliss A. G. 219.
Bloch A. 144.
Bòcher 179.
Bochner S. 456
Boerescu P. G. 189.
Bogdan G. I. 208.
Bohr H. 175, 221.
Boian C. I. 189, 384.
Boian D. E. 208.
Boiangiu Gh. 427.
Boitan N. 428.
Bolgar V. D. 274.
Bolintineanu D. 222.
Borel E. 96, 99, 162, 221, 407, 408.
Borneanu G. 6.
Bortnovsky V. 106.
Borza P. N. 154, 234.
Bosanquet S. L. 174.
Botea G. N. 5, 6, 39, 57, 79, 90, 92, 119, 129, 144, 175, 177, 178, 189, 230, 257, 287, 336, 378, 432, 440, 479, 480, 509, 527.
Botez N. N. 360.
Botez S. M. 57, 99.
Botezatu P. Gh. 382.
Bouligand G. 175.
Bourlet C. 277, 467.
Botschay Ş. 203.
Brăescu S. 515.
Brahana R H. 219.
Bratu G. 6.
Brener M. A. 6.
Brenke C. W. 174.
Brezuica C. I. I. 188, 511.
Brica M. 266.
Brioschi 488.
Briot 403
Brocard 48, 292, 400.
Brouwer 175
Bruckner V. 6, 81, 85.
Buchholtzer E. 178.
Bucur V. 208.
Budaeus 389.
Budeanu C. 176, 237, 378, 475.
Budeanu I. 7.
Buicliu Gh 5, 7, 19, 35, 39, 47, 61, 81, 82, 85, 101, 107, 113, 119, 121, 129, 132, 145, 159, 173, 189, 192, 197, 225, 227, 230, 234, 266, 282, 283, 288, 289, 290, 309, 325, 333, 338, 360, 361, 374, 384, 399, 431, 434, 445, 472, 477, 478, 492, 495
Buiculescu C. 338.
Bujoreanu N. 7.
Bulancea I. 101.
Bunescu D. Al. 5, 7, 19, 81, 85, 338, 434.
Bungescu I. 7.
Bungeţianu D. 131.
Bungeţianu P. 223, 230, 234, 371, 373, 377, 381, 416.
Buradescu T. 7.
Burcea S. N. 209.
Burlacu E. 103.
Bursan C. 209, 378.
Buşilă A. 7.
Buşilă D. C. 7, 81, 85.
Buşilă I. 7, 22, 434
Butan M. A. 106.
Buzincu I. 208.

Calcan C. S. 209.
Călin M G. 511.
Călugăreanu G. 457.
Cambureanu V. 7.
Cambureanu V. D. 7.
Cantor 161.
Capoulade J. 408.
Capriel H 21.
Capriel I. 7.
Caracudovici M. 236.
Caraman A. 208, 339.
Caraman E 7.
Cardova G. 117, 118, 147, 156.
Cârjă V. 428.
Carmichael D R. 456.
Carnot 90, 91, 92, 343, 407.
Carolo 388,
Carrole L. 219.
Carson 456.
Cârstoiu I 28, 103, 106, 230, 276, 514.
Cartan E 57, 98, 175.
Cartan H. 99.
Cartesio 164.
Cartwright L. M. 408.
Carver B. W. 210, 399.
Casimir Gr. 131.
Cassian Gh. 7.
Cassini 77.
Căşveanu C. 382, 428, 475.
Catalan 290.
Cauchy 161, 175, 487.
Cazacu N. C. 7.
Cazanacli P. 510.
Ceauşescu V. 113, 117, 154, 156, 209, 230, 234, 235, 237, 285, 373, 375, 378, 381, 382 417, 419, 424, 425, 427, 445, 475.
Cehan G. A. 428, 475.

Cesaró 219.
Ceva 328, 329, 343, 482.
Chardson D. G. R. 408.
Chazy J 408.
Chirea A. I. 208.
Chiriac C. 31, 76. 113, 209, 276, 283, 285, 371, 375, 382, 414, 428, 475, 514.
Chiricuţă A. 7.
Chiriţă M. 37, 154, 209, 334, 472.
Chirnoagă E. 176.
Chiţu P. M. 41.
Chiţulescu I. I. 7, 183
Chupin 482.
Cicerone 386.
Cioc I D. 208, 338, 433.
Cioc M. 8.
Cioc M. M. 190.
Ciolac G. 131.
Ciorănescu N. 5, 8, 39, 80, 81, 85, 153, 154, 175, 176, 177, 179, 188, 198, 268, 288, 323, 334, 336, 337, 374, 376, 405, 458, 508.
Ciucă I. I. 209.
Clarkson A. J. 219.
Claudian V. 359.
Clifford H. A. 456.
Climescu C. 242.
Coadă I. 209.
Coandă I. V. 382.
Cocea Gh Th. 101, 103, 189, 378, 379, 415, 511, 527.
Coculescu N. 131.
Codreanu J. T. 407.
Codrescu Th. 57.
Cohen W. L. 456.
Cohn L. A. 375.
Cojocaru P. P. 208.
Colucci A. 488.
Constantin-Vodă 267.
Constantinescu Em. 131
Constantinescu G. 8.
Constantinescu G. G. 460, 461, 463, 492.
Constantinescu J. 176.
Constantinescu T. 8, 81, 82, 83, 85.
Constantinescu Z. 5, 8.
Constantinidis F. 266.
Conta V. 20, 93, 178.
Conwell H. H. 359.
Copel P. 176.
Cornea D. 404.
Cornescu M. 428.
Cortambert 403
Cosăcescu C. N. 131.
Coşereanu I. 189.
Coşniţă C. 28, 40, 55, 102, 103, 105, 106, 107, 220, 228, 229, 262, 327, 372, 411, 441, 511, 512.
Coşniţă V. 511.
Coşoviiu D. S. 209, 235.
Costache N. N. 61, 189.
Costăchescu V. C. 157.
Costinescu D 8.
Coteanu I. V. 428, 445.
Cozadini 222.
Cozma V. 209, 338, 428, 433, 445, 475.
Crăcea Al. 428
Craig V. H 219, 456.
Craiu N. I. 189, 191, 361.
Creangă V. 209.
Crişan H. 99.
Cristescu I. 290.
Cristescu L. 290.
Cristescu V, 15, 21 42, 43, 82, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 257, 289, 290, 291, 292, 293, 294.
Cristopol A. C. 120, 154, 209, 234, 339, 428.
Cristos 94.
Cristovici 491.
Crivăţ I V. 29, 190, 191, 464, 466, 468.
Crivăţ T. 131.
Cseke W. 117, 154, 156, 234, 236, 238, 378, 382, 445, 522.
Cuciureanu St. 62.
Culianu N. 242
Curchi I. 113, 276, 280, 281, 372, 377, 423, 472.

Dan M. 381.
Dănciulescu G. V. 511.
Dângă V. 26.
Darboux 129, 417, 438, 442.
Dăscălescu Hr. 511, 512.
Dăscălescu V. C. 209.
Dassen C. C. 220.
Dautheville S. 433.
Davidescu Em. 15, 82, 244.
Davidescu M. 224
Deac I 190, 330.
Deaux R. 24, 174, 359.
Decean G. G. 209.
Decerf A. 359, 409
Demellune J. 359
Demetrescu A. Gr. 130.
Demetrescu C. 130.
Denjoy A. 175.
Desargues 91, 92, 220.
Descartes 318.
Devisme J. 408.
Deweck M. 510.
Diaconescu Gh. D. 445.
Diaconescu V. T. 511.
Dickson E. L. 96, 174.
Dieudonné J. 24. 319, 456.
Diocles 196.
Dirichlet 219, 221, 222.
Disescu 402.
Dobbs J. W. 96.
Dobrescu D. P. 116, 117, 156, 209, 236, 237, 238, 284, 338, 371, 378, 428, 433, 472, 476, 521.
Dobrescu G. L. 237.
Dobrescu St. 26.
Dobrovici G. G. 460.
Dogaru D. 414.
Donciu N. 120, 370, 468.
Donici Al. 98, 144.
Dordea Tr. 15, 188, 291.
Dospinescu M. I. 242.
Dostor 482.
Douglas J. 408
Drăgan C. 274.
Drăghiceanu M. 402.
Drăghiceanu M M. 402, 403.
Drăguţ M. 154, 234, 280, 428.
Drâmbă C. 175, 323.
Dresden A. 144.
Dreyfuss 162.
Dufour L. 174, 456.
Dumitrescu A. D 8, 199, 398.
Dumitrescu E. 274, 512.
Dumitrescu I. Gh. 5, 8.
Dumitrescu O. V. 208
Dumitriu E. V. 209.
Dumitriu T, 209, 446.
Duncan C. D. 96, 174. 456.
Dupont A. 407.

Edgeworth 144.
Efstate S. 414.
Einstein 162.
Elefterescu M. 156, 361.
Emmanuel D. 178.
Enache D. I 208.
Epuran I. 64, 103, 104.

Erbiceanu C. 15.
Errera A. 175.
Esteve R. 97.
Euclide 45, 56, 62, 203, 389.
Euler L. 25, 103, 104, 105, 123, 136, 175, 240, 322, 342, 368, 433, 466, 467, 507.
Eusebium 386.
Evolceanu V. 15.

Fabius D. 113, 116, 153, 154, 280, 371, 475.
Faţe A. M. 468.
Favard J. 221.
Fejér L. 96.
Felix C. 8.
Fenichi A. 208, 237, 381
Ferderber B. 154.
Fermat 23, 177, 211, 359.
Ferrari G 154.
Feuerbach 41, 42, 43, 98, 123, 126, 159, 292, 293, 294, 295
Fianu I. 209.
Fianu J. E. 219.
Fibonacci 224, 299, 300, 301, 302.
Filipescu Em. G 8, 81, 85, 176, 457.
Finkelstein 475.
Floareş I. M. 511.
Florea G. 208.
Florescu B. I. 24, 171, 183, 299, 302, 354.
Florescu G. H. 209, 236, 285, 382, 428, 476
Florescu M. U. 159, 183, 188, 383, 463, 511.
Foca I. 511.
Focşa D. 179.
Focşeneanu I. M. 8, 101, 462.
Foraker A. F. 219.
Fourier 174, 216, 219, 359, 456
Fowler 219.
Fréchet 359.
Fredholm 144, 175, 458.
Froda A. 175.
Fuchs 175.
Fundăţeanu C. I. 8.

Gabrielescu R. 8.
Gaciu A. 208, 237.
Galburn H. 407.
Gâlcă I. T. 8
Garabedian A. C. 318.
Garcet 403.
Garver R. 95.
Gâscă C. V. 209.
Gataianţu B. 189.
Gavrilescu N. C. 209, 378, 427, 428, 446, 522.
Gauss 25, 118, 159, 177, 509.
Gehman M. H. 25
Geier H. A. 236, 280, 378, 427.
Gent S. K. 456.
Genty 481 483.
Georgescu C. 412.
Georgescu G. A, 209, 339.
Georgescu I. N. 8, 81, 85.
Georgescu M. 147.
Georgescu N. N. 8 81, 85.
Georgescu N. P. 209.
Georgescu Piteşti D. 160.
Georgescu-Roegen N. 8, 188.
Georgikopoulos C. 385
Georgio 383.
Germani D. 176
Germany H. J. R. 174, 219, 318, 320
Germany H. B. 408.
Gheorghiu Al. Al. 271.
Gheorghiu A. M. 9
Gheorghiu A. Ş. 9, 175.
Gheorghiu C. Ad. 28, 106, 120, 128, 151, 228, 361, 406, 511.
Gheorghiu S. I. 9, 176.
Gheorghiu Th. Gh. 5, 9, 39 80, 106, 120, 133, 156, 200, 268, 274, 320, 327, 337, 361, 431, 463, 480, 511, 512, 513, 528.
Gheorghiu V. 338, 428, 445.
Ghermănescu N. M. 5, 8, 26, 28, 40, 52, 64, 69, 72, 78, 100, 118, 148, 175, 199, 200, 220, 222, 240, 267, 320, 337, 351, 360, 408, 410, 419, 423, 424, 428, 432, 458, 480, 493, 496, 497, 528.
Gheţu W. 209.
Ghibaldan I. 246.
Ghika A. 175.
Ghimuş D. A. 9.
Ghiocel V. V. 116, 154, 234, 235, 475.
Ghişoiu I. P. 61, 102, 106 107, 188, 190, 228, 274, 327, 511, 512.
Ghiţescu Sp. 145.
Ghiţescu V. 9.
Ghiuţă V. Gh 332, 378.
Gibau Gr. N. 445.
Gibbings N. N. 408.
Glareani H. 388.
Gluşco N. 106.
Godeanu I. V. 209, 240, 276, 283, 338, 382, 433, 475, 514.
Godeau 318.
Godeaux L. 96, 456, 457.
Goethe 403.
Gogu C. 245
Goldenberg I. E. M. 476.
Gonzales O. 508.
Gonzales O. M. 220, 407, 457.
Goormaghtigh R. 24, 122, 174, 205, 219, 221, 303, 318, 359, 456.
Gospodin T 103.
Gourin E. 96.
Grass I. 391.
Grattan-Guinness H. G. 174.
Greab I. V. 237, 381.
Grecu M. C. 189.
Green 146, 174.
Grigorescu A. V. 36, 117, 209, 236, 237, 238, 285, 338, 371, 378, 381, 428, 433, 476, 520.
Grigorescu C. 9.
Grigoriu I. V. 209.
Grossu I. A. 190.
Grossu I. M. 102, 228.
Grubenmann I. Gr. 511.
Grünbaum M. 189, 442.
Guillaume O. 96.
Gurău J. 274.
Gutzu Al. 176.
Gutzu V. 9.

Hadamard J. 221.
Haim D. 189.
Hall M. 174
Hall W. T. 96.
Halperin P. Al. 101, 190
Hamley R. H. 509.
Hamburger L. 442.
Hambury Hankin E 509.
Hamel 266.
Hanciu P. G. S. 209.

Hanganu D. M. 9, 98.
Harbuz I. G. 522.
Haret C. Sp. 19, 130, 402, 403.
Haret I. C. 382, 428.
Hatzidakis N. 16, 385.
Hausdorff 96.
Hazlett C. O. 219.
Herbrand J. 266.
Hermite C. 486, 487, 488.
Hestenes R. M. 456.
Heuchamps E. 24.
Heyden S. 386.
Hill E. 174.
Hilt A 238, 381.
Hodge D. V. W. 174.
Hollcroft R. T. 219.
Honterus J. 391, 392.
Hornstein H. S. 117, 156, 209, 238, 285, 475, 477
Hoxmark G. 219.
Hulubei C. T. 271.
Humbert P. 408.
Huntington V. E. 359
Hurmuzescu D. 178.
Hurwitz H. 319.
Hutcherson R. W. 359.

Jackson D. 359.
Jacob C. 98, 408
Jacob St. E. 61, 62.
Jacobescu P. I. 276.
Jancu H D. 274.
Janculescu R. 9, 274, 337.
Ifrim V. D 428.
Ignat M. P 361.
Iliescu B. D. 382, 428.
Iliescu Gh. 5, 9, 22, 81, 85 338.
Iliescu Tr. 9.
Iliuţă Dăbuleni I. I. 61.
Ingraham H. M. 25, 144, 318.
Ioachimescu A. G. 9.
Ioachimescu G. A. 9, 81, 82, 85, 149, 178, 244, 246, 337, 433.
Ioanovici A. 9, 81, 84, 85, 86.
Ion Sfântul 389.
Ionescu-Biss H. 26, 31, 61, 63, 64, 103, 105, 157, 276, 371, 424, 446, 467, 514.
Ionescu-Bujor C. 5, 9, 79, 97, 160, 240, 287, 335, 337, 384, 431, 479, 527.
Ionescu C. E. 445.
Ionescu D. 381, 476.
Ionescu D. C. 276, 414.
Ionescu H. 274.
Ionescu I 5, 9, 17, 18, 22, 23, 25, 35, 36, 37, 38, 47, 52, 53, 56, 57, 58, 81, 82, 84, 85, 94, 97, 98, 117, 119, 130, 131, 145, 148, 149, 159, 167, 176, 177, 178, 179, 183, 198, 204, 210, 212, 220, 221, 222, 223, 225, 236, 237, 239, 240, 244, 248, 258, 261, 267, 284, 288, 294, 306, 320, 323, 333, 335, 337, 348, 360, 383, 385, 392, 399, 400, 403, 404, 407, 408, 409, 431, 433, 444, 458, 460, 479, 491, 492, 509, 510, 525, 528.
Ionescu I. V. 61.
Ionescu T. 402.
Ionescu-Ţiu C. 29, 61, 64, 105, 361, 377, 423.
Ionescu V. 208.
Ionescu V. D. 10, 175, 256, 338, 457.
Ionescu Zane D. G. 10.
Iorceanu S. 458.
Iovănescu D. 511.
Isaia 403.
Iscu S. 271.
Isidoru de Onciul 130.
Istrati Dr. C. 130.
Ivănescu C. 31, 67, 76, 113, 115, 154, 155, 234, 236, 276, 280, 373, 375, 376, 378, 381, 383, 411, 414, 419, 420, 425, 472, 514.

Jacobi 143.
Javary A. 433.
Javons Stanley W. 162.
Jeba I. 271.
Jerabeck 394, 395.
Jijie A. 10.
Jiquidi A. 321.
Johannes 203.
Jordan 146, 456.
Julia G. 221.

Kakeya S. 351.
Katz P. 188.
Kaufmann N. 10.
Keazney M. A. R. 509.
Kennison S. L. 359.
Kinbaum M. 82, 244.
Kirkman P. J. 96.
Klinger D. O. 117, 156, 475.
Klinne R. J. 25, 219.
Knaster 456.
Koebe 179.
Kopfmayer J. 163.
Kristovics B. 211, 259, 304, 306.
Kristovicz A. 305.

Laboccetta L. 319.
Lagrange 179, 320, 456.
Lalescu Tr. 15, 83, 103.
Lambert G. 456, 509.
Langer E. R. 174.
Langley Mann E. 96.
Laplace 175, 220, 403, 456, 459.
Lascăr G 131.
Latshaw V. V. 219.
Launay Louis de 456.
Laurel B. 25.
La Vallée Poussin Ch. 320.
Lazăr Gh. 402, 409, 444.
Lăzărescu N. 131.
Lazu C. 10. 81, 85.
Lebădă I. D. 209, 445, 522.
Leber M. 113, 116, 373, 376, 475.
Lebesgue 96.
Leduc 133.
Leemans J. 25, 456, 509.
Legendre A. M, 25, 143, 174, 175, 177, 508.
Lehmer N. D. 174, 219.
Lemoine 48, 49, 55, 292 318, 401, 457.
Lenco I. 65, 371.
Leonida D. 44, 163, 386, 391.
Le Roy E. 223.
Levi-Civita T. 96.
Levy H. 359.
Libois P. 119, 359.
Licherdopol-Bura A. M. 61, 64.
Lichtenstein 58.
Lindelof 174, 219, 318, 359.
Lindemann 211.
Linteş I. 5, 10, 31, 51, 76, 134, 135, 208, 263, 286, 355, 356, 383, 448, 457, 494, 515, 516.
Liouville 488.

Liteanu Gh. 5, 10, 226, 257, 277, 338, 344, 372, 412, 414, 423, 446, 463, 468, 513, 514.
Locusteanu M. 25.
Lodge A. 174.
Longchamps 242, 292.
Longinescu G. G. 178.
Longinescu N. I. 178
Lorent 318.
Lorey W. 319, 359.
Loria G. 96.
Lucas 229.
Lucescu I. G. 242.
Lupasi F. 266.
Lupescu G. C. 101, 189.

Macduffee C. C. 96.
Mach 323.
Mache 246.
Maclaurin 407.
Macoschi I. 106.
Maftei M. C. 428.
Malcoci C. 10.
Mănac M. 428, 476, 521.
Mănescu C. 130.
Mănescu M. 23, 36, 61, 69, 154, 156, 173, 209, 234, 236, 238, 276, 371, 375, 412, 427, 475, 514.
Manoilescu M. 10, 81, 84, 85.
Mansion P. 242.
Mărăcine B. 10, 81, 85
Marcelino S. 228.
Marden M. 174.
Mareş E. 29, 371, 376.
Mareş T. 10, 81, 85.
Mărgărit G. 428.
Margulis G. 475.
Margulius M. 26, 28, 29, 31, 35, 37, 61, 64, 92, 102, 103, 106, 107, 113, 116, 117, 154, 156, 190, 214, 230, 234, 276, 280, 333, 362, 365, 371, 373, 410, 414, 417, 419, 427, 465, 467, 471, 512, 514.
Marin D. 428, 476.
Marin N. N. 209.
Marinaş B. M. 511.
Marinescu M. 144.
Marinoschi E. G. 209.
Mărmureanu G. 209
Marteş V. G. 209, 235, 285, 339, 381, 475.
Martian D. 338.
Mateescu Cr. 5, 10, 81, 85, 222, 337.
Matei A. 154, 238, 378.
Matei F. I. 208, 237, 381.
Mătieş V. I. 31, 266, 271, 457.
Mavritio di Savoia 44
Mavrodin D. 35, 65, 113, 117, 154, 155, 156, 209, 235, 238, 276, 285, 331, 332, 371, 375, 382, 414, 419, 422, 425, 427, 428, 472, 475, 477, 514.
Mayer 408.
Mazilu C. G. 117.
Mazilu C. P. 117, 151, 156, 197, 209, 234, 235, 237, 280, 283, 284, 371, 375, 378, 381, 411, 419, 423, 428, 445, 474, 475, 521, 525.
Mehedinţi D. D. 209, 238, 285, 378, 381, 427, 522.
Mehrotra M. B. 456.
Meissnern H 258.
Melanchton 391.
Melik I. 242
Menelaus 229, 262, 482, 483.
Mercureanu S. I. 209, 382, 428, 445, 475.
Mereuţă E. 29, 34, 61, 64, 154, 191, 234, 271, 283, 286, 336, 371, 375, 472, 514, 524.
Mereuţă V. 10.
Messens M. 25.
Metea V. 208, 237, 339, 381.
Métius A. 305.
Miclescu A. C. 131.
Mihăescu A. 190.
Mihai Viteazul, 45.
Mihail-Stăneşti I. 475.
Mihăilă N. 428.
Mihăileanu N. N. 24, 32, 63, 67, 68, 77, 79, 100, 101, 103, 105, 106, 107, 113, 115, 116, 128, 129, 149, 150, 152, 158, 189, 191, 196, 228, 230, 274, 279, 328, 361, 373, 379, 383, 405, 414, 417, 418, 425, 426, 430, 443, 449, 468, 470, 511, 517.
Mihăilescu P. T. 10.
Mihalache V. I. 209, 381, 382, 428, 522.
Mihalcea E. 274.
Mihalcea O. 378.
Mihalopol C. 10.
Mihe N. 285.
Mihoc G. 175, 222.
Milea E. 414.
Milles F. F. 509.
Milescu Spătarul N. 294.
Miller W. 266.
Milu I. N. 209, 236, 428, 476
Mineur Ad. 24, 96, 144, 219, 220, 266, 318, 319, 359, 407, 456, 509.
Mircea A. 411.
Mircea A. N. 209.
Mircea M. E. 10, 100
Mircea Vodă, 84.
Mirea N. St. 15.
Mişchinea St. D. 189.
Mitache S. A. 382, 476.
Mitrulț H. 97.
Mitescu C. 11, 185.
Mitescu N. 131.
Mititelu C. C. 11, 81, 85.
Mititelu C. I. 11.
Mladin Gh. 188.
Moise 130.
Moise E. 154, 234, 280.
Moldovan L. 208.
Monge 86.
Montel P. 99.
Montucla 210.
Moore H. E. 219.
Moore L. R. 96.
Moore N. C. 219.
Moore S. 25.
Moreux 319.
Morgan 267.
Mosnat E 433.
Mostechy E. M 117, 156.
Motoc D. M. 106, 178, 189.
Moţoi I. 15.
Mrazec L. 178, 402.
Münster 391.
Munteanu S 208.
Murăroiu I. 361.
Musceleanu M. 378.

Naforniţă I. C. 104, 106.
Nagel 416, 418.
Naneş C. 154, 237, 427.
Năstase M. 237, 284, 348, 378, 521.
Năsturaş D. 15.

Natale E. 55.
Naylor V. 174, 408.
Neagu I. T. 209.
Neamţu P. 11.
Nedelescu N. A. 208, 339.
Negoiţă C. 428, 446.
Negrea A. L. M. 62, 116, 154, 156, 189, 236, 238, 276, 280, 332, 371, 375, 376, 378, 381, 414, 423, 428, 468, 472, 475, 476, 514.
Negrei V. 32.
Negrescu T. T. 144, 176.
Negretzu I. 11.
Negură Gr. 131.
Negură St. 11.
Neuberg 88, 242, 248, 292, 434, 435.
Neumann M. 133, 214, 404, 405.
Neville H E. 174, 266.
Newton 159, 407.
Nichifor A. G. 11, 81, 85, 480.
Nichifor M. 378
Nicoară D. C. 382, 428.
Nicolaevici G. 15.
Nicolau Al. 440
Nicolau-Dobridor I. 348.
Nicolau H. C. 5, 11, 81, 85
Nicolau H. D. 188.
Nicolau T. M. 11, 81, 85, 480
Nicolescu D. D. 154.
Nicolescu Gh. 5, 11, 28, 40. 69, 78, 103, 117, 213, 257, 294, 337, 349, 418, 426, 464, 465, 475, 495, 520, 524.
Nicolescu Matei 176.
Nicolescu Miron 5, 11, 146, 152, 153, 175, 199, 222, 294, 302, 335, 338, 344, 458, 526.
Nicolescu N. 15, 82, 83, 244.
Nicolescu V. Al. 11, 154, 155, 214, 294, 338, 344.
Niculescu 179.
Niculescu C. 11.

Olteanu St. 64, 71, 240, 276, 414, 468, 514.
Omar Paşa 203.
Onicescu O. 11, 148, 175, 178, 268, 338.
Oprescu Gh. (Col.) 11.
Oprescu Gh. 101.
Oprescu N. C. 276.
Orănescu O. 5, 11, 188.
Orăşanu D. C. 5, 12, 19, 47, 81, 85, 148, 337.
Orăşanu Gr. 12, 234.
Ore O. 144, 174.
Orfeur H. 266.
Orosium 386.
Oscar II 161.
Otescu I. 131.
Otulescu E. 228

Painlevé P. 161, 162, 408.
Paladi V. 242.
Paleologul G. 266.
Paley R. 25, 359
Paliţa C. 62.
Panaite N. Th. 103, 117, 147, 151, 179, 188, 189, 235, 283, 348, 361. 514.
Panaitescu Sc. 12, 20, 47.
Pantazi Al. 5, 12, 175, 222, 228, 338, 508.
Panţu Z. I. 511.
Panu P. 360.
Papaïoannou C. 385.
Paparizu I 154.
Papelier G. 131, 418, 433.
Pappus 96, 318.
Parepeanu I. 63, 106, 116, 155, 156, 190, 276, 280, 331, 371, 378, 412, 414, 466, 468, 472, 475, 514.
Pârvu A. 5, 12, 79, 81, 85, 383.
Pârvulescu C. 34, 371, 514
Pascal 56.
Pascal E 488
Paşcanu S. 12.
Paşcanu V 290.
Pascu G 131.
Pastor R. J. 220, 457.
Patraulea I. D. 103.
Patraulea N. 61, 77, 103, 104, 106, 183, 196, 230, 414.
Patraulea R. 103.
Patriciu G. T. 12.
Păun M. G 189.
Pavel N. 511.
Peat H. 509.
Peek L. R 219.
Peek M B. 266.
Pelseneer J. 96, 319, 456.
Peterson S T. 219.
Petre O. T. 382.
Petrescu C. 117.
Petrescu C. I. 154.
Petrescu El 338.
Petrescu I. I. 32, 64, 106, 113, 116, 199, 373, 475, 520.
Petrescu O. 236, 238, 285, 381, 428, 522.
Petropoulos C. 385.
Pfaff 146, 147, 175.
Philipide M. 12
Picard P. 219.
Picken K. D. 96.
Piggot E. H 96
Pirksteiner 163.
Pitagora 45, 303, 322, 508.
Plăcinteanu I. I. 175.
Plateau 408.
Plătăreanu M. 176.
Platon 56, 164.
Pliniu II 386.
Poenaru P. 402.
Poeschl T. 405.
Poincaré H 174, 219, 318, 359, 408.
Poirée J. 55, 56.
Polyà 175.
Pompeiu D. 53, 144, 148, 149, 175, 176, 178, 320.
Pop T. 212, 213.
Popp N. 12.
Popp Tr. 12.
Popa Gh. I. 189, 355, 513.
Popa D T, 209, 338, 433.
Popescu B. V. 209, 382.
Popescu C. N. 209, 274.
Popescu C. V. 61, 330.
Popescu-Călineşti I. 81, 82, 85.
Popescu-Greaca V. 428, 475.
Popescu I. 99.
Popescu I. Gh. 286, 324, 432.
Popescu Ion 12.
Popescu M. D. 189.
Popescu M. G. 208.
Popescu M. I. 156, 271.
Popescu N. C. 190, 276, 465, 467.
Popescu St. 61.
Popescu-Stăneşti M 106, 190, 276, 348, 414, 468, 514.
Popovici-Corodeanu 338.

Popovici Tib. 12, 189, 239, 288, 326, 327, 334, 353, 408. 508, 526.
Popovici Th. I. 189.
Popica E. 209, 236.
Portocală M. 12
Postelnicescu M. 283, 285, 348, 476.
Potopeanu Gh. 5, 12, 47, 271.
Praja D. V. I. 131, 242.
Preda C. C. 209.
Predoescu M. 156, 234, 235, 236, 371, 381, 428, 475.
Predoescu M. I 117.
Predoescu M. Tr. 23, 116, 117, 156, 197, 234, 378. 382, 475.
Procopiescu M. 209, 238, 378, 381, 427
Protopopescu Gr. 12.
Puta Tr. 61, 62, 103, 105.
Potnam T. M. 318.

Queterlet 403.

Racliş Rod. 13, 56, 57, 320.
Rado 408.
Radu E. M. 13.
Radu Fl. 190.
Radu I. I. 209
Rădulescu Heliade I. 402.
Raicu A. 188.
Ralea S. M. 475.
Ralet D. I. 242.
Râmniceanu I. C. 185, 464.
Randels C. W. 359.
Regnault 453.
Reichhersdorf 391.
Rentea Gr. N. 188.
Revici T. 13.
Riemann 98, 147, 219, 266.
Riesz F. M. 146
Rigaud Cl. 46.
Riquier 146.
Ritt F. J 96, 456.
Roberts H. J. 96, 456.
Robinson S. 96.
Roco M. 15, 82, 242, 244. 245.
Rojima 219.
Rolle 264, 269, 270, 271, 322, 375.
Roman I. I. 511.
Romniceanu M. 130.
Roos F. C. 219.
Roşca St. G. 62, 64, 103, 104, 105, 153, 276, 414.
Roşculeţ V. A. 511.
Rose 443.
Rosenblatt A. 266.
Roşescu I. I. 271.
Rosskopf M. 359.
Roşu Al. 15, 128, 129, 223, 257.
Roşu Al. Al. 5, 13, 81, 85, 128, 129, 159, 240, 257, 262, 271, 337, 349, 383, 479, 527.
Roşu G. 242, 510.
Roşu V. 13, 510.
Rotaru D. 35.
Rowe H. C. 174.
Roy G 393.
Rudnicki J. 408.
Russe N. C. 189.
Rusu D. C. 64.
Rusu V. G. 209. 237, 382, 428, 446, 475, 522.
Rutherford E. D. 174, 219.

Şabac Gh. I. 32, 209, 236, 237, 238, 339, 381, 428, 521.
Sachelariu N. 266, 304.
Sagastume Berra E A. 96.
Sager I. 31, 34, 35, 36, 67, 72, 116, 121, 154, 230, 233, 236, 276, 280, 333, 371, 381, 405, 425, 428, 472, 475, 514, 516.
Saks 318.
Sălăgeanu A. 13, 81, 85.
Saligny A. 15, 19, 21, 242, 248.
Saligny M. 13.
Salles F. 509
Samatan E. 457.
Sambucus 391.
Sandu I. 64.
Săndulescu I. 209.
Sannia 220.
Sapin A. 456.
Săpunaru S. Gh. 13.
Sarian M. 5, 13, 81, 85, 176, 338.
Savin C. I. 26, 38, 63, 64, 78, 158, 169, 188, 191, 200, 240, 332, 371, 381, 420, 428, 464.
Săvulescu A. C. 446.
Scărlătescu C. I. 407.
Schoenberg J. I. 456.
Scholz H. 266.
Schröter 97.
Schur 175.
Schwatt J. I. 220
Segârceanu N. 178.
Ser J. 222.
Şerban-Ulmeni D. 188.
Şerban-Vodă 267.
Şerbănescu Gh. V. 13.
Sergescu B. 13.
Sergescu P. 5, 13. 57, 58, 145, 146, 175, 176, 178, 211, 220, 222, 277, 289, 360, 409.
Şerbu C. 103.
Servais Cl. 24, 98, 248, 249, 318.
Severi F. 267.
Sfinţescu I. C. 13
Shewart 219.
Shovelton T. S 174.
Shover G 96.
Şiara V. 208.
Sierpinski W. 96, 144, 175, 408.
Silaş Gh. 36, 116, 117, 154, 155, 156, 234, 236, 333, 378, 424, 425, 428, 475, 524.
Silvici V. 382.
Simionescu D Gh. 213, 338, 509.
Simpson 174.
Simson 103, 250, 292.
Slade J. J. 456.
Slebodzinski W. 408.
Smântănescu A. 13, 81, 85.
Smith E. D. 318.
Solacolu C. S. 176.
Solomon 52, 53
Solomon W. 409.
Şova-Grigoreni C. I. 153, 191, 235, 414, 428, 429.
Spathy I. R. 462.
Specht 306.
Spiru I. G. 118, 156, 209.
Sprinceană C. G. 511.
Stamatescu I. 13, 179.
Stamatescu I G. 13, 81, 85.
Stamati M. 285.
Stamatis St. 304
Stan D. 13, 81. 85.
Stan I. A. 61, 62, 63, 64, 103, 106, 189, 228, 349.
Stănciulescu-Piteşti G. 424, 445.

Stănculescu I. Gh. 155, 209, 235, 475.
Stănescu M. E. 445.
Stăneşti M. 234, 336, 371, 378.
Ştefan cel Mare 45.
Ştefan M. 103.
Ştefănescu C. I. 144.
Ştefănescu E. 188.
Ştefănescu P. G. 208.
Ştefănescu S. S. 320
Ştefănescu V. 84.
Steiner 96.
Stephens R. 359.
Stevens 219.
Stewart 494.
Stieltjes 219, 456.
Ştirbu I. G. 209, 235, 428, 446, 475.
Stoian I. 208, 381.
Stoica D. Al 36, 116, 234, 280, 333, 378, 475.
Stoicescu D. 209, 236
Stoicescu D. M. 276.
Stoicescu Dr. 402.
Stoilov S. 175, 178.
Stone H. M. 219.
Straehelin P. 176.
Stratulat I. G. 209.
Stravolca I. 130.
Streder I. 208.
Stroe I. I. 209.
Stroescu A. I. 208, 237.
Struik J. D. 408.
Stupeanu C. Em 428, 446
Sturm 220, 271.
Sturza C. 241.
Suceveanu F. 209.
Sudan G. 100, 175, 320.
Şuşală I. G. 209, 235.
Synge L. J, 408.

Tacchella G. 408.
Tamarkin D. J. 174, 318.
Tănăsescu A. 14.
Tănăsescu A G. 21, 433, 434.
Tănăsescu A. T. 14, 176.
Tănăsescu C. 19.
Ţarălungă G. D. 209, 339.
Taranzos F. 220.
Tătaru N. 237.
Taylor 56, 57, 240, 268, 359.
Tchebycheff 359.
Tell. Al. 212, 213
Teodor D. I. 15.
Teodoreanu N. 208.
Teodoreanu V. 14, 147.
Teodorescu C. C 144, 338, 360.
Teodorescu Gh. D. 176.
Teodorescu I. S. 15.
Teodorescu N. 175, 179, 188.
Teodorescu N. N. 14.
Teodorescu St. 276
Teodorescu St I. 461.
Teodoriu L. 175, 323.
Teodoru D. R. 14.
Thébault V. 25, 38, 43, 48, 49, 55, 67, 73, 88, 90, 93. 96, 97, 98, 119, 144, 159, 171, 174, 198, 207, 221, 239, 250, 258, 282, 287, 304, 332, 335, 343, 359, 383, 400, 401, 426, 430, 437, 444, 457, 478, 483, 490, 491, 509, 510, 517, 526.
Thévenin 509.
Thierrin H. G. 14.
Third A. 249.
Thomas Félix P. 162.
Thomas M J. 408, 456.
Thomsen G. 96.
Thureau-Dangin F. M. 319.
Tica Gall M. P. 155, 156, 371.
Ţino O. 5, 14, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 150, 152, 185, 191, 229, 257, 268, 282, 330, 337, 528.
Ţiţeica Gabriela 14.
Ţiţeica Gh. 5, 14, 81, 85, 99, 148, 149, 162, 175, 176, 178, 221, 222, 246, 247, 267, 271, 292, 304, 323, 339, 433.
Ţiţeica I. I. 285, 476.
Ţiucra P. M. 62,
Tofan P. T. 271.
Tomescu N. N. 319.
Toporăscu Er 176.
Tortrat R. 266
Tourriol B J. 509.
Trăsnitu N. 382, 428.
Travers J. 174.
Tremba Er. 271.
Trifon C. 276.
Trofimov P. 338.
Trufinescu N. C. 104. 373.
Truţescu Şt. 63, 103, 196.
Tucker 359.
Tuckey O. C. 96.
Tudor Gospodin 468.
Ţuhai N. 228.

Ulescu A. 14.
Unghianu I. M. 188.

V. S. 144.
Vâlceanu N. I. 511.
Vâlcovici V. 100, 148, 149. 175, 178, 179, 360, 432.
Valentin I. G. 208.
Valeriu G. M. 209.
Valeriu Gh 427.
Valperga 44.
Van der Lyn G. 24.
Vandermonde 370.
Vandiver S. H. 359.
Vardala I. 14.
Vârlam M. C. 475
Varlam P. 69, 209, 234, 276, 332, 414, 475.
Vasilache G. 208.
Vasilache I 14, 81, 85.
Vasilescu C. N. 209, 382, 475.
Vasilescu Fl. 14.
Vasilescu G. I. 14.
Vasilescu Gr. 14.
Vasilescu Karpen N. 144, 176, 178.
Vasilescu M. 428, 445.
Vasilescu T 131.
Vasiliev I. 463, 511.
Vasiliu A. C. 382, 428.
Vasiliu C. I. 40, 58, 151, 185, 189, 225, 330.
Vasiliu F. 266.
Vasiliu Gh D. 5, 14, 81, 85, 338, 434.
Vasiliu I. M. 209, 382, 428, 475.
Vasiliu-Leoben Gh. 5, 14, 77, 80, 118, 157, 159, 200, 235, 236, 240, 287, 336, 379, 432, 445, 463, 477, 479, 511, 526, 528.
Vasiliu M 14, 189.
Vasu N. 208, 237, 381
Vasu V 26, 28, 61, 62, 103, 105 106, 107, 196.
Vatriquant S. 55
Veblen 408.
Velea M. 61, 190.
Velicescu G. T. 189, 190.
Velicescu N. N. 103, 113, 118, 190, 191, 349, 425, 464, 468.

Vellescu N. I. 189.
Verenca S. 428.
Veronnet Al. 97.
Verren C. 386.
Viciu A. 338.
Viète 164.
Vignaux C. J. 220.
Villat H. 97.
Vişinescu C. 131.
Vişoianu I. C. 228
Vissarion C. I. V. 62, 196, 234, 238, 475.
Voegelin Hayl I. 389.
Vogt V. 323.
Voicu C. I. 189.
Voicu G. N. 189.
Voiteşti P. I. 407.
Vonica I. I. 208.
Voru E. 266.
Vrana C. 130.
Vrânceanu G. 146, 147, 175.
Vuibert H. 96, 144, 148, 175, 205, 220, 242, 266, 319, 348, 359, 407, 457, 467, 509.
Vuolphio I. 386.

Wall S. H. 219.
Walsh L. J. 174, 359, 408
Ward M. 456.
Waring 174.
Watson N. G. 266.
Wawewski T. 408.
Weierstrass 161.
Weiss A. E. 408.
Wertheimer A. 359.
Whitehead C. H. J 174.
Whitney H. 359.
Whyburn T. G 359.
Widder V. D. 456.
Williams C. A. 96.
Williams M. E. 408.
Williams R. A. 96, 359.
Wirner N. 25.
Wittenbauer 405.
Woinarowsky R. 14, 81, 85, 144, 200, 337.
Wong C. B. 96, 174, 456.

Y von-Marcel 434.

Zaharescu I. 209, 236, 475.
Zaharia O. I. 511.
Zaharia O. N 25.
Zamfirescu Gh. I. 28, 102, 103, 104, 106, 113, 191, 230, 328, 330, 414, 468.
Zamfirescu Gr. 15, 26, 81.
Zane D. N. 106, 276, 411, 414, 514.
Zapan Gh. 15, 177.
Zapan Gr. 5, 15, 78, 240, 334.
Zarangiewicz 456.
Zarda I. 61, 62, 103, 104, 106, 277, 468.
Zarifopol G. 242.
Zehfuss 174.
Zervos P. 16, 385.
Ziff S. M. 32, 36, 76, 113, 116, 155, 234, 276, 371, 375, 376, 475.
Zimmermann J. J. 258.
Zlatcu St. C. 15.
Zossima C. 245.
Zottu I. Gh. 15, 82, 242, 243, 244, 245.

K. UVRAJE CITATE

Cărţi

		Pag.
Valperga	Indrizzo del nuovo soldato	44
J. Poirée	L'arithmétique à la portée de tous	55
	Biblia	52, 53, 389
* * *		
J. Poirée	L'algèbre et la trigonométrié à la portée de tous	56
J. Poirée	La Géométrie à la portée de tous	56
Mihail St. Botez	Sur les surfaces conoïdes	57
Th. Codrescu	Uricarul	57
Neuberg	Mémoire sur le tétraèdre	88, 435
R. Esteve & H. Mitault	Cours d'Algébre	97
R. Esteve & H. Mitault	Complements d'Algébre	97
Alex Veronnet	Cours d'algébre de mathématiques spéciales et de mathématiques générales	97
M. D. Hangan	Prescripţiunile Comisiunii germane pentru beton armat 1932	98
Asociaţia Inginerilor diplomaţi ai Şcoalei Politechnice din Bucureşti	Primul Congres al Asociaţiei 29 — 30 Noemvrie 1931	98
P. Montel	Leçons sur les fonctions univalentes ou multivalentes	99
I. Popescu	Computul în Şcòl'a poporală	99

		Pag.
Academia Română	Dicţionarul limbii române	99
F. G. M.	Trigonométrie	118, 464
Isidoru de Onciul	Manualu de Arheologie biblică	130
Moise	Geneza, Exodul, Numeri	130
P. Aubert et G. Papelier	Exercices d'Algébre, d'Analyse et de Trigonométrie	132, 433
Ad. Mineur	Arithmétique	144
P. Sergescu	Spiritul cel nou în legea învăţământului Universitar	145
Ed. Danoël et Steele	Tableau du XX siècle en France	145
Marcel Georgescu	Asupra necesităţii studiului istoriei technicei în Şcolile Politechnice	147
Painlevé P.	Sur les lignes singulières des fonctions analytiques	161
P. Félix Thomas	De la méthode dans les sciences	162
Pirksteiner	Erz-Herzogliche Handgriffe des Zirkels und Linials	163
Pierre Copel	Eléments d'optique géométrique à l'usage des candidats des grandes écoles	176
Gh. Zapan	Memoriu de titluri şi lucrări	177
N. Ciorănescu	Notiţă de titluri şi lucrări	177
Montucla	Histoire des recherches sur la quadrature du cercle	210
Aristophane	Pasările	210
T. Pop	Prescurtare de geometrie practică spre întrebuinţarea şcoalelor primare	212
Ad. Mineur	Trigonométrie	220
J. Favard	Leçons sur les fonctions presque périodiques	221
Vladimir Bernstein	Leçons sur les progrés récents de la théorie des séries de Dirichlet	221
J. Ser	Les calculs formels des séries de factorielles	222
D. Bolintineanu	Călătorii în Moldova	222
P. Sergescu	Les sciences mathématiques en France	222
N. Abramescu şi Gr. Orăşanu	Aritmetica Raţională	234
J. J. Zimmermann	Fundamental-Aufgaben vor der Sonn und Mond-Finsternissen	258
Ad. Mineur	Géométrie analytique plane	266, 319, 407
* * *	Margarita Philosophica	267
* * *	Quaestiones Geometricae	267
Carlo Bourlet	Trigonométrie	277, 467
Niculae Milescu Spătarul	Aritmetica	294
R. N. Racliş	Notiţă de titluri, lucrări ştiinţifice, lucrări didactice	320
Gabriel Sudan	Curs de Algebră superioară şi Teoria numerelor	320
M. Ghermănescu	Memoriu de titluri şi lucrări	320

		Pag.
Ernest Abason	Elemente de Mecanică	320
* * *	Hütte	330
F. G. M.	Exercices de Géométrie	333, 418
A. G. Ioachimescu	Culegere de Probleme de Algebră	351, 353, 433
Şcoala Politehnică din Timişoara	Anuarul, Anii XI, XII, XIII	360
D. Barbilian	Curs de Matematici Elementare	363
Gh. Ţiţeica	Culegere de probleme de geometrie	373, 433
Vuolphio Ioanne	Rudimenta arithmetices	386
Glareani Henrici	De Vi. Arithmeticae practicae	388
I. Voegelin Hayl	Elementale Geometricum ex Euclidis Geometris	389
Sfântul Ion	Apocalipsul	389
Johannes Honterus	Rudimenta Cosmographica	390
M. M. Drăghiceanu	Elemente de Cosmographia prelucrate pentru usulŭ şcólelor secundare	402
Wittenbauer	Aufgaben aus der technischen Mechanik	405
Henri Galburn	Théorie mathématique de l'assurance maladie	407
Gh. Lazăr	Geometria	409
G. Papelier	Exercices de Géométrie moderne	418
I. Ionescu	Comparaţiunea rădăcinilor mai multor ecuaţiuni de gradul al doilea	433
I. Ionescu	Reforma calendarului	433
I. Ionescu	Istoricul învăţământului ingineriei în România	433
I. Ionescu	Viaţa lui Euler	433
I. Ionescu	Despre comparaţiunea construcţiunilor geometrice sau geometrografia	433
I. Ionescu	Maşinile de calcul	433
P. Appel & S. Dautheville	Précis de Mécanique rationelle	433
E. Mosnat	Problèmes de Géométrie analytique	433
A. Javary	Traité de Géométrie descriptive	433
Marcel-Yvon	Méthodes et Problèmes de Géométrie moderne	433
M. Grümbaum	Contribuţii la geometria triunghiului	442
I. Ionesu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu, V. Cristescu	Culegere de Probeme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie	444, 465
G. Lazăr	Aritmetica matematicească	444
G. Nichifor	Curs de Geometrie descriptivă	448
N. Abramescu	Geometrie infinitezimală	448
Universidad Nacional de la Plata	Anuario para el ano 1933	457
Maior Linteş	Noutăţi în Construcţia gurilor de foc	457
Gh. Em. Filipescu	Statica şi Rezistenţa	457
Spiridon Iorceanu	Manualul construcţiei şi întreţinerii drumurilor	458

Pag.

H. Vuibert Relations entre les éléments d'un triangle . . 467
Charles Hermite Oeuvres 486
J. B. Touriol Optique géométrique 509

Reviste

Annales de la Société scientifique de Bruxelles 41, 401, 457, 510
Annali di Matematica 146
Anales de la Sociedad Cientifica Argentina 174, 219, 359, 457
Atti di Matematica pura ed aplicata 177
Actele Congresului internațional al Matematicianilor dela Zürich 1932. 57, 145
Acta Mathematica 177, 267, 376
Boletin Matematico 25, 52, 55, 94, 96, 144, 175, 220, 319. 359, 404, 405, 407, 456, 457, 508, 509
Buletin of the American Mathematical Society 25, 96, 144, 174, 219, 318, 359, 408, 456
Boletin Matematico Elemental 55, 144, 174, 175, 220, 408, 456, 508
Bulletin du Comité international des sciences historiques 58, 145
Bulletin de la Section Scientifique de l'Académie roumaine . . 96, 144, 319
Buletinul Asociațiunii de Matematici pure și aplicate 99
Bulletin Belge des Sciences militaires 510
Buletinul Societății de Științe Fizice 130
Bulletin technique 133
Bulletin de Mathématiques et de Physiques pures et appliquées de l'Ecole Polytechnique „Roi Carol II" 144, 176
Bulletin des sciences mathématiques 146
Buletinul Facultății de Științe din Cernăuți 146, 178
Bulletin de la classe des sciences de l'Académie royale de Belgique . 146, 220, 250, 320, 434, 457
Bolletins della Unione Matematica Italiana 488
Bulletin de la Société mathématique de France 146
Bulletin Mathématique de la Société Roumaine des Sciences 175, 177, 220, 508
Boletin del Seminario Matematico 220, 457
Bulletin de la Société Mathématique de Grèce 266
Buletinul Societății Politehnice 319
Buletinul Asociației Inginerilor C. F. R. 319
Buletinul „Societății de Matematici" a liceului „Tase Dumitrescu" din Mizil 509
Beiträge zur angewandten Geophysik 320
Bulletin scientifique de l'Ecole Polytechnique de Timișoara 360, 457
Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris 98, 146, 147, 220
Comptes rendus des séances de la Société des sciences et des lettres de Varsovie 145
Cuget clar 145, 146
Comptes rendus du Congrès de l'Association française pour l'Avancement des sciences 177, 509

Pag.

Education mathématique 490
Foaia Matematică 179
Gazeta Matematică . . 5, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 44, 64, 81, 82, 83, 84, 90, 92, 94, 105, 118, 121, 128, 129, 131, 147, 148, 163, 167, 171, 172, 178, 183, 188, 198, 200, 213, 223, 224, 225, 226, 227, 241, 243, 244, 245, 246, 247, 257, 259, 261, 262, 282, 283, 289, 290, 291, 292, 293, 294, 299, 303, 306, 330, 331, 334, 337, 344, 345, 348, 349, 353, 354, 399, 404, 405, 406, 419, 427, 440, 441, 442, 443, 444, 446 460, 463, 467, 468, 472, 492, 495, 496, 514
Jurnal de Mathématiques élémentaires: 96, 144, 148, 175, 205, 220, 266, 319, 359, 407, 457, 482, 509
Journal de Liouville 488
L'enseignement mathématique 177
L'Intermédiaire des mathématiciens 267
Mathesis . . 24, 25, 41, 42, 87, 96, 98, 174, 177, 210, 219, 221, 242, 243, 248, 292, 318, 320, 359, 393, 399, 443, 456, 457, 509, 510
Matematica 145, 320, 408
Mathematische Zeitschrift 146
Memoriile Secţiunii Ştiinţifice ale Academiei Române 98
Nouvelles Annales de Mathématiques 43, 88, 481
Natura 99, 148, 178, 359, 409
Nouvelle correspondance Mathématique 229
Nouvelles Annales 249, 250, 482
Psychotechnischen Zeitschrift 177
Proceedings of the Edinburg Mathematical Society 249
Recreaţii Ştiinţifice 242, 243, 292, 293, 390, 510
Revista Ştiinţifică „V. Adamachi" 266
Revista Matematică din Timişoara 25, 55, 64, 97, 102, 103, 113, 115, 145, 171, 172, 176, 220, 229, 266, 319, 359, 382, 408, 440, 441, 457, 509
Revista Artileriei 47
Revista de Matematicas y Fisicas elementales 57
Rendinconti della R. Accademia nazzionale dei Lincei 147
Rendinconti del Circolo matematico di Palermo 084
Sphinx 25, 55, 144, 175, 211, 319, 359, 409
Societatea Licenţiaţilor în Matematici dela Universitatea din Cluj. Chestiuni de examen 176
Societatea Română de Ştiinţe, Secţia matematică, Buletinul şedinţelor . . 220
Ştiinţa şi Progres 359, 407, 457
The Tohoku Matematical Journal 89, 351
The Mathematical Gazette 96, 174, 266, 267, 408, 509
The American Mathematical Monthly 210, 399

Extrase şi Suplimente

E. Arghiriadi Sur le mouvement d'une figure plane semblablement variable 25

		Pag.
N. Abramesco	Sur les courbes de convergence des séries de polynomes à une variable complexe et leur application à la détermination des fonctions holomorphes dans les domains donnés . . .	177
N. Abramesco	Sur le cercle d'univalence d'une fonction holomorphe $f(x)$ et sur la plus petite distance entre deux zéros d'une équation $f(x)=A$.	408
M. Biernacki	Sur les zéros des fonctions holomorphes . . .	145
N. G. Botea	Le théorème des accroissements finis et les fonctions holomorphes	177
N. G. Botea	Deux théorèmes sur le triangle	177
N. G. Botea	Sur le configuration formée par deux triangles et deux points	177
N. G. Botea	Sur une classe d'équations aux dérivées partielles	178
N. G. Botea	Proprietăţi ale triunghiului	178
N. G. Botea	Une propriété de réciprocité	509
N. Cioranesco	Sur les équations fonctionelles du cosinus et du sinus circulaires et hyperboliques	177
N. Cioranesco	Sur une nouvelle généralisation des polynomes Legendre	177
N. Donici	Al patrulea Congres al Uniunii Astronomice Internaţionale ţinut la Cambridge (Massachusetts	98
M. Deweck	Sur la problème du relèvent topographique .	510
M. Ghermanesco	Equations différentielles et équations aux différences finies	220
M. Ghermanesco	Sur les équations aux différences finies à plusieurs variables	220
M. Ghermanesco	Sur les équations aux différences finies	220
M. Ghermanesco	Sur les équations aux différences finies	267
M. Ghermanesco	Sur un théorème de M. de La Vallée Poussin	320
R. J. H. Germai	Application de la méthode des résidus à la généralisation de la formule de Lagrange . . .	320
Lucien Godeaux	L'Ecole de Géométrie de l'Université de Liège	457
Caïus Iacob	Sur un problème mixte dans l'anneau circulaire	98
Caïus Iacob	Sur quelques problèmes mixtes dans une Couronne circulaire	98
Caïus Iacob	Sur quelques problèmes concernant l'écoulement des fluides parfaits compressibles	98
J. Leemans	Sur quelques intégrales définies obtenues par l'application des propriétés des intégrales euleriennes	25
Comandant I. Linteş	Le calcul de la vitesse minima dans la „Balistique interieure“	457

		Pag.
Miron Nicolesco	Sur les fonctions mesurables	146
Miron Nicolesco	Fonction de Green d'ordre p.	146
Miron Nicolesco	Remarques sur un théorème de moyenne de M. Luigi Amoroso	146
Miron Nicolesco	Sur une classe d'équations fonctionelles	146
Miron Nicolesco	Sur la décomposition des polynomes différentiels en facteurs de premier ordre	146
Miron Nicolesco	Sur les fonctions de *n* variables, harmoniques d'orde p.	146
Miron Nicolesco	Sur quelques propriétés élémentaires de la mesure au sens de Jordan	146
Miron Nicolesco	Sur quelques points de géométrie finie directe	146
Miron Nicolesco	Extension d'un théorème de M. F. Riesz aux fonctions harmoniques d'ordre p.	146
Miron Nicolesco	Sur le probléme de Riquier	146
Miron Nicolesco	Sur les harmoniques et sous-harmoniques d'ordre p.	146
R. Racliş	Leterme reste de la série de Taylor généralisée	56
R. Racliş	Trois théorèmes sur la série de Taylor	57
Cl. Servais	Sur la géométrie du tétraèdre	98
P. Sergescu	Quelques points de la théorie des équations algébriques	145
P. Sergescu	Quelques propriétés des polynomes	145
P. Sergescu	Histoire des sciences mathématiques et physiques en Roumanie	145
P. Sergescu	Istoria calcului numeric	145
P. Sergescu	Les sciences mathématiques	145
P. Sergescu	O schiţă de istorie a ştiinţelor matematice	146
Saba S. Ştefănescu	Théorie du plan conducteur pour l'émetteur alternatif de longueur finie	320
V. Thébault	Quadrilatère bordé de carrés	25
V. Thébault	Géométrie et mécanique. Triangle bordé de carrés. Sur les points de Feuerbach	98
V. Thébault & S. Goormaghtigh	Sur les cercles remarquables du triangle	221
V. Thébault	Géométrie de l'orthopole	221
V. Thébault	Triangle bordé de carrés	475
V. Thébault	Triangle bordé de triangles isoscèles semblables	510
C. C. Teodorescu	Relation entre la résistance et l'allongement	360
G. Vranceanu	Sur l'indépendance des secondes formes fondamentales d'une V*m*.	146
G. Vranceanu	Connexions affines liées aux systèmes de Pfaff	146
G. Vranceanu	Studio geometrico dei sistemi anolonomi	146
G. Vranceanu	Sulla stabilita del rotolamento di un disco	147

		Pag.
G. Vranceanu	Sopra le ecuazioni del moto di un sistemo anolonomo	147
G. Vranceanu	Sur la stabilité trigonométrique de l'équilibre dans la dynamique	147
G. Vranceanu	Sopra le ecuazioni del problema dei due corpi di masse variabili	147
G. Vranceanu	Sulle condizioni di rigidità di una V_m in un S_1 S_m	147
G. Vranceanu	Sopra i sistemi anolonomi a legami dipendenti dal tempo	147
G. Vranceanu	Sopra l'interpretazione geometrica dei sistemi mecanici	147
G. Vranceanu	Sur les espaces de Riemann ayant leurs coefficients de rotation constants	147
G. Vranceanu	Sur quelques théorèmes relatifs aux variétés non holonomes aux systèmes de formes de Pfaff	147
G. Vranceanu	Sur le nombre des différentielles d'un systéme de Pfaff	147
G. Vranceanu	Sur le groupe d'applicabilité des variétés non holonomes	147
Gh. Zapan	Uebbarkeit verschiedener Aufgaben	177
Gh. Zapan	Beziehung zwischen den Unterrichtsfächern in den höhere Schulen und Folgerungen für die Schulorganisation	177
***	Statutele Asociației Inginerilor C. F. R.	319

L. ERATA

Pagina sau problema de îndreptat	*Pagina la care se indică îndreptarea ce trebue făcută*
Problema 4285	40
„ 4041	80
pag. 33	80
Problema 3368	160
„ 4283	198
„ 4237	200
pag. 179	240
Problema 4360	334
pag. 25	336
Problema 4346	336
„ 4250	383
„ 4290	383
„ 4386	480

Începând cu N-rul 7/XXXIX „*Gazeta Matematică*" va apare în 48 pagini, prețul abonamentului rămânând însă același.

Dela apariția ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Amărăștеanu M. (4367, P); *Bălăceanu G.* (4386); *Boian I.* (4379); *Budeanu* (4386); *Ceaușescu V.* (4316, 4317, 4367, 4083, 97, 108, 40); *Coandă I. V.* (4317, 4367, 4386, 4397); *Cocea Gh. Th.* (3509); *Dobrescu P.* (4238, 4267, 4386); *Gavrilescu N. C.* (4328, 4367, 4375); *Goldenberg I. M.* (4379); *Hornștein H. S.* (4386); *Lebădă D.* (4223, 4286, 4304, 4306); *Mavrodin D.* (3928, 4166, 4385, 4397); *Mazilu C. P.* (4385, 4386, P); *Mănae M.* (4187, 4367, 4397, P); *Negrea A. M. Leonte* (4190, 4228, 4359, 4386); *Nichifor S. M.* (4317); *Parepeanu I.* (4367); *Petrescu I. I.* (4374); *Postelnicescu C. M.* (4196); *Predoescu I. M.* (4226, 329, 4385, 4386); *Stan I. A.* (4255, P); *Stoicescu T.* (4317, 4349, 4379, 4385); *Șabac G. I.* (4175, 4304, 4317, 4339, 4375).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât și cele de propus de **geometrie,** *a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.*

Manuscrisele se vor scrie **pe o singură parte a foii și nu se vor tratà mai multe chestiuni diferite pe aceiași foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipì sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exercițiile, recreațiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA", trebue să fie originale, iar nu luate din cărți sau reviste speciale de matematici.

Colecțiunea „GAZETEI MATEMATICE“

«Gazeta Matematică» vinde ani complețî broșați cu prețul de 400 lei volumul, afară de volumele: X, XVII, XVIII, XIX, XX și XXI care se vând cu prețul de 500 lei volumul.

Volumele: I, XV și XXV sunt epuizate.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu și V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **N. Abramescu,** *Lecțiunile de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediția IV revăzută și adăogită,* 1924 (Epuizată).

3. **A. G. Ioachimescu și G. Țițeica,** *Culegere de probleme de mecanică și geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme și o planșă) (Epuizată).

4. **Tr. Lalescu și Șt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografie* (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu,** *Tratat de geometrie analitică,* Fascicola I *Ediția II revăzută și adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30,—
Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).
Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).
Idem, Fascicola IV Aplicațiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150,—

6. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10,—

7. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediția III-a revăzută și îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. Lei 180,—

8. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu și G. Țițeica,** *Vocabular Matematic* . . . . Lei 20,—

9. **G. Țițeica,** *Culegere de probleme de geometrie* Lei 150,—

La aceste prețuri se vor adăogà taxele poștale pentru expediție.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul.* (Ediția II) Lei 150,—

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plătește înainte și începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamațiunile și cererile pentru cărți din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete numai D-lui: Inginer **Al. D. Bunescu,** Directorul General al Monitorului Oficial și Imprimeriilor Statului, B-dul Elisabeta 29, București I.

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii și orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie și expediție, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Căluşei 23, București 4.